# Hopfield モデル

# 概要

- 相互結合的神経回路模型
  - 記憶と想起のモデル
- 非決定的動作
  - Simulated annealingとの関係
- Hopfield モデル
- Boltzmann 機械

# Hopfieldモデル

- *N* 個の素子　$s_i = \pm 1$
- 相互作用(対称的)
  - 理論構成の都合　$w_{ij} = w_{ji}$
- 素子の動作(非同期的)
  - ランダムに素子を選んでその素子だけ状態更新
  - *N* 個の素子の状態更新を行う時間が1時間単位

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{if} \ \sum_{i \neq j} w_{ij} s_j \geq 0 \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

# エネルギー

$$E=-\frac{1}{2}\sum\sum_{i\neq j} w_{ij}s_i s_j$$

- エネルギー変化

$$\delta E=-\sum_{i\neq j} w_{ij}s_j\delta s_i\leq 0$$

  - エネルギーは単調に減少する:Lyapunov関数
    - $\sum_{i\neq j} w_{ij}s_j$ と $\delta s_i$ は同符号

$$\text{if}\quad \sum\nolimits_{i\neq j} w_{ij}s_j\geq 0,\quad s_i=-1\rightarrow s_i=1\quad \text{or}\quad s_i=1\rightarrow s_i=1$$

$$\text{if}\quad \sum\nolimits_{i\neq j} w_{ij}s_j\leq 0,\quad s_i=1\rightarrow s_i=-1\quad \text{or}\quad s_i=-1\rightarrow s_i=-1$$

# Hebb 学習則

- パターン $\vec{\xi}$ を記憶する $w_{ij} = \lambda \xi_i \xi_j$
  - λ は $O(N^{-1})$ の量
  - エネルギーは示量変数(システムサイズに比例)
  - 通常の物理系ではエネルギーは示量変数
  - cf: 示強変数(システムサイズによらない量)
    - 温度、圧力

$$E = -\frac{1}{2}\sum\sum_{i\neq j}\lambda\xi_i\xi_j s_i s_j$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\left[\left(\sum_i \xi_i s_i\right)^2 - \sum_i \xi_i^2 s_i^2\right] = -\frac{\lambda}{2}\left[\left(\sum_i \xi_i s_i\right)^2 - N\right]$$

- **最低エネルギー状態は二つ**

$$\vec{s} = \pm\vec{\xi}$$

- **強磁性と同じ**

# $P$ 個のパターン

- Hebb則

$$w_{ij} = \lambda \sum_{\mu=0}^{P-1} \xi_i^\mu \xi_j^\mu$$

- パターンとの重なり

$$m_\mu = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu s_i$$

$$E = -\frac{\lambda}{2} N^2 \sum_{\mu} \left( m_{\mu} \right)^2 + \frac{\lambda}{2} NP$$

- パターンが直行していれば、それぞれがエネルギー最小を与える
- 記憶した以外のパターンを想起することがあり得る

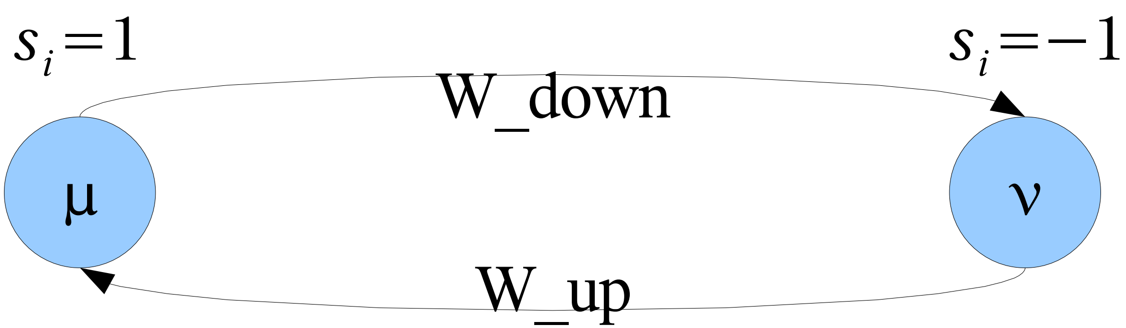
# 有限温度のダイナミクス

$$P\left(s_i=\pm 1\right)=\frac{1}{1+e^{\mp 2\beta h_i}}$$

$$h_i=\sum_{j\neq i} w_{ij}\, s_j$$

- 演習：平衡分布を求めよ。

# 平衡分布




$$\frac{P_\mu}{P_\nu}=\frac{w_\uparrow}{w_\downarrow}=\frac{1+e^{-2\beta h_i}}{1+e^{2\beta h_i}}=e^{-2\beta h_i}=\frac{e^{-\beta h_i}}{e^{\beta h_i}}$$

$$
\frac{e^{-\beta h_i}}{e^{\beta h_i}} = \exp\left(-\beta \sum_{i \neq j} w_{ij} 1 \times s_j - (\beta/2) \sum_{j \neq i, k \neq i, k \neq j} w_{kj} s_k s_j\right)
$$

$$
/ \exp\left(-\beta \sum_{i \neq j} w_{ij} (-1) \times s_j - (\beta/2) \sum_{j \neq i, k \neq i, k \neq j} w_{kj} s_k s_j\right)
$$

$$
= \frac{e^{-\beta E(\mu)}}{e^{-\beta E(\nu)}}
$$

# TSPをHopfield模型で考える

- J. J. Hopfield and D. W. Tank, Biol. Cyern. **52** (1985) 141.
- $V_i^x$ **都市**x **を**i **番目に経由する時**1, **それ以外**0
- **総経路長**

$$E_0 = \frac{D}{2} \sum_x \sum_{y \neq x} \sum_i d_{xy} V_i^x \left( V_{i+1}^y + V_{i-1}^y \right)$$

## 拘束条件

$$E_1=\frac{A}{2}\sum_x\sum_i\sum_{j\neq i}V_i^x V_j^x$$
$$+\frac{B}{2}\sum_i\sum_x\sum_{y\neq x}V_i^x V_i^y$$
$$+\frac{C}{2}\left(\sum_x\sum_i V_i^x-N\right)^2$$

$A, B, C$ は大きな定数

- 最小化

$$E = E_0 + E_1$$

- スピン変数へ変換

$$V_i^x = \frac{1}{2}\left( S_i^x + 1 \right)$$