フローとカット
Flow and Cut

ネットワーク中のフロー (流量、flow)

- 交通網中の流れ
  - 都市間を流れる車両の数、及びその上限
  - 都市間を結ぶ航空路線が輸送する人数とその上限
- 物流
  - 倉庫間を移動している商品の数とその上限
- 作業
  - 各工程間のコストとその上限

容量と流れ

- 各弧に容量（上限）が存在する
  - 交通機関の輸送能力
  - 通信速度
- 各弧に実際に流れる流量
  - 容量以下
- 二点間に最大流量を実現する方法？

2端子フロー

- グラフ ：$G = (V,A)$
- 入口 $s^+ \in V$ と出口 $s^- \in V$ が定義され、s^+ から s^- への有向道 P が存在する
- 各枝 $a \in A$ に流量の上限 ：$c(a) \geq 0$
  - 各枝の重みを上限 $c(a)$ として解釈
- 各枝 a の流量 (flow) : $\varphi(a)$

$$N = \left(G(V, A), s^+, s^-, c \right)$$

- 容量制約 $0 \le \varphi(a) \le c(a)$
- 流量保存則

$$\partial \varphi(v) \equiv \sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) = 0$$

$$(v \in V \setminus \{s^+, s^-\})$$

- ネットワークの流量

$$v^*(\varphi) = \partial \varphi(s^+) = -\partial \varphi(s^-)$$

カット(cut)

- ネットワークのカット $U \subseteq V$
  - $s^+ \in U,\ s^- \notin U$ となる点集合
- カットの容量
  - $\Delta^+ U$ は U から出て $U \backslash V$ へ入る弧の全体

$$\kappa_c(U) = \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a)$$

最大流量は最小カットに対応

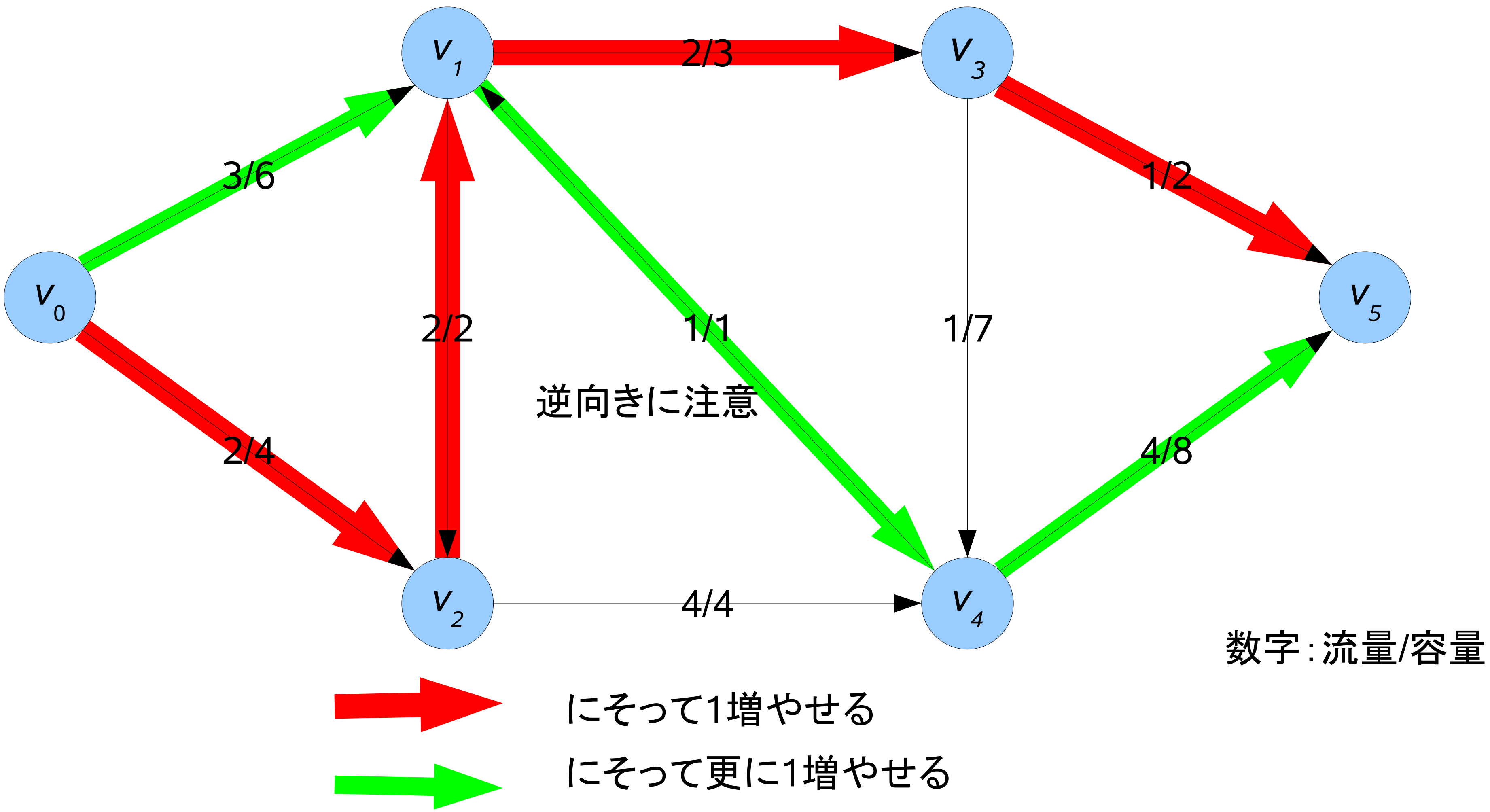
- N 中の任意のフロー φ と任意のカット U に対して次が成り立つ。

$$v^*(\varphi) \le \kappa_C(U)$$

- 証明
  - Δ^+U は $U \backslash V$ から出て U へ入る弧の全体

$$\begin{aligned} v^*(\varphi) &\le \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\ &\le \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} 0 \\ &= \kappa_C(U) \end{aligned}$$

最大フローを見付ける考え方



補助ネットワーク(Auxiliary Network)

$$N = \left(G_\varphi \left(V, A_\varphi \right), s^+, s^-, c_\varphi \right), \quad A_\varphi = A_\varphi^+ \cup A_\varphi^-$$

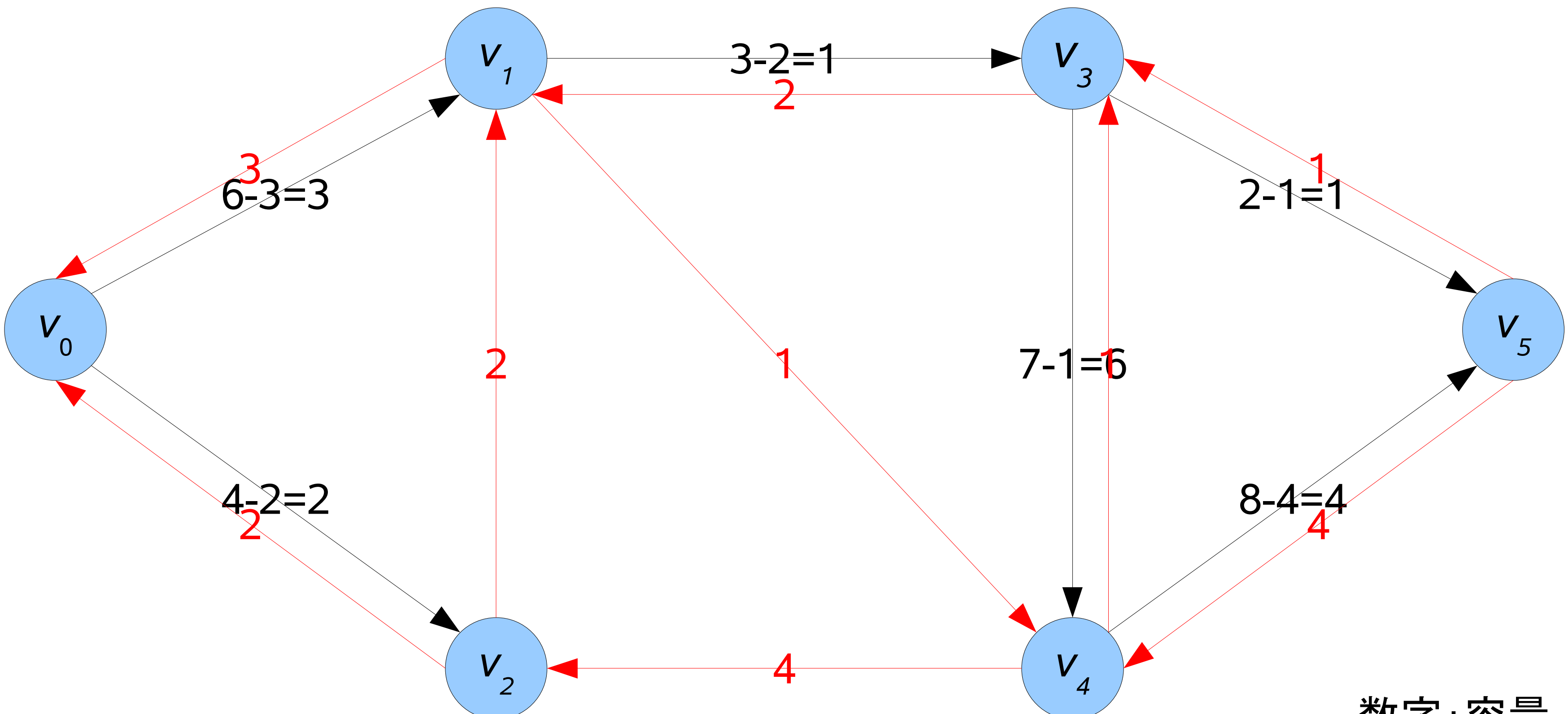
- 元のネットワークの弧 $a \in A$ に対して
- $\varphi(a) < c(a)$ ならば、a を A_φ^+ へ追加し、その容量を $c_\varphi(a) = c(a) - \varphi(a)$ とする
  - $\varphi(a) = c(a)$ である弧は A_φ^+ に含まれないことに注意

- $0 < \varphi(a)$ ならば、a の逆向きの弧 b を A_φ^- へ追加し、その容量を $c_\varphi(b) = \varphi(a)$ とする
  - 流量が 0 の弧だけが含まれないことに注意
  - 元のグラフと逆向きの弧であることに注意

補助ネットワーク

A^{+}_{φ}

A^{-}_{φ}



数字:容量

- 補助ネットワーク中の s^+ から s^- への有向道 P があれば、以下の d だけ流量を増加することができる。

$$d = \min\left\{ c_\varphi(a) \middle| a \in P \right\} > 0$$

- このときの補助ネットワーク中の新しい流量

$$\varphi'(a) = \begin{cases} \varphi(a) + d & \text{for} \quad a \in A_\varphi^+ \wedge a \in P \\ \varphi(a) - d & \text{for} \quad a \in A_\varphi^- \wedge a \in P \\ \varphi(a) & \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

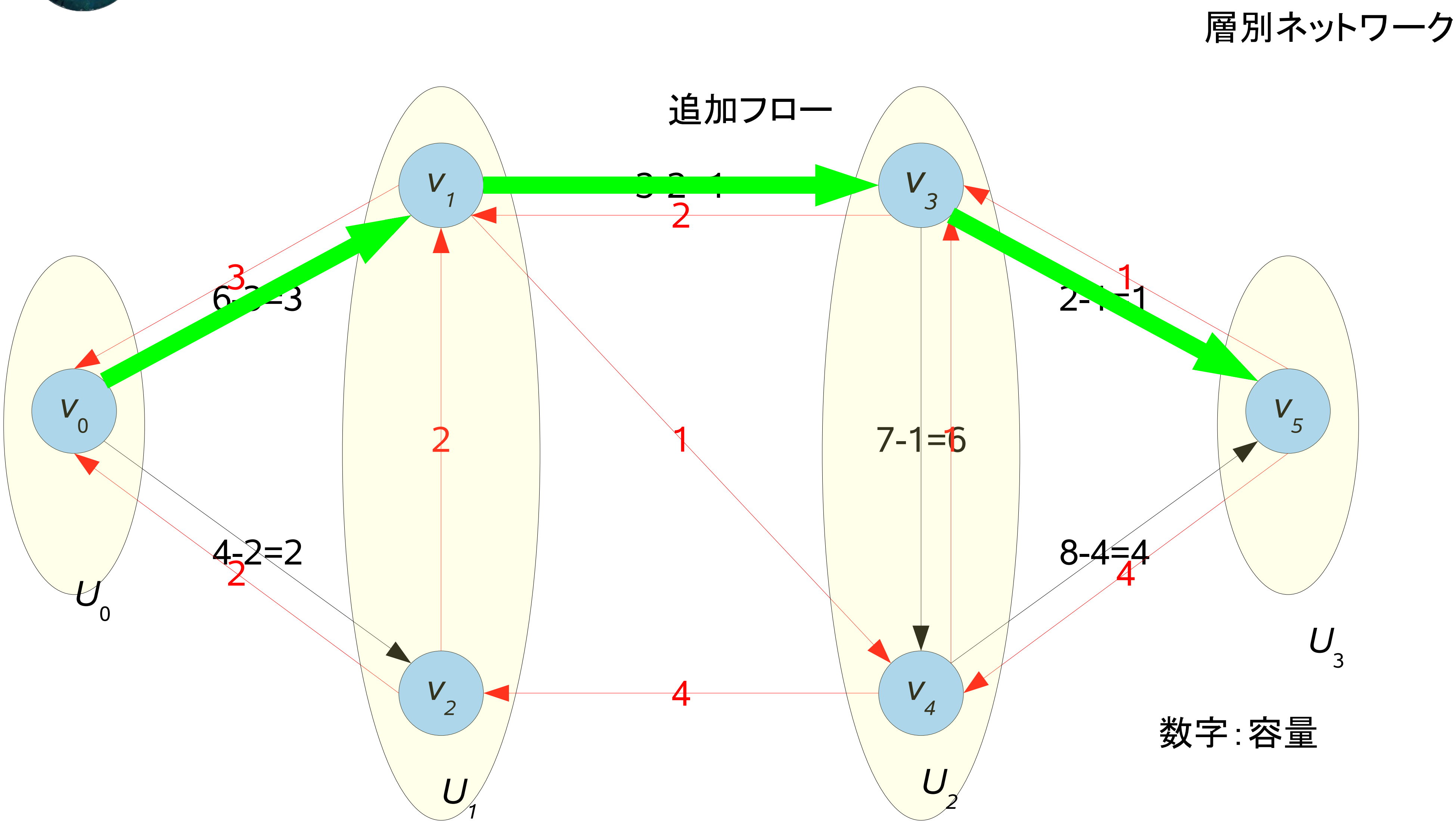
層別ネットワーク(Layered Network)

- 補助ネットワーク N_φ
- 始点 s^+ から最短で k 回で到達できる点の集合 U_k
  - 幅優先探索で作ることができる
  - U_k と U_{k+1} を結ぶ枝の集合 A_k
  - 終点 s^- に l 回で到達

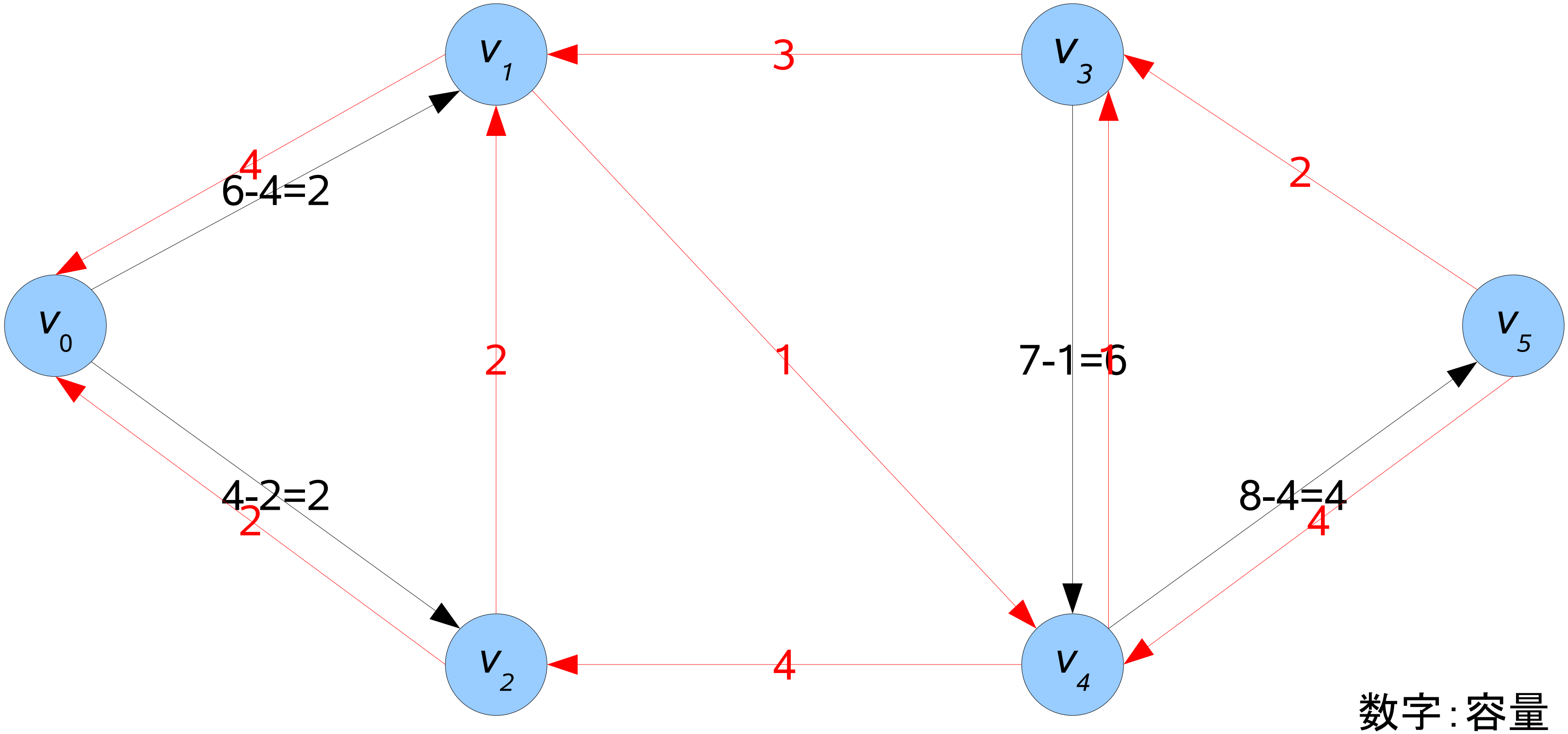
$$\tilde{N}_\varphi\left(\tilde{G}_\varphi(\tilde{V}_\varphi, \tilde{A}_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi\right)$$

$$\tilde{A}_\varphi = \bigcup_{k=0}^{l-1} A_k, \tilde{V}_\varphi = \bigcup_{k=0}^{l} U_k$$

補助ネットワークの活用

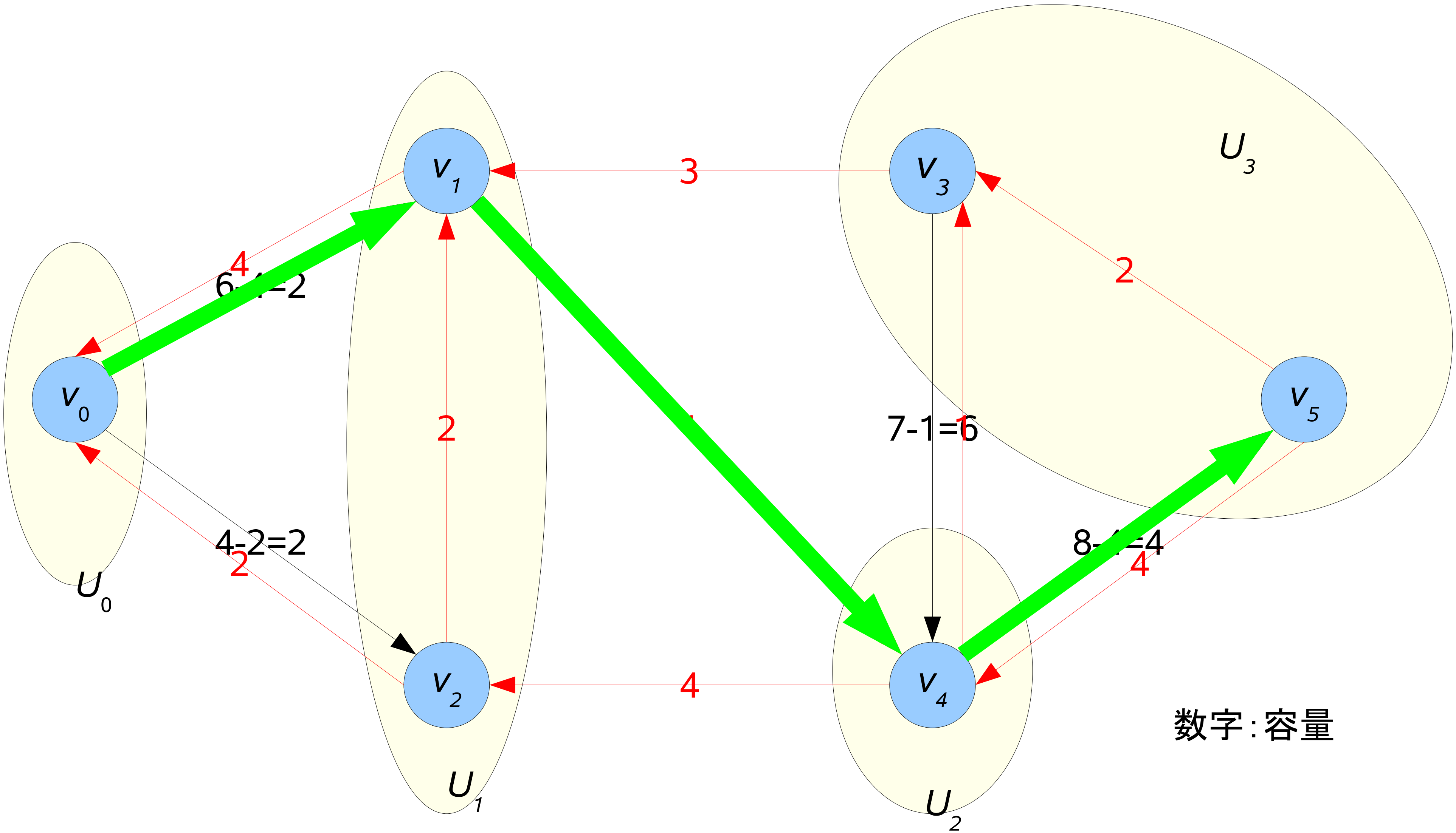


更新した補助ネットワーク

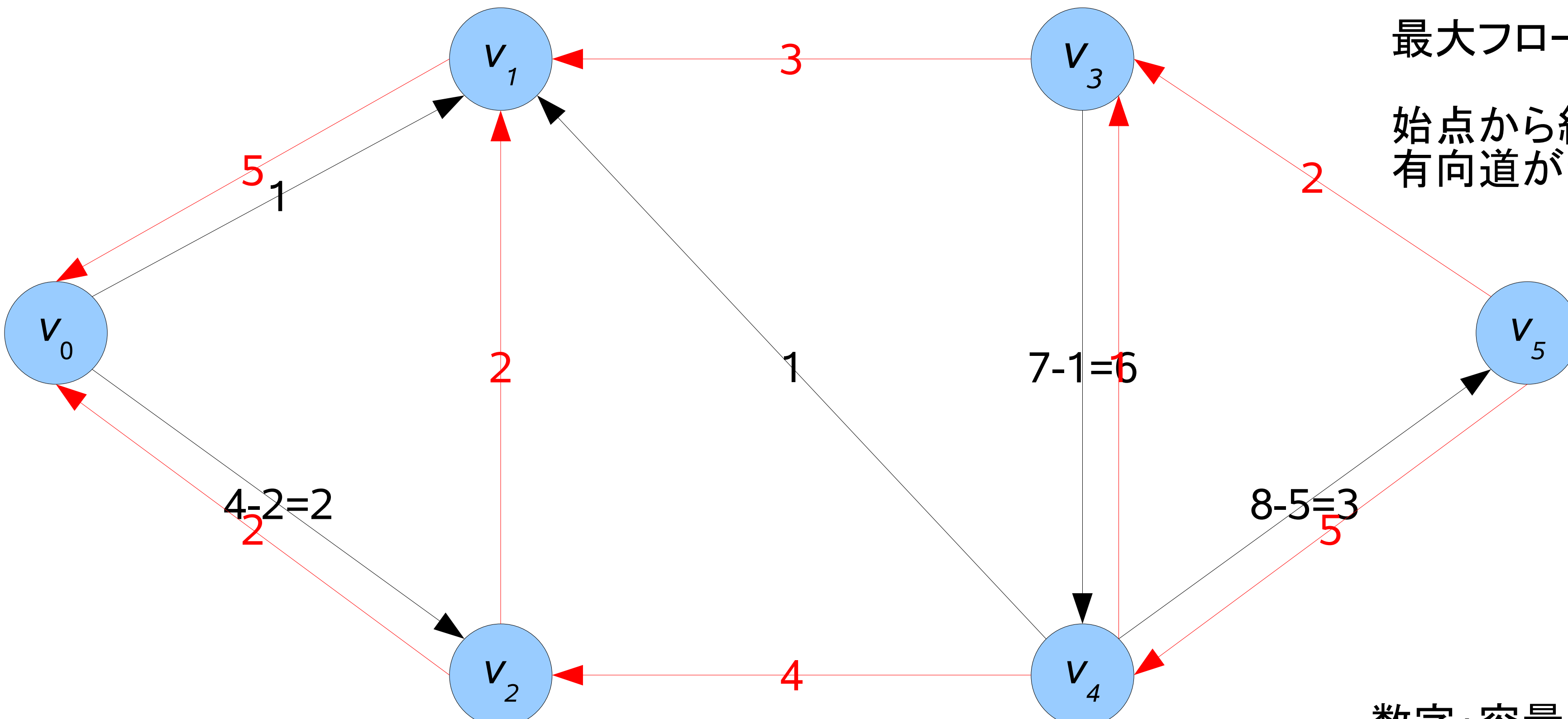


数字：容量

更新した補助ネットワーク



再度更新した補助ネットワーク



最大フローが実現

始点から終点への
有向道が無い

数字：容量

Dinitzのアルゴリズム

$\varphi \leftarrow 0$
補助ネットワーク N_φ を作る
while(N_φ に始点 s^+ から終点 s^- への有向道 P がある){
　　N_φ の層別ネットワーク $\tilde{N}_\varphi$ を作る
　　$\tilde{N}_\varphi$ の極大フロー $\tilde{\varphi}$ を求める
　　φ に $\tilde{\varphi}$ を重ね合わせる
　　補助ネットワーク N_φ を作る
}

コードとしての実装

- ちょっと大変
  - 与えられたネットワークから補助ネットワークを作る
  - 補助ネットワークから層別ネットワークを作る
  - 層別ネットワーク内の始点から終点への道を計算し、流量の増分を計算