Hamilton 閉路

頂点(node または vertex)とそれらを結ぶ辺(edge または link)からなる図形を graph $G(V,E)$ と呼ぶ。 V は頂点の集合、 E は辺の集合を表す。全ての頂点 $q_i \in V$ を一度ずつ経由して、元の頂点に戻るような経路を Hamilton 閉路(Hamilton Cycle)と呼ぶ。また、graph が少なくとも一つの Hamilton 閉路を有するとき、その graph を Hamilton graph または Hamiltonian と呼ぶ。一般の graph は Hamiltonian ではない。

間違えやすい概念として Euler 閉路がある。Euler 閉路は、全ての辺 $v \in E$ を一度ずつ経由して元の頂点に戻る経路である。つまり、「一筆書き」に対応する。

完全 graph とは、全ての頂点の組 $(q_i, q_j) \in V \times V$ を結ぶ辺が存在する graph であり、 K_V と表記する。

TSP の厳密解を得るためには、graph の Hamilton 閉路を列挙し、それぞれの経路長を計算する必要がある。辺が存在しない頂点の組には十分長い距離の経路が存在するとして、完全グラフとして考える。

N 個の頂点の graph を考える。閉路を考えるので、特定の頂点を出発点としても一般性を失わない。そこで q_0 を出発点とする。 $v_k = i$ とは k 番目に頂点 q_i を訪れるということを表すとする。

次のような再帰的アルゴリズム $F_{\text{visit}}(k,i)$ を考える。 k 番目に頂点 q_i を訪れるか否かを判定するものである。

$F_{\text{visit}}(k,i)$ {
  $v_k = i$
  i ++
  if $i = N$ then 出力
  for($t = 0$; $t < N$; t ++){
    if $v_t = -1$ then $F_{\text{visit}}(t,i)$
  }
  $v_k = -1$
}

ここで、 $v_k = -1$ とは k 番目にどの頂点を訪れるかが未定であることを示している。全ての k について $v_k = -1$ と初期化し、この再帰アルゴリズムを $F_{\text{visit}}(0,0)$ として実行することで、全ての順序が出力される。

$N = 4$ の場合の実際の動きを調べる。

(,,,)	$F_{\text{visit}}(0,0)$	(0,,,)	$F_{\text{visit}}(1,1)$	(0,1,,)	$F_{\text{visit}}(2,2)$	(0,1,2,)	$F_{\text{visit}}(3,3)$	(0,1,2,3)
					$F_{\text{visit}}(3,2)$	(0,1,,2)	$F_{\text{visit}}(2,3)$	(0,1,3,2)
			$F_{\text{visit}}(2,1)$	(0,,1,)	$F_{\text{visit}}(1,2)$	(0,2,1,)	$F_{\text{visit}}(3,3)$	(0,2,1,3)
					$F_{\text{visit}}(3,2)$	(0,,1,2)	$F_{\text{visit}}(1,3)$	(0,3,1,2)
			$F_{\text{visit}}(3,1)$	(0,,,1)	$F_{\text{visit}}(1,2)$	(0,2,,1)	$F_{\text{visit}}(2,3)$	(0,2,3,1)
					$F_{\text{visit}}(2,2)$	(0,,2,1)	$F_{\text{visit}}(1,3)$	(0,3,2,1)