

「グラフと組合せ」課題 13(解答例)

2008/7/7

1 Dijkstra のアルゴリズム

有効グラフ $G=(V,A)$ の各弧 $a \in A$ に、距離 $l(a)$ が定義されているとする。始点 $v_0 \in V$ から各頂点への最小距離となる有向道からなる G の spanning tree T を求める一つの方法が Dijkstra のアルゴリズムである。

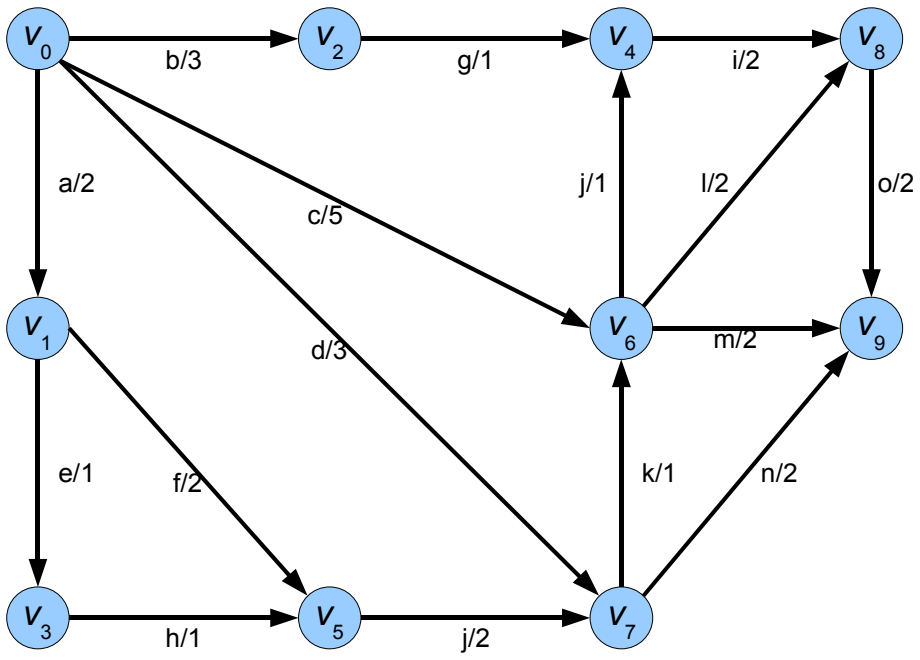
Dijkstra のアルゴリズムは以下のように表される。 $U \subseteq V$ を始点 v_0 からの有向道が見つまっているが、距離の確定していない点の集合、 $W \subseteq V$ を始点 v_0 からの有向道が見つかり、距離が確定した点の集合とする。各頂点の関数 $p(v) \in R$ は、始点 v_0 の距離、 $q(v) \in V$ は、短路を逆にたどった時の、 v の前の点を表すとする。まず、

$$\begin{aligned}U &= \{v_0\} \\W &= \emptyset \\p(v_0) &= 0 \\p(u) &= +\infty (u \in V \setminus \{v_0\})\end{aligned}$$

のように初期化する。

```
while(  $U \neq \emptyset$  ){
     $p(w)$  が最小となる  $w \in U$  を見つける
    forall (  $a \in \delta^+ w$  ){
         $x = \delta^- a$ 
        if(  $x \notin W$  ){
            if(  $p(x) > p(w) + l(a)$  ){
                 $q(x) \leftarrow w$ 
                 $p(x) \leftarrow p(w) + l(a)$ 
                 $U \leftarrow U \cup \{x\}$ 
            }
        }
    }
     $W \leftarrow W \cup \{w\}$ 
     $U \leftarrow U \setminus \{w\}$ 
}
```

このアルゴリズムに従って、以下のグラフより頂点 v_0 を始点として、各頂点への最小距離となる有向道からなる spanning tree T を求めなさい。途中経過も示しなさい。図中の弧に示したアルファベットが弧の名前、数値が距離である。



解答例

手順	注目している 頂点	W	U	p	q	更新 を受けた 手順
0		\emptyset	$\{v_0\}$	$p(v_0)=0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2, v_6, v_7\}$	$p(v_1)=2$ $p(v_2)=3$ $p(v_6)=5$ $p(v_7)=3$	$q(V_1)=v_0$ $q(V_2)=v_0$ $q(V_6)=v_0$ $q(V_7)=v_0$	5
2	v_1	$\{v_0, v_1\}$	$\{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7\}$	$p(v_3)=3$ $p(v_5)=4$	$q(V_3)=v_1$ $q(V_5)=v_1$	
3	v_2	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$	$p(v_4)=4$	$q(V_4)=v_2$	
4	v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4, v_5, v_6, v_7\}$			
5	v_7	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_7\}$	$\{v_4, v_5, v_6, v_9\}$	$p(v_6)=4$ $p(v_9)=5$	$q(V_6)=v_7$ $q(V_9)=v_7$	
6	v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}$	$\{v_5, v_6, v_8, v_9\}$	$p(v_8)=6$	$q(V_8)=v_4$	
7	v_5	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5,$ $v_7\}$	$\{v_6, v_8, v_9\}$			
8	v_6	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5,$ $v_6, v_7\}$	$\{v_8, v_9\}$			
9	v_9	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5,$ $v_6, v_7, v_9\}$	$\{v_8\}$			
10	v_8	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5,$ $v_6, v_7, v_8, v_9\}$	\emptyset			

