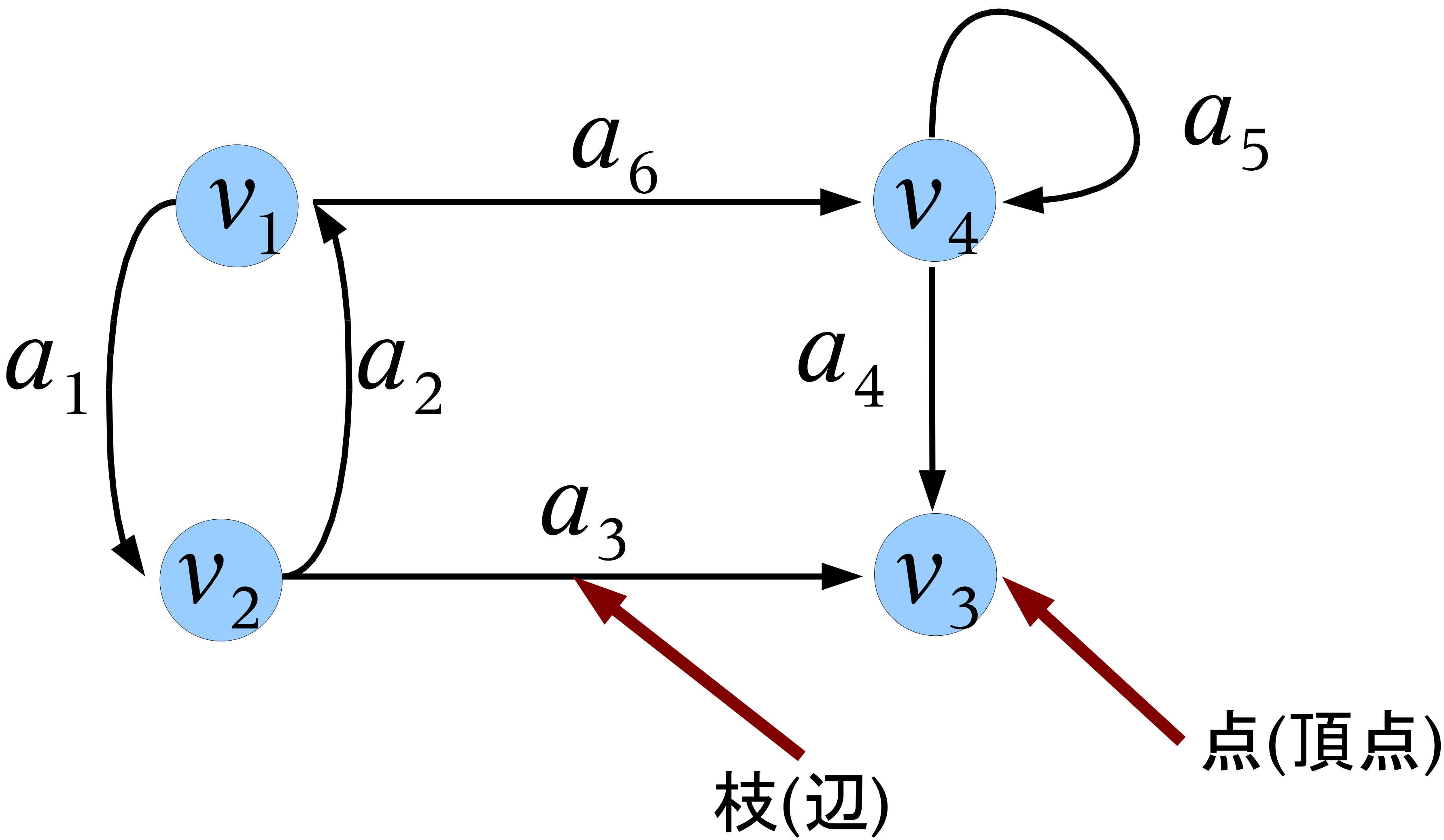
グラフを記述する

グラフの要素



グラフの定義

- 点(頂点)の集合 V : Vertex, Node
- 枝(辺)の集合 A : Arc, Edge
- 枝からその始点への写像 $\partial^{+} : A \to V$
- 枝からその終点への写像 $\partial^{-} : A \to V$

$$G = \left(V , A , \partial^{+} , \partial^{-} \right)$$

例1

$$V=\{v_{1,}v_{2,}v_{3,}v_{4}\}$$

$$A=\{a_{1,}a_{2,}a_{3,}a_{4,}a_{5,}a_{6}\}$$

$$\partial^{+}a_1=v_{1,}\quad \partial^{-}a_1=v_2$$

$$\partial^{+}a_2=v_{2,}\quad \partial^{-}a_2=v_1$$

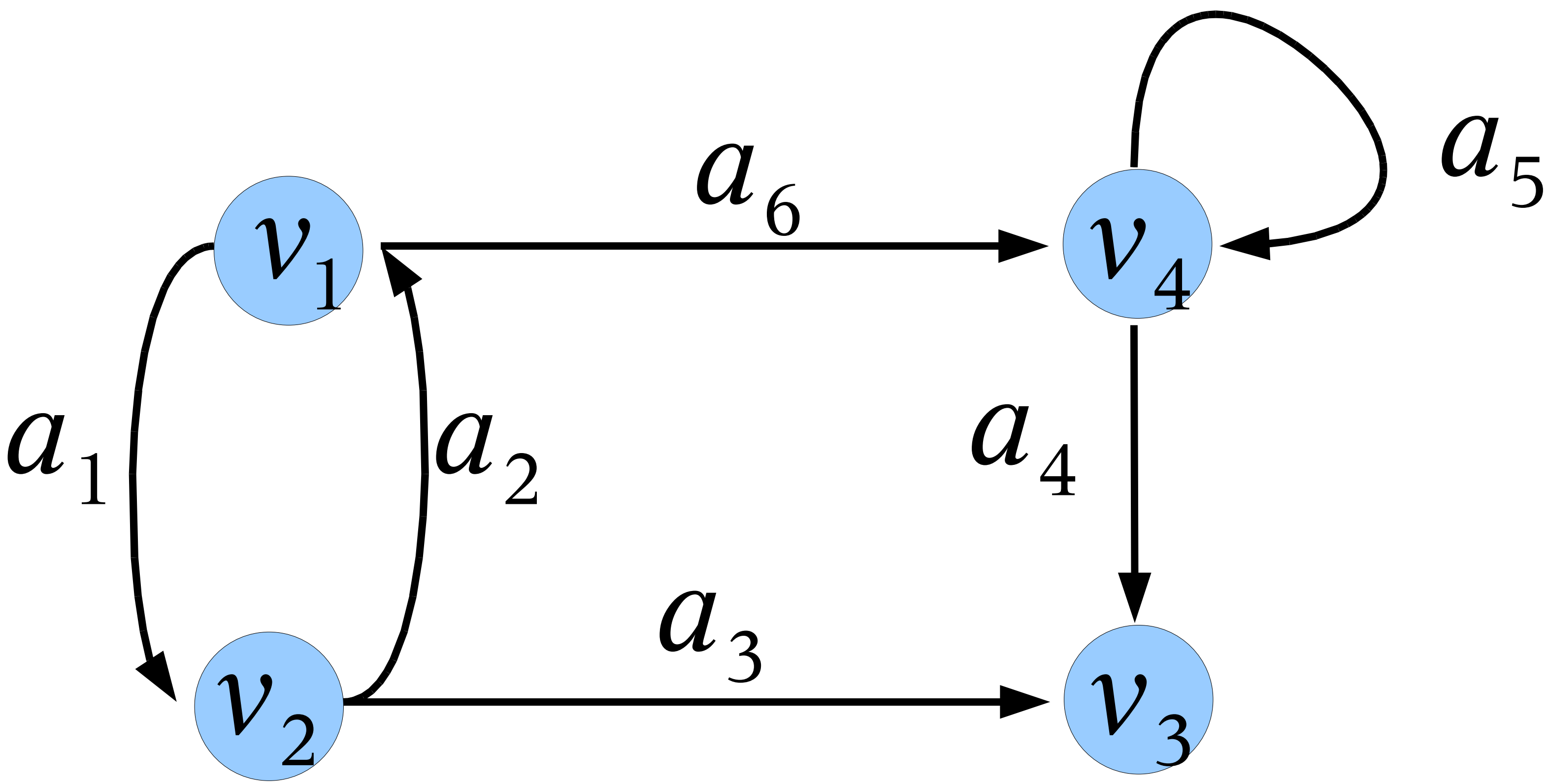
$$\partial^{+}a_3=v_{2,}\quad \partial^{-}a_3=v_3$$

$$\partial^{+}a_4=v_{4,}\quad \partial^{-}a_4=v_3$$

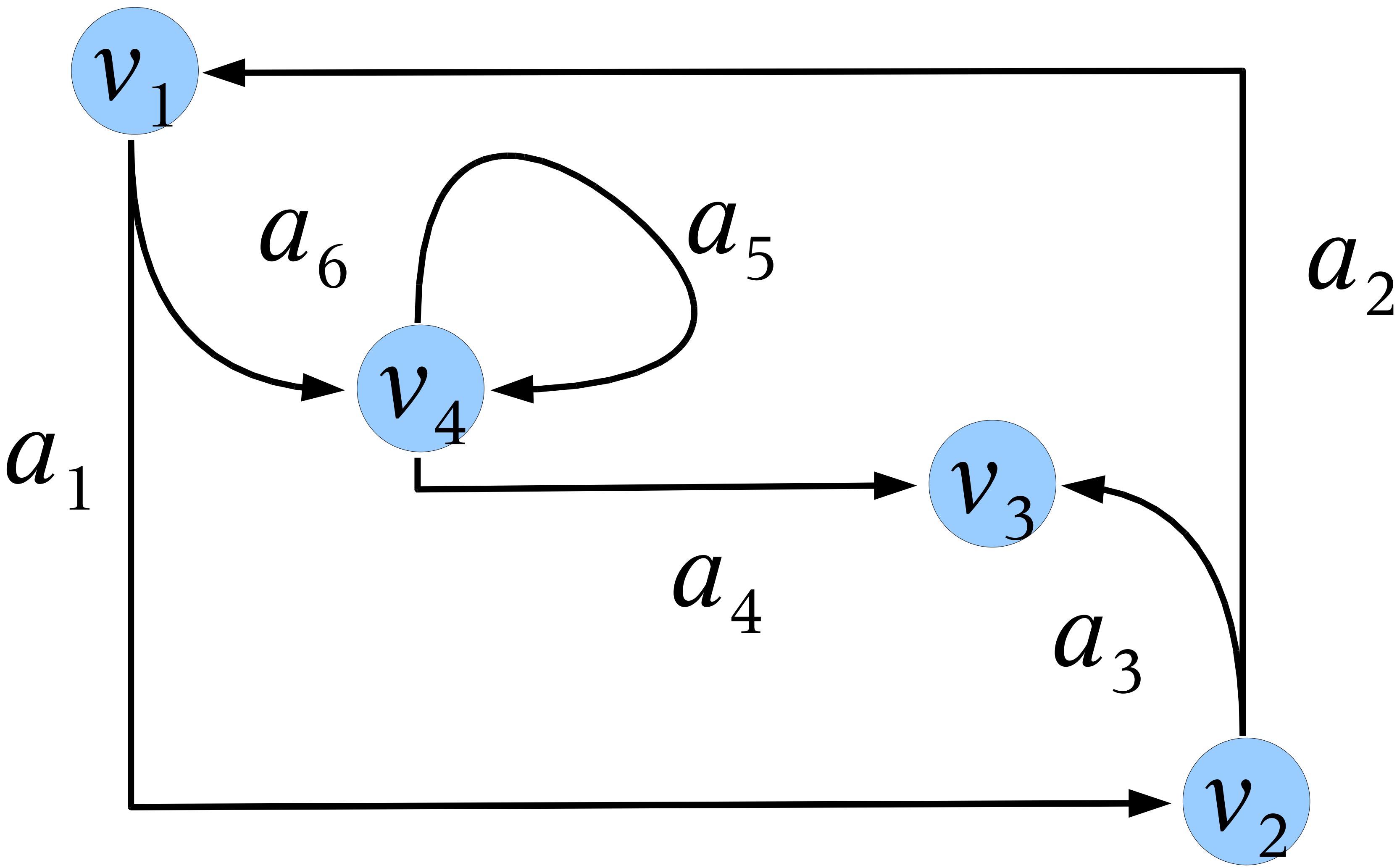
$$\partial^{+}a_5=v_{4,}\quad \partial^{-}a_5=v_4$$

$$\partial^{+}a_6=v_{1,}\quad \partial^{-}a_6=v_4$$

グラフの要素



別の幾何学的表示も可能

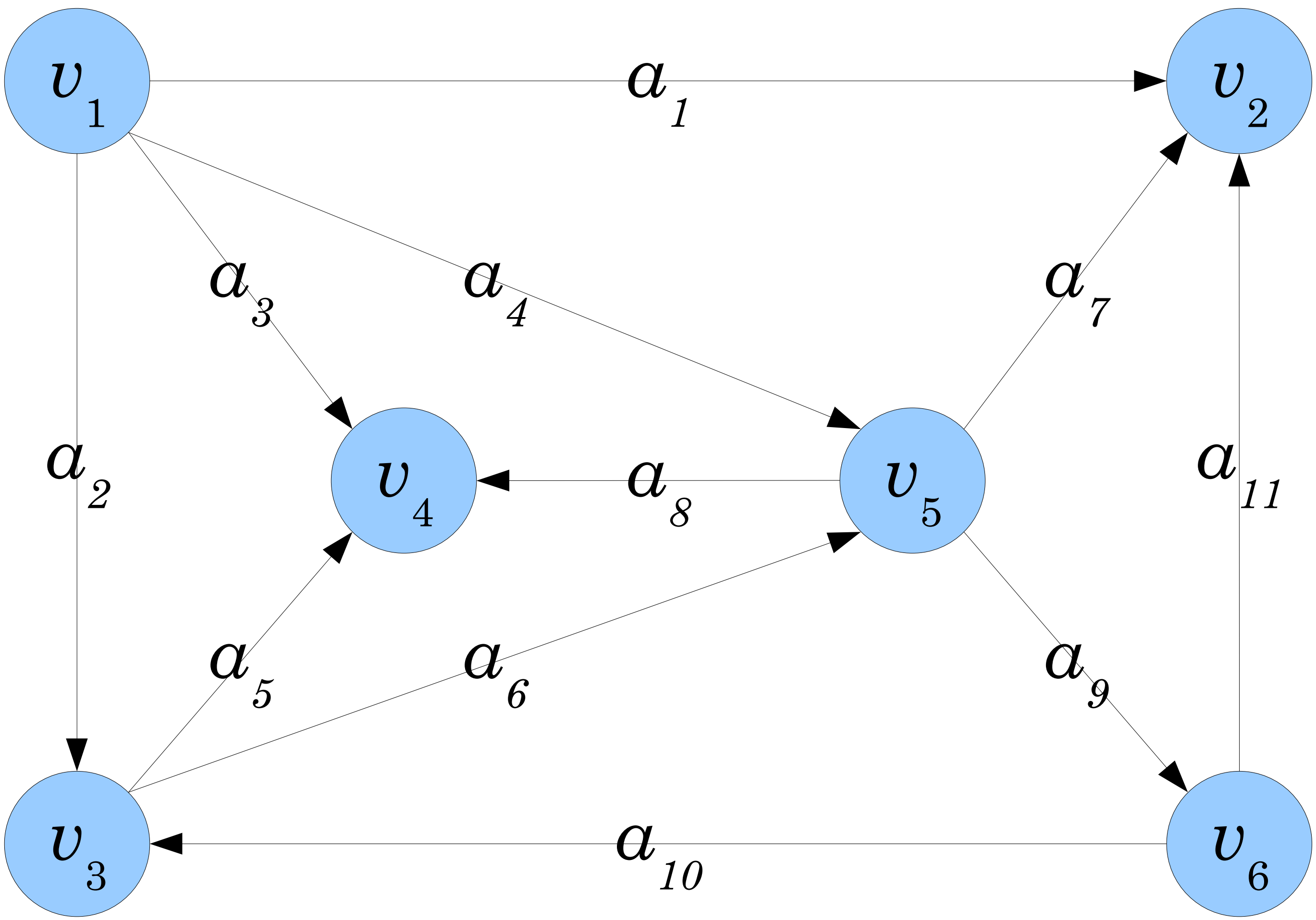


例2

$$V=\{v_{1,}\ v_{2,}\ v_{3,}\ v_{4,}\ v_{5,}\ v_6\}$$

$$A=\{a_{1,}\ a_{2,}\ a_{3,}\ a_{4,}\ a_{5,}\ a_{6,}\ a_{7,}\ a_{8,}\ a_{9,}\ a_{10},\ a_{11}\}$$

$$\partial^+ a_1=v_{1,}\quad \partial^- a_1=v_2$$
$$\partial^+ a_2=v_{1,}\quad \partial^- a_2=v_3$$
$$\partial^+ a_3=v_{1,}\quad \partial^- a_3=v_4$$
$$\partial^+ a_4=v_{1,}\quad \partial^- a_4=v_5$$
$$\partial^+ a_5=v_{3,}\quad \partial^- a_5=v_4$$
$$\partial^+ a_6=v_{3,}\quad \partial^- a_5=v_5$$
$$\partial^+ a_7=v_{5,}\quad \partial^- a_5=v_2$$
$$\partial^+ a_8=v_{5,}\quad \partial^- a_5=v_4$$
$$\partial^+ a_9=v_{5,}\quad \partial^- a_5=v_6$$
$$\partial^+ a_{10}=v_{6,}\quad \partial^- a_5=v_3$$
$$\partial^+ a_{11}=v_{6,}\quad \partial^- a_5=v_2$$

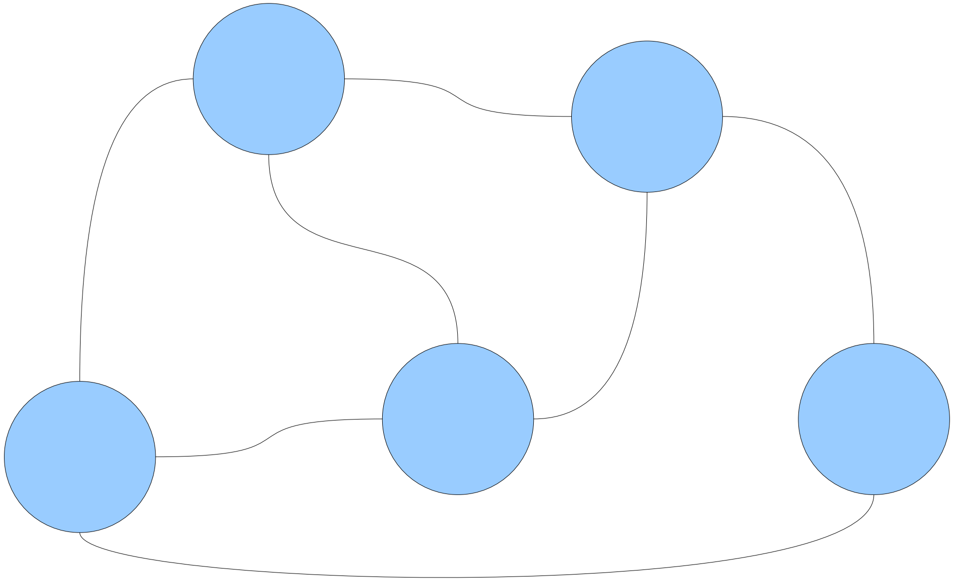


v_1
a_1
v_2
a_3
a_4
a_7
a_2
v_4
a_8
v_5
a_{11}
a_5
a_6
a_9
v_3
a_{10}
v_6

- グラフの幾何学的表現 (Geometrical Representation)
  - 唯一ではない
  - 線の継り具合が問題
  - トポロジー (Topology) を問題にする
- 同形(Isomorphic)なグラフ
  - 点や弧の名前の付替で同じになるグラフ

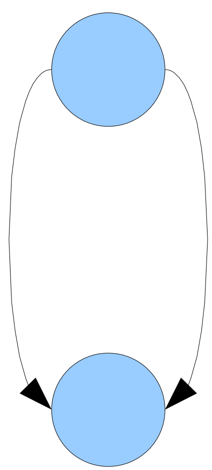
有向グラフと無向グラフ

- 有向グラフ (directed graph)
  - 枝に向きがある
- 無向グラフ (undirected graph)
  - 枝に向きが無い

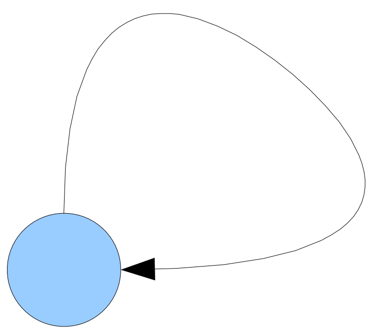


並列枝と孤立枝

- 並列枝 (parallel arcs)



- 孤立枝

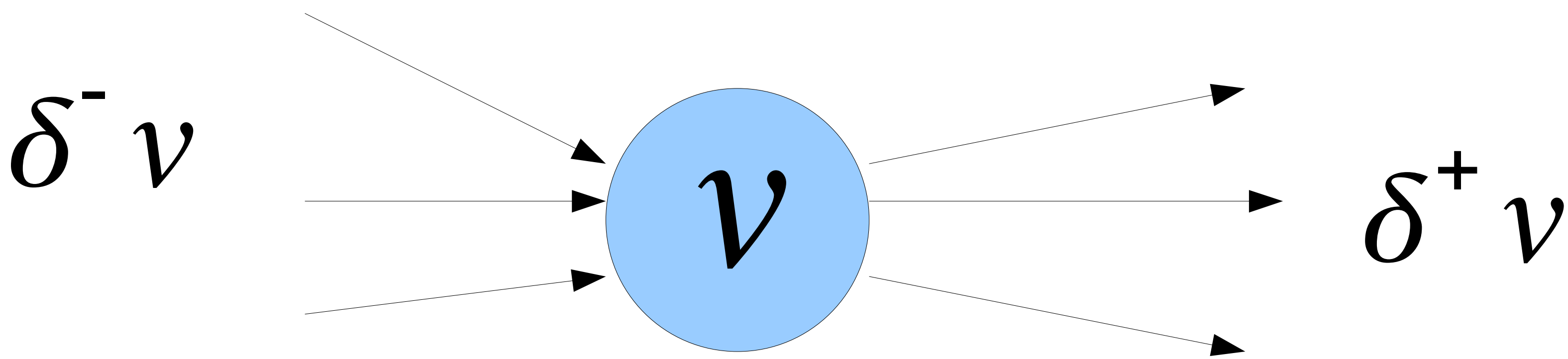


- 単純な(simple)グラフ
  - 並列枝と孤立枝が無いグラフ

次数 (degree)

- 点 v から出る枝の全体 $\delta^+ v = \{a \mid v = \partial^+ a\}$
- 点 v の正の次数：点 v から出る枝の数 $|\delta^+ v|$
- 点 v に入る枝の全体 $\delta^- v = \{a \mid v = \partial^- a\}$
- 点 v の負の次数：点 v に入る枝の数 $|\delta^- v|$

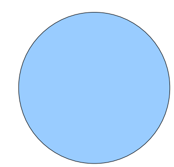
次数 (degree)



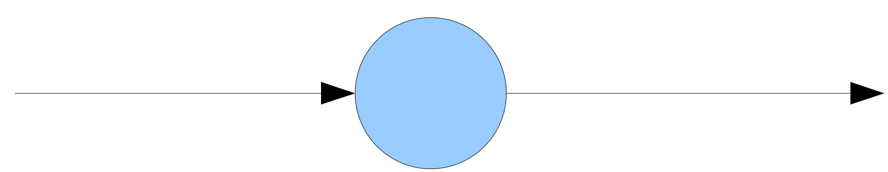
Negative Degree
In-degree

Positive Degree
Out-degree

- 次数　$k_v = \left|\delta^+ v\right| + \left|\delta^- v\right|$
  - 点に接続している枝の総数
- 孤立点：次数0の点



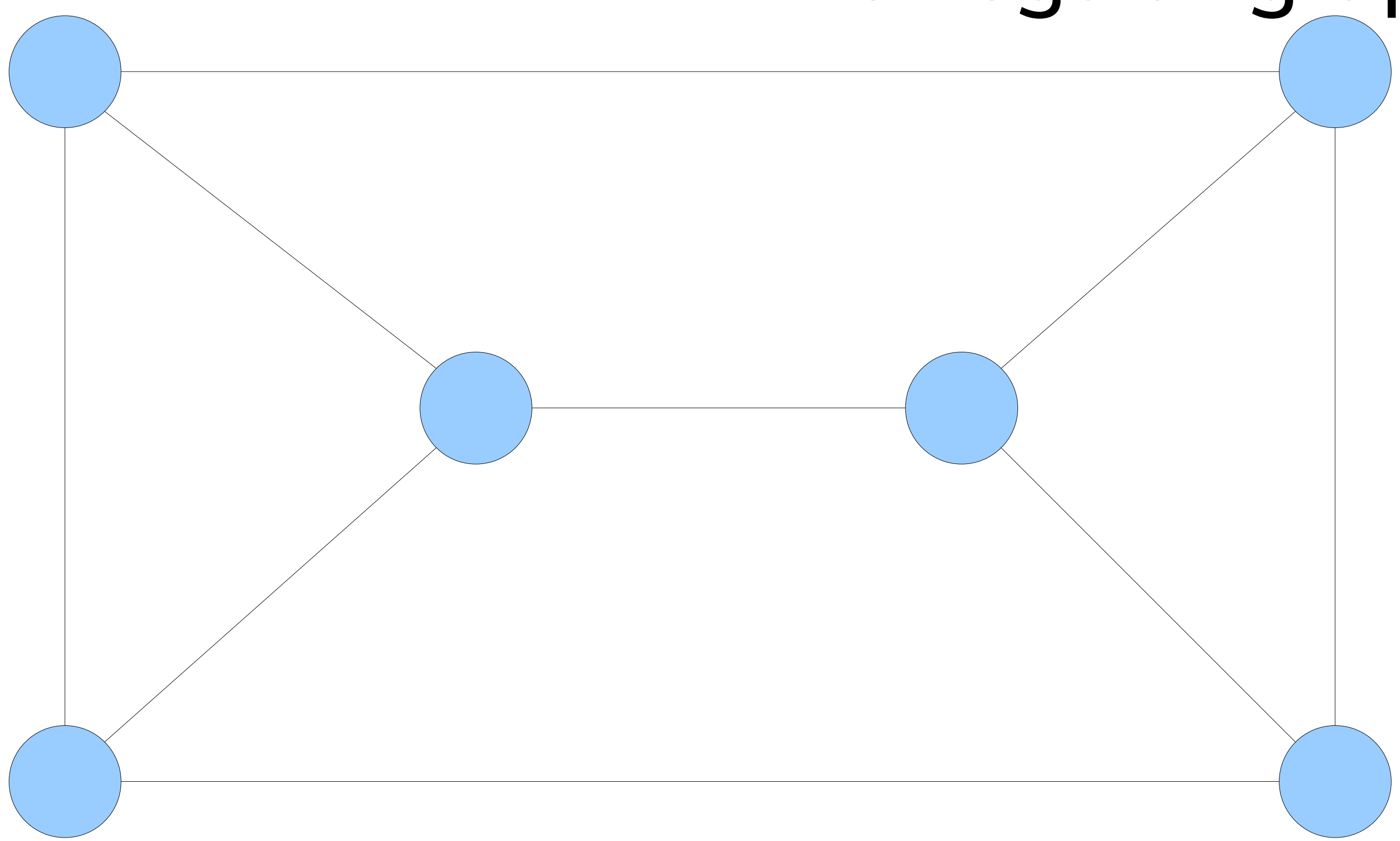
- 直列枝：次数2の点に接続する枝



正則グラフ(regular graph)

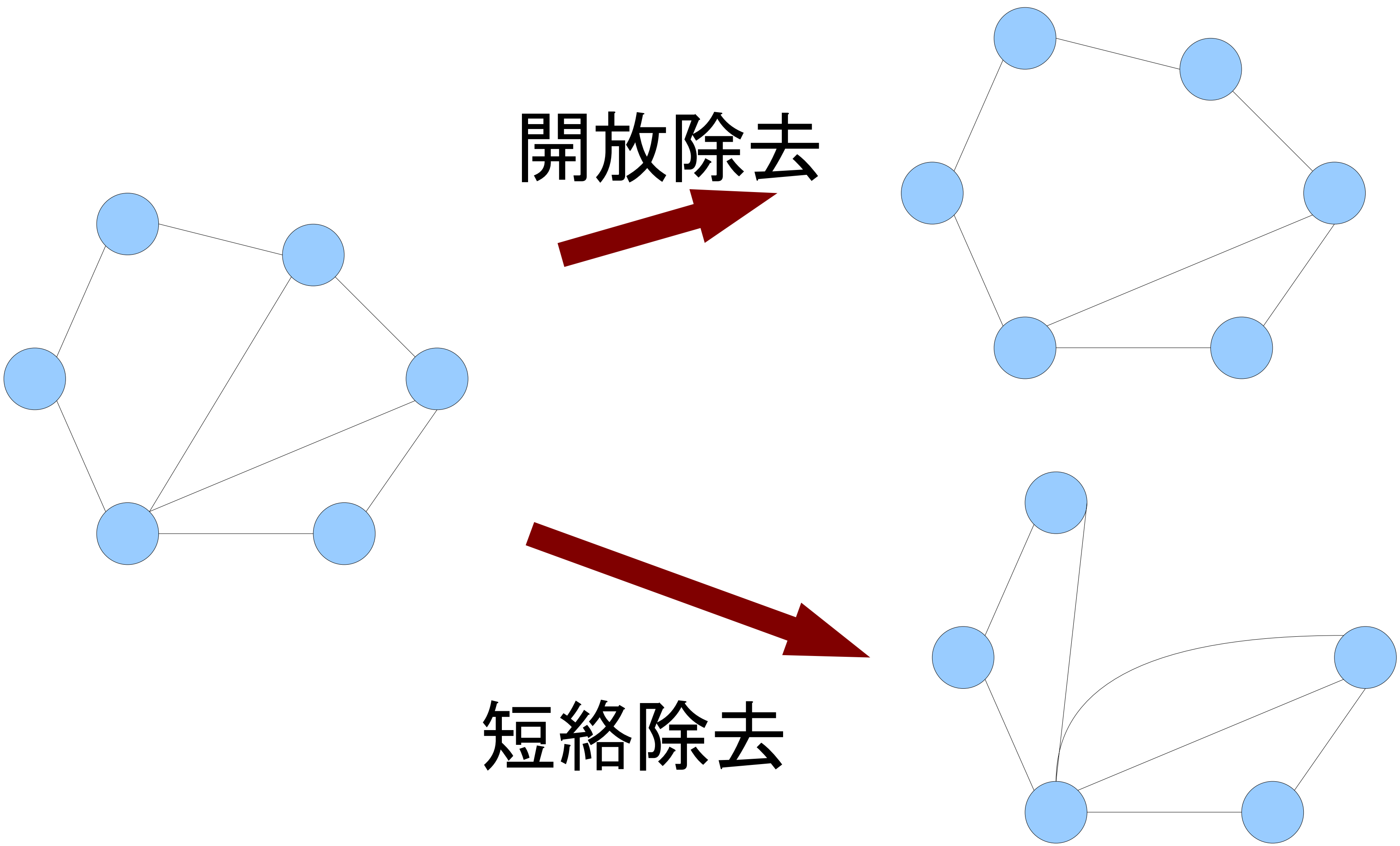
- 全ての点の次数が等しいグラフ

3-regular graph



枝の除去

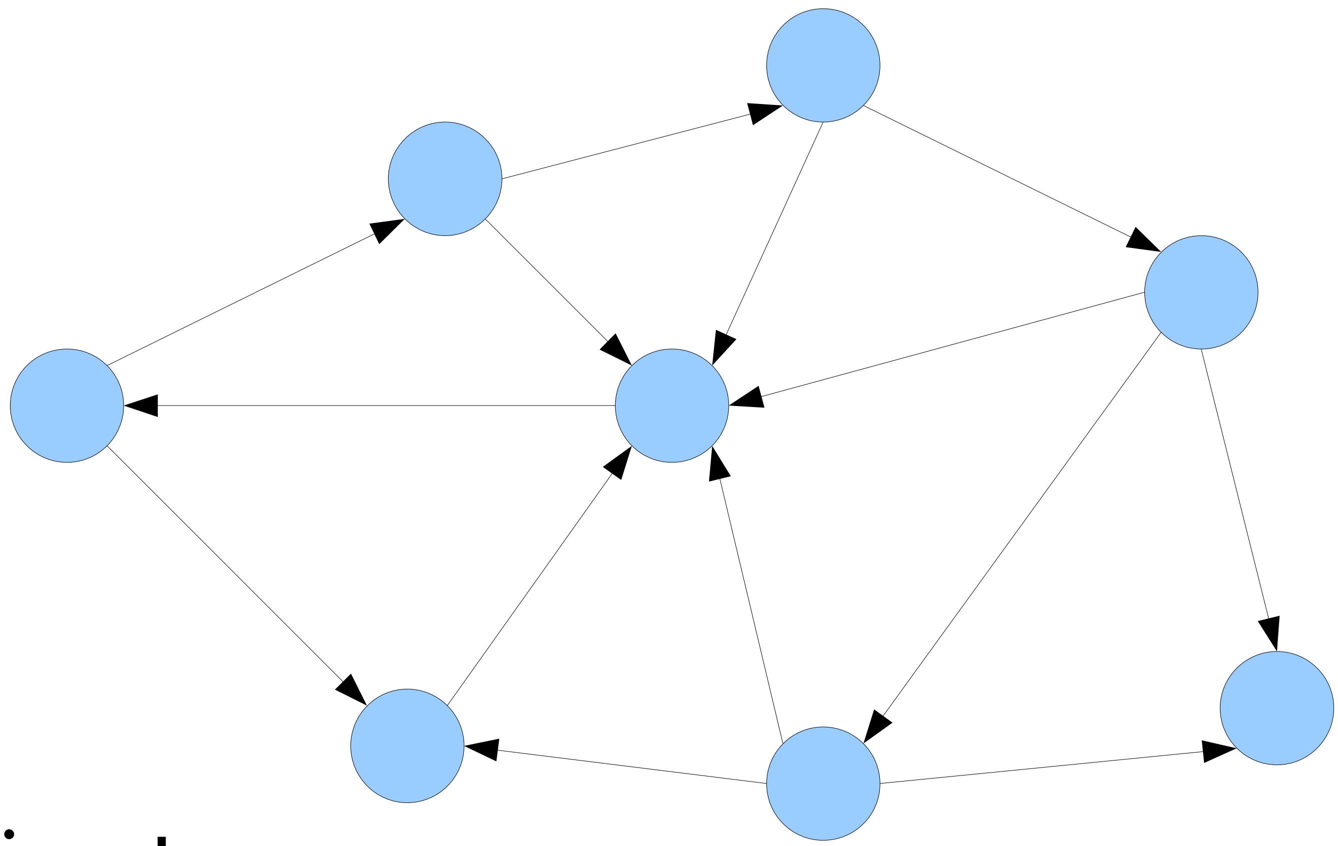
- 開放除去(open-circuit, delete)
  - 単に枝を除去する
- 短絡除去(short-circuit, contract)
  - 除去した枝の両端の点を一つにする


開放除去
短絡除去

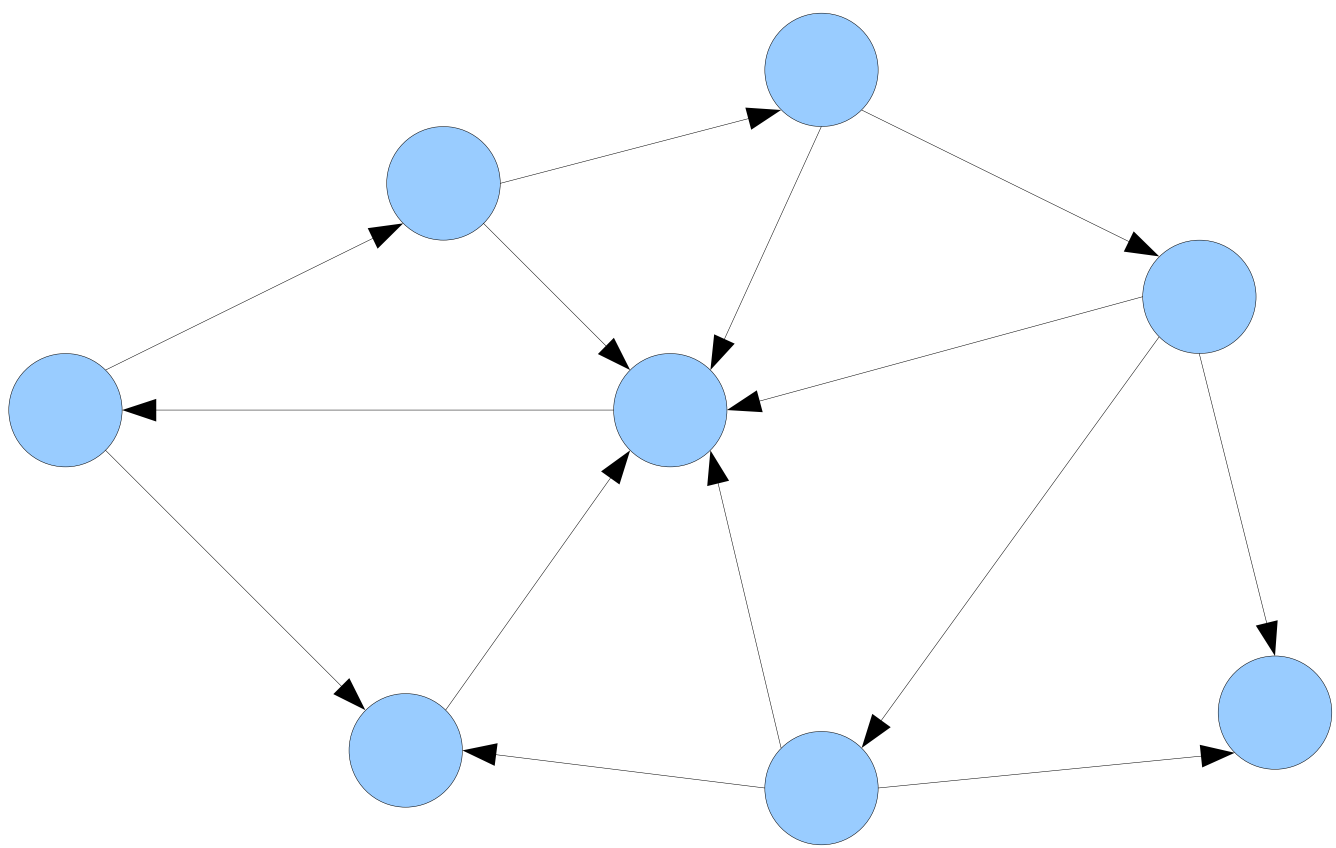
部分グラフ (Sub-graph)

- グラフGのうち、点及び枝の一部から構成されるグラフをGの部分グラフと呼ぶ
  - グラフGからいくつかの枝を開放除去する
  - いくつかの孤立点を除去する

- Gの全域部分グラフ(spanning sub-graph)
  - G と同じ点集合を持つ G の部分グラフ H
- G の誘導部分グラフ (induced sub-graph)
  - G の点 V の部分集合 U に対して、両端点がUに属する枝の全体集合を $A(U)$ とするとき、Uと$A(U)$ からなるグラフ。



Spanning tree



Induced sub-graph