

「グラフと組合せ」試験問題解答例

2008 年度

1 数学的帰納法

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n$ の左辺を $l(n)$ 、右辺を $r(n)$ と書くこととする。

- $n=0$ の場合

$$l(0) = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} p^k q^{-k} = \binom{0}{0} p^0 q^{-0} = 1 \quad (1)$$

$$r(0) = (p+q)^0 = 1 \quad (2)$$

よって等式がなりたつ。

- ある値 n について $l(n)=r(n)$ が成り立つと仮定する。

$$l(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k q^{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} p^k q^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} p^0 q^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} p^{n+1} q^0 \quad (3)$$

漸化式と $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ であることを使うことで、 $l(n+1)$ を $l(n)$ で表現する。

$$\begin{aligned} l(n+1) &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} p^k q^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k q^{n+1-k} + p^{n+1} + q^{n+1} \\ &= p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + q \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + p^{n+1} + q^{n+1} \\ &= p \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - p^n \right] + q \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - q^n \right] + p^{n+1} + q^{n+1} \\ &= (p+q)l(n) \end{aligned} \quad (4)$$

従って等式 $l(n+1)=r(n+1)$ が成り立つ。つまり任意の自然数 n について、等式が成り立つ。

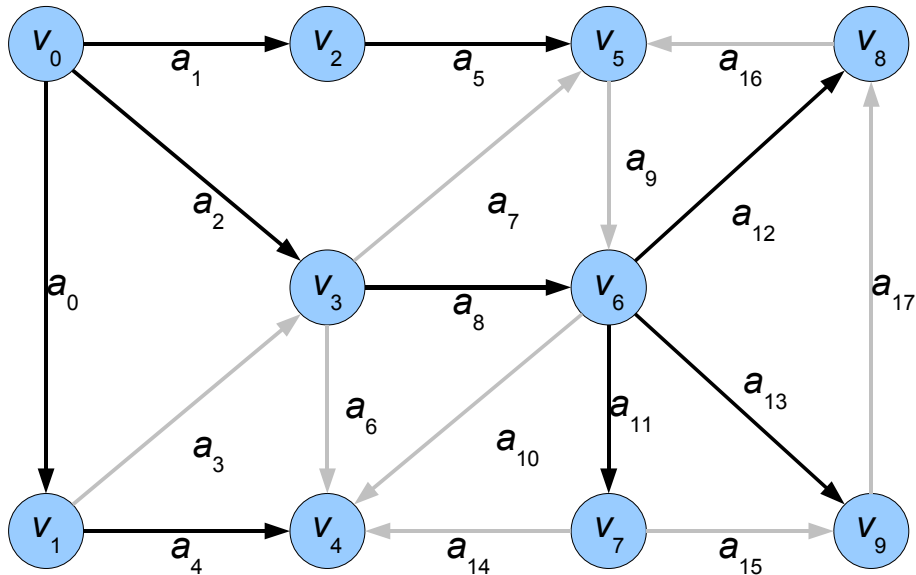
2 幅優先探索

[1] アルゴリズムの実行

アルゴリズムの実行により、 L と Q は以下のように変化する。

	L	Q
0	\emptyset	$\{v_0\}$
1	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$
2	$\{v_0, v_1\}$	$\{v_2, v_3, v_4\}$
3	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4, v_5\}$
4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4, v_5, v_6\}$
5	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{v_5, v_6\}$
6	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$	$\{v_6\}$
7	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$	$\{v_7, v_8, v_9\}$
8	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$	$\{v_8, v_9\}$
9	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$	$\{v_9\}$
10	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$	\emptyset

[2] 得られる spanning tree



得られる spanning tree を示す。薄い線の部分は、spanning tree に含まれない弧である。

[3] 探索方法の名前

このアルゴリズムでは、始点からの距離（いくつの頂点を経由したか）を一つずつ増やし、その距離の頂点を全て尽くしてから、距離を一つ増やして次を探索する。その結果、spanning tree は幅の広いものとなる。このため、幅優先探索の名が使われる。

3 最小木問題

[1] アルゴリズムの実行

アルゴリズムが実行された時に、各弧が T に追加される順番は以下ようになる。

$$a_1, a_{11}, a_0, a_2, a_3, a_9$$

[2] 探索によって生成される spanning tree

アルゴリズムの実行によって得られる spanning tree を以下に示す。波線は、spanning tree に含まれないものである。

