Boltzmann機械

概要

- 相互結合的神経回路模型
  - 記憶と想起のモデル
- 非決定的動作
  - 確率過程としての動作
  - 記憶の出現率に注目
- 内部と外界から構成される
  - 外界から示される記憶(パターン)を学習
  - 記憶の整理

Boltzmann機械

- Hopfield モデルと同じ構成
- エネルギー

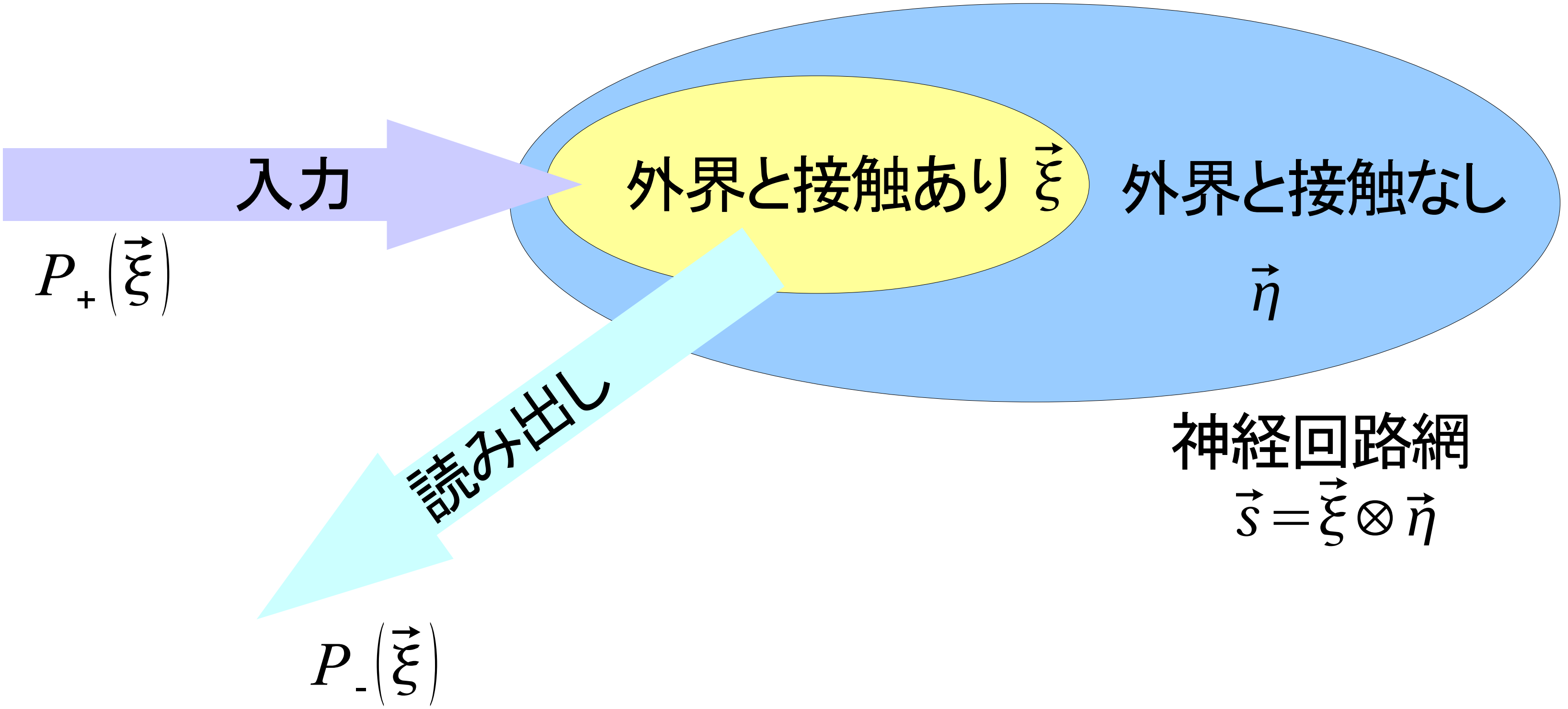
$$E(\vec{s}) = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j \neq i} w_{ij} s_i s_j, \quad w_{ij} = w_{ji}$$

- ダイナミクス

$$P(s_i = \pm 1) = \left(1 + e^{\mp 2\beta h_i}\right)^{-1}, \quad h_i = \sum_{j \neq i} w_{ij} s_j$$

- 平衡分布

$$P(\vec{s}) \propto \exp\left(-\beta E(\vec{s})\right)$$


入力
$P_{+}\left(\vec{\xi}\right)$
外界と接触あり $\vec{\xi}$
外界と接触なし
$\vec{\eta}$
読み出し
$P_{-}\left(\vec{\xi}\right)$
神経回路網
$\vec{s}=\vec{\xi}\otimes\vec{\eta}$

学習

- 外界と接している部分 $\vec{\xi}$ と内部の部分 $\vec{\eta}$

$$\vec{s} = \vec{\xi} \otimes \vec{\eta}$$

- 外界から与えるパターンの出現確率

$$P_{+}\left(\vec{\xi}\right)$$

- Boltzmann機械が作るパターンの確率

$$P_{-}\left(\vec{\xi}\right)$$

- Kullback divergenceを導入する
  - 二つの確率分布のずれの指標

$$G=\sum_{\{\vec{\xi}\}} P_{+}\left(\vec{\xi}\right)\ln\frac{P_{+}\left(\vec{\xi}\right)}{P_{-}\left(\vec{\xi}\right)}$$

  - 二つの確率分布が等しくなるとゼロになる

- w_{ij} の変更によるKullback divergenceの変化

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial w_{ij}} \delta w_{ij}$$

- G を減少させるには

$$w_{ij} \to w_{ij} - c \frac{\partial G}{\partial w_{ij}}$$

- 熱平衡分布を代入し、隠れた部分について和をとる
  - 見えている部分の分布が分かる

$$P_{-}\left(\vec{\xi}\right)=Z^{-1}\sum_{\{\vec{\eta}\}} e^{-\beta E}$$

$$Z=\sum_{\{\vec{s}\}} e^{-\beta E}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial w_{ij}} &= -\sum_{\{\vec{\xi}\}} P_{+}\left(\vec{\xi}\right) \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \ln P_{-}\left(\vec{\xi}\right) \\
&= -\sum_{\{\vec{\xi}\}} P_{+}\left(\vec{\xi}\right) \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \left[\ln \sum_{\{\vec{\eta}\}} e^{-\beta E} - \ln Z \right] \\
&= \sum_{\{\vec{\xi}\}} P_{+}\left(\vec{\xi}\right) \left[\beta \frac{1}{\sum_{\{\vec{\eta}\}} e^{-\beta E}} \sum_{\{\vec{\eta}\}} s_i s_j e^{-\beta E} - \frac{\beta}{Z} \sum_{\{\vec{s}\}} s_i s_j e^{-\beta E} \right] \\
&= -\frac{\beta}{Z} \sum_{\{\vec{\xi}\}} P_{+}\left(\vec{\xi}\right) \left[P_{-}^{-1}\left(\vec{\xi}\right) \sum_{\{\vec{\eta}\}} s_i s_j e^{-\beta E} - \sum_{\{\vec{s}\}} s_i s_j e^{-\beta E} \right]
\end{aligned}
$$

- **第1項**
  - $\vec{\xi}$ を固定して $\vec{\eta}$ について平均
  - **覚醒時の学習**
- **第2項**
  - **全てについて平均**
  - REM**睡眠**?