「グラフと組合せ」試験問題

2008 年度

1 数学的帰納法

任意の自然数 n に対して以下の恒等式が成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n \tag{1}$$

ここで $\binom{n}{k}$ は二項係数と呼ばれ、 n 個から k 個選ぶ組合せの数と同等であり、以下のように表される。

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2}$$

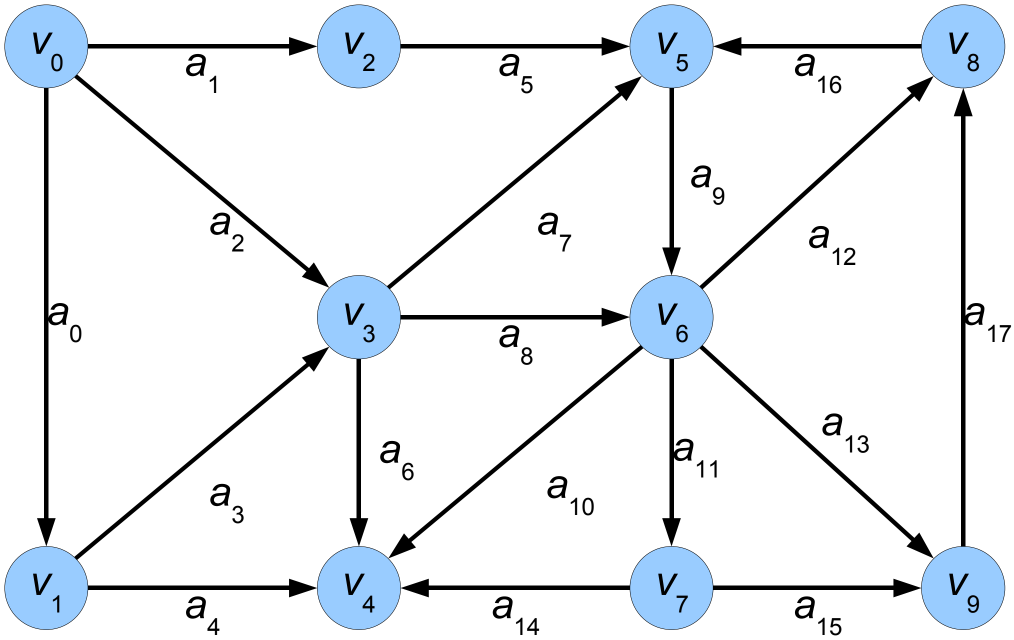
ヒント： $0<k<n+1$ である k に対して、以下の漸化式が成り立つ。

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{3}$$

2 幅優先探索

有向グラフ $G=(V,A)$ に対して、幅優先探索 (Breadth-First Search) のアルゴリズムを以下に示す。ただし、ある頂点 $v \in V$ を始点とする弧の集合を $\delta^+ v$ 、ある弧 $a \in A$ の始点側の頂点を $\partial^+ a$ 、終点側の頂点を $\partial^- a$ とする記法を用いている。 L は既にチェックした頂点の集合、 Q はこれから調べる必要のある頂点の待ち行列である。

```
  L = ∅
  Q = {v_0}
while ( Q ≠ ∅ ) {
    v = Q の先頭の要素取り出し
  forall( a ∈ δ⁺v ) {
      w = ∂⁻a
    if ( w ∉ L ){
          w を Q の終端に追加
    }
  }
   L ← L ∪ {v}
}
```



[1] アルゴリズムの実行

このアルゴリズムを上のグラフに対して、頂点 v_0 を始点として実行しなさい。ただし、頂点を待ち行列 Q に入れる際には、頂点の番号の小さい順に、ある頂点を始点とする弧の探索は、弧の番号の小さいほうから実施するものとする。アルゴリズムの各ステップ（一番外側の while が一回実行される毎）の L と Q の変化を以下の例のように、表として表しなさい。

	L	Q
0	$\emptyset$	$\{v_0\}$
1	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$
2	...	...

[2] 得られる spanning tree

幅優先探索によって生成される spanning tree を示しなさい。

[3] 探索方法の名前

本探索方法が幅優先探索と呼ばれる理由を簡潔に述べなさい

3 最小木問題

無向グラフ $G=(V,A)$ の各弧 $a\in A$ に、重み $w(a)$ が定義されているとする。重みの総和が最小になる G の spanning tree T を求める一つの方法が Kruskal のアルゴリズムであり、以下のように表される。

```
T = Ø
w_max を十分に大きな値に設定
while ( T は G の極大木でない){
    w = w_max
    forall( a ∈ A\T ){
        if( w(a) < w )){
            if( T∪{a} は閉路を持たない){
                a_new = a
                w = w(a)
            }
        }
    }
    T ← T∪{a_new}
}
```

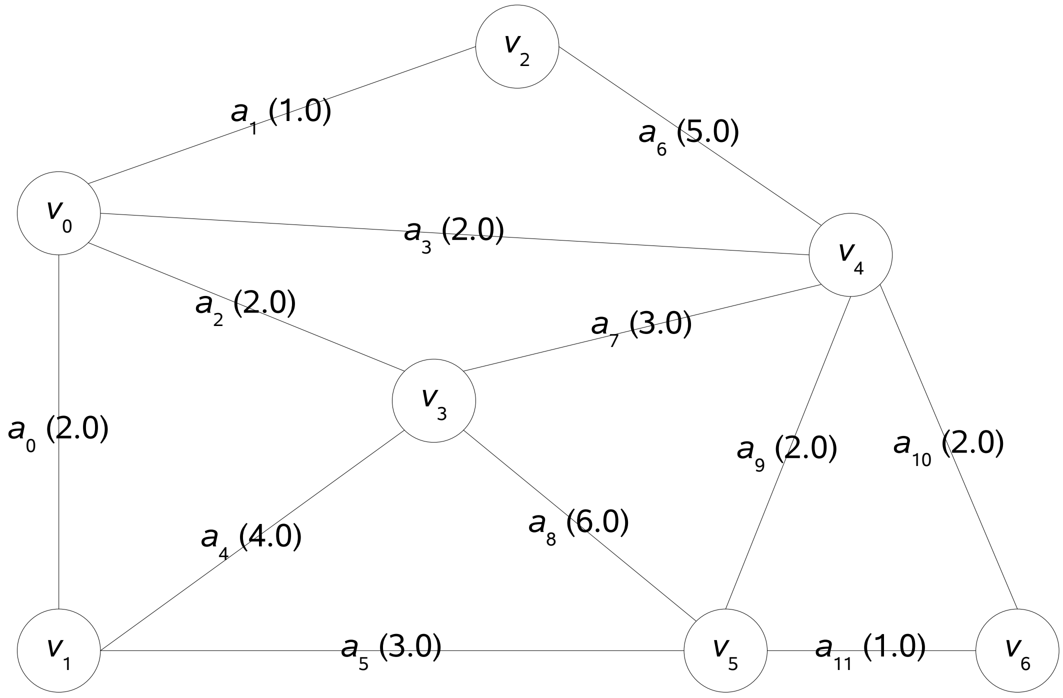
このアルゴリズムに従って、以下のグラフを v_0 を始点として最小木 T を求めることを考える。各弧についている文字列は、弧のラベル(重み)である。アルゴリズムの中で、弧の重みが同じ場合は、弧のインデクスの小さいほうを先に使うとする。

[1] アルゴリズムの実行

アルゴリズムが実行された時に、各弧が T に追加される順番を示しなさい。

[2] 探索によって生成される spanning tree

アルゴリズムの実行によって得られる spanning tree を示しなさい。


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
a_0 (2.0)
a_1 (1.0)
a_2 (2.0)
a_3 (2.0)
a_4 (4.0)
a_5 (3.0)
a_6 (5.0)
a_7 (3.0)
a_8 (6.0)
a_9 (2.0)
a_{10} (2.0)
a_{11} (1.0)