指定された分布に従う疑似乱数

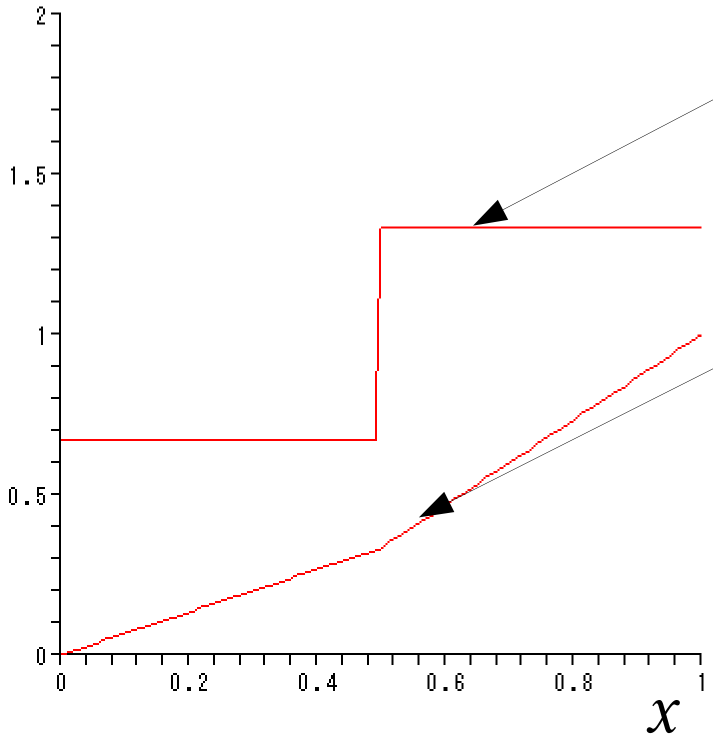
一様乱数から非一様乱数へ

- 疑似一様乱数は生成できた
- シミュレーションでは、指定された分布に従う乱数が必要になる
  - 変換法
  - 棄却法

変換法

- 確率密度 $f(x)$ に従う乱数を生成する
  - 範囲 $x_{\mathrm{min}} \le x < x_{\mathrm{max}}, \ \int_{x_{\mathrm{min}}}^{x_{\mathrm{max}}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
  - 確率分布 $0 \le F(x) = \int_{x_{\mathrm{min}}}^{x} f(x')\,\mathrm{d}x' < 1$
- 一様乱数を発生 $0 \le r < 1$
  - $x = F^{-1}(r)$ は $f(x)$ に従う

例1



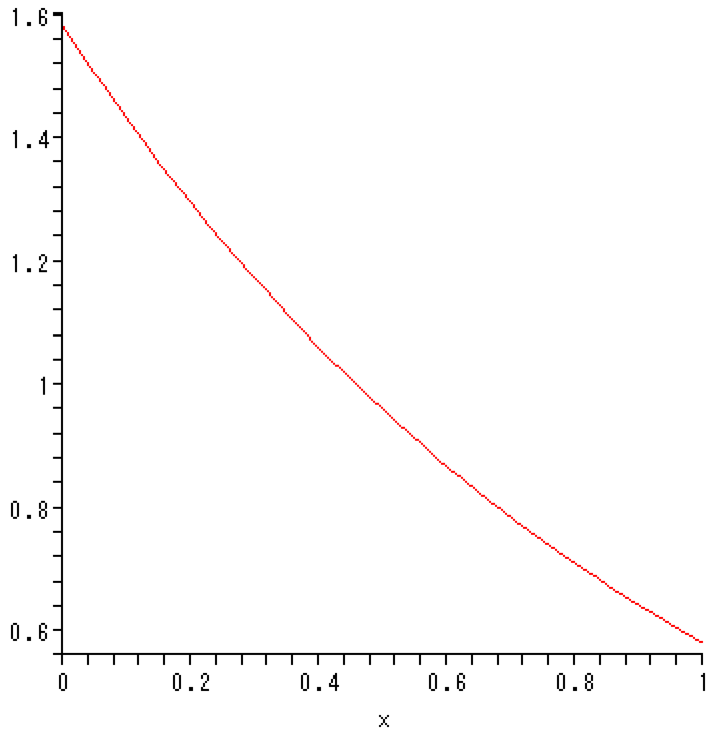
$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3} & \text{if } x<\frac{1}{2}\\ \frac{4}{3} & \text{otherwise}\end{cases}$$

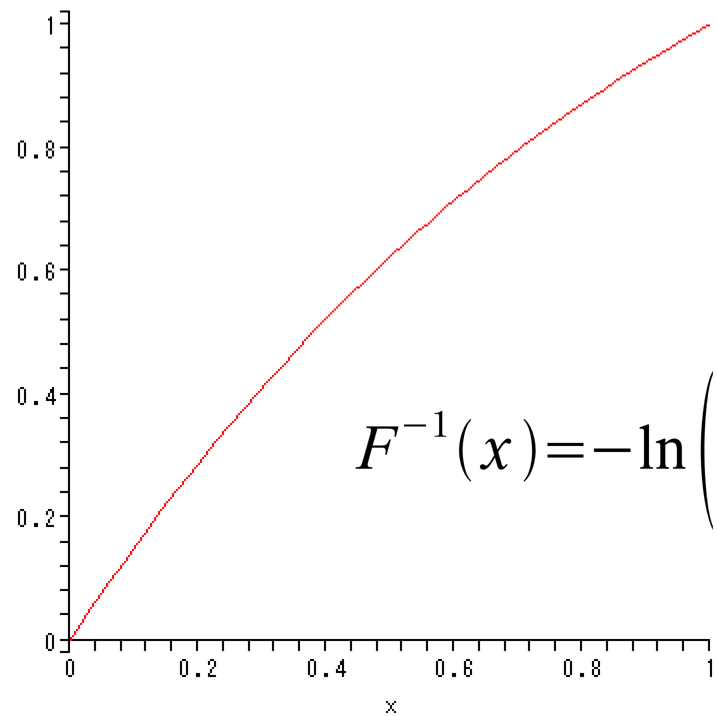
$$F(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x & \text{if } x<\frac{1}{2}\\ \frac{4}{3}x-\frac{1}{3} & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$F^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & \text{if } x<\frac{1}{3}\\ \frac{3}{4}x+\frac{1}{4} & \text{otherwise}\end{cases}$$

例2

$$f(x)=Ae^{-x}\quad 0\le x<1,\quad A=\frac{e}{e-1}\qquad F(x)=\int_0^x f(x')\,\mathrm{d}x'=A\left(1-e^{-x}\right)$$





$$F^{-1}(x)=-\ln\left(1-\frac{x}{A}\right)$$

変換法の困難さ

- 逆関数が必要
- 定積分が必要
- 一般の分布関数では不可能

演習問題：確率密度がガンマ関数

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma}{\Gamma^2+x^2}$$

の場合に、変換法を構成しなさい。

特殊な方法：ガウス分布

- ガウス(正規)分布に従う乱数は、通常の変換法では生成できない

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

  - 定積分の表式が得られない
- 2 次元のガウス分布を考える

$$f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 極座標に変換

$$f(r,\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi\sigma^2} r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

- θ 方向の積分を実行
  - θ 方向は一様分布になることに注意

$$f(r)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{\sigma^2} r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}r$$

$$\rho = \int_0^r \frac{1}{\sigma^2} r' \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}r' = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$r = \sqrt{-2\sigma^2 \log\left(1-\rho\right)}$$

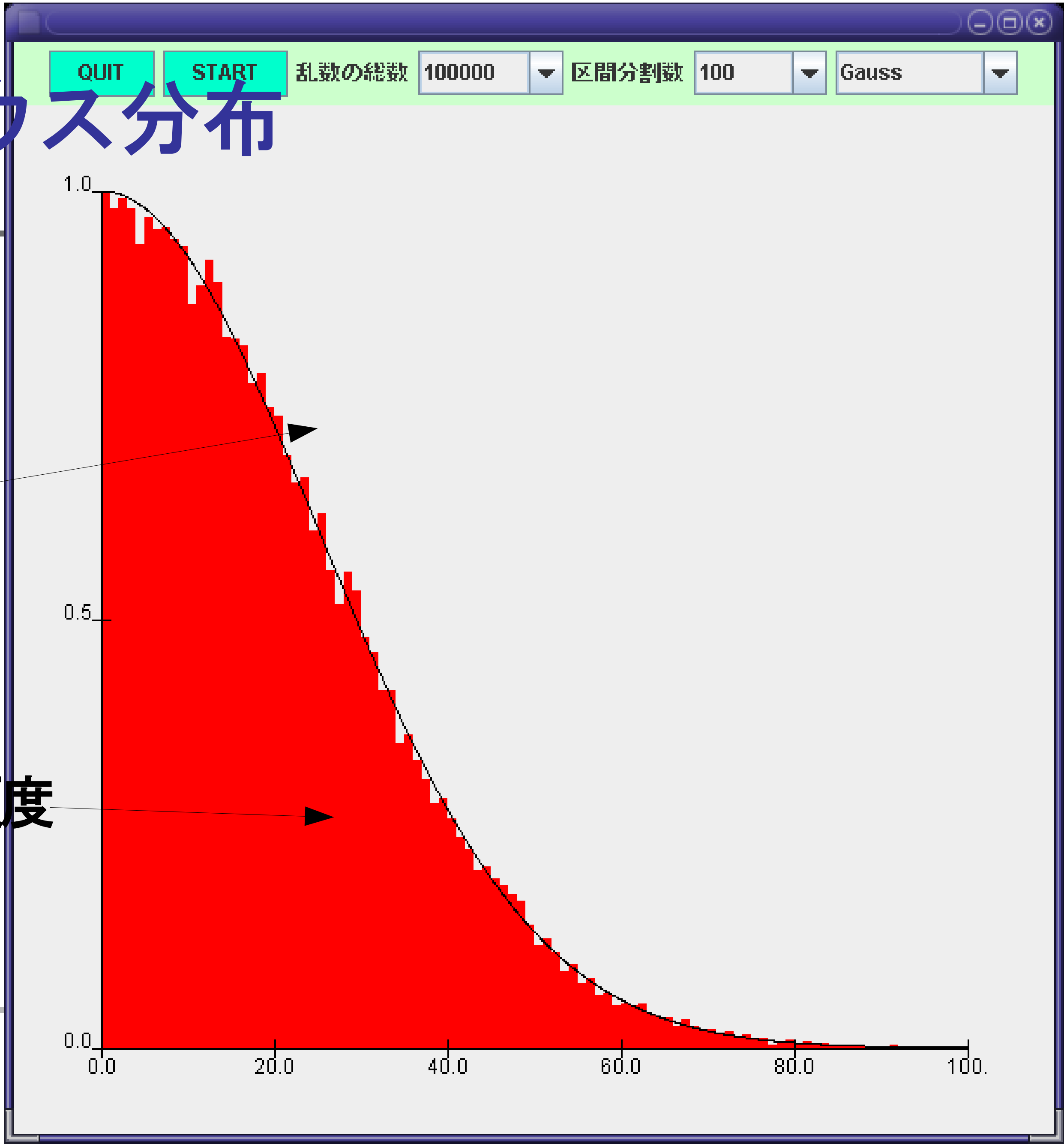
- 二つの一様乱数(*a*,*b*)を発生させる

$$(a\,,b)\rightarrow\left(r=\sqrt{-2\sigma^2\log(1-a)},\theta=2\pi b\right)$$
$$\rightarrow\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)=(x\,,y)$$

実験：ガウス分布

密度曲線

生成した乱数の頻度



棄却法

- 変換法で生成できない分布の場合
- 確率密度*f*(*x*) に従う、範囲[*a*,*b*]の乱数

- 効率は悪いが、任意の分布に適用できる

1. $f(x)$ の変域を[a,b)、最大値をmとする
2. [0,1)の乱数を生成する$\{x,y\}$
3. $z=(b-a)x+a$
4. $y<f(z)/m$ ならばz を乱数として採用する
5. それ以外ならば、生成した乱数を棄却する
6. 繰り返す

演習問題：確率密度

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)$$

に従う乱数 $0 \le x < 1$ を棄却法で生成する関数またはメソッド randSin() を定義しなさい。