最短経路問題

最短経路問題とは

- 有向ネットワーク
  - 各弧に距離(実数)が定義されている
- 始点から終点までの最短有向道を見つける

ポテンシャル $p{:}V \to R$

- 一般には、各頂点に定義された実数値
- 始点からの「高さ」(距離)をイメージする
- 経路のよらずに定まるはず

関数 $l_p : A \to R$ を定義 $a \in A$

- $l(a)$：弧aの長さ
- $p(\partial^{\pm} a)$：弧の始点(終点)のポテンシャル

$$l_p(a) = l(a) + p\left(\partial^{+} a\right) - p\left(\partial^{-} a\right)$$

有向道にそって拡張

- u から v へ向かう有向道 P に対して以下が成り立つ

$$l_p(P) = l(P) + p(u) - p(v)$$

$$l_p(P) \equiv \sum_{i=1}^{k} l_p(a_i)$$

$$l(P) \equiv \sum_{i=1}^{k} l(a_i)$$

- 有向道 $P=\{u=v_0,a_1,v_1,a_2,\ldots,a_k,v_k=v\}$ とする

$$l_p\left(P\right)=\sum_{i=1}^{k} l_p(a_i)=\sum_{i=1}^{k}\left[l(a_i)+p\left(v_{i-1}\right)-p\left(v_i\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k} l(a_i)+p(u)-p(v)$$

$$=l\left(P\right)+p(u)-p(v)$$

- 関数 $l_p : A \to R$ が非負関数であり、P 上の各弧 a に対して $l_p(a) = 0$ とき
- P は u から v への最短経路

- なぜなら

$$l(P) = p(v) - p(u) + l_p(P) \geq p(v) - p(u)$$

- このようなポテンシャルを見付けることが問題となる

ダイクストラ(Dijkstra)法

- $l(a) \geq 0$ の場合を考える
- グラフ G は単純(並列弧が無い)

- $U \subseteq V$: 始点 v_0 からの有向道が見つかっているが、距離の確定していない点の集合
- $W \subseteq V$: 始点 v_0 からの有向道が見つかり、距離が確定した点の集合
- $p(v) \in \mathrm{R}$: 始点 v_0 から v への距離
- $q(v) \in V$: 最短路を逆にたどった時の、v の前の点

Dijkstra法：初期化

$$U = \{v_0\}$$

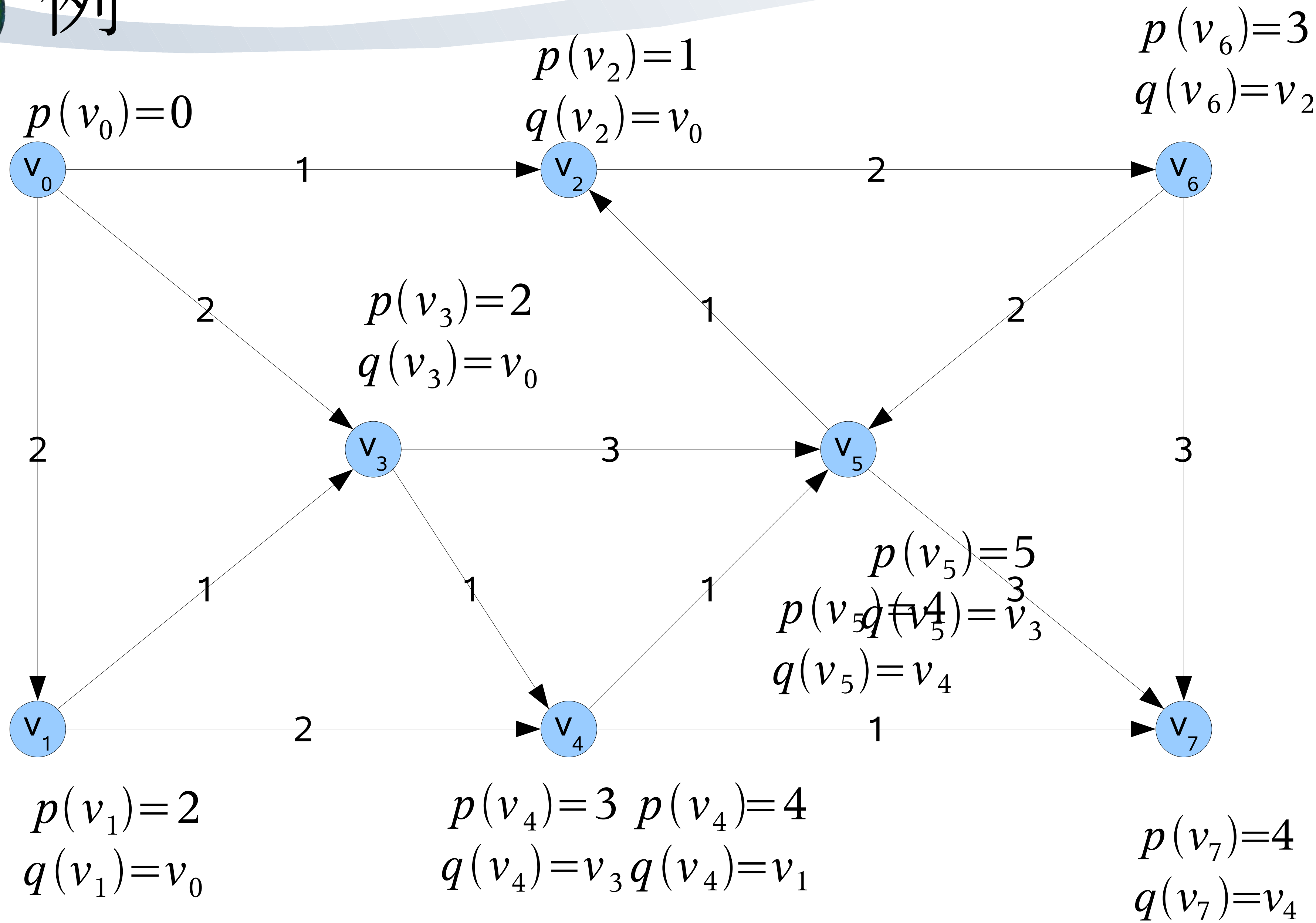
$$W = \emptyset$$

$$p(v_0) = 0$$

$$p(u) = +\infty \left(u \in V \setminus \{v_0\}\right)$$

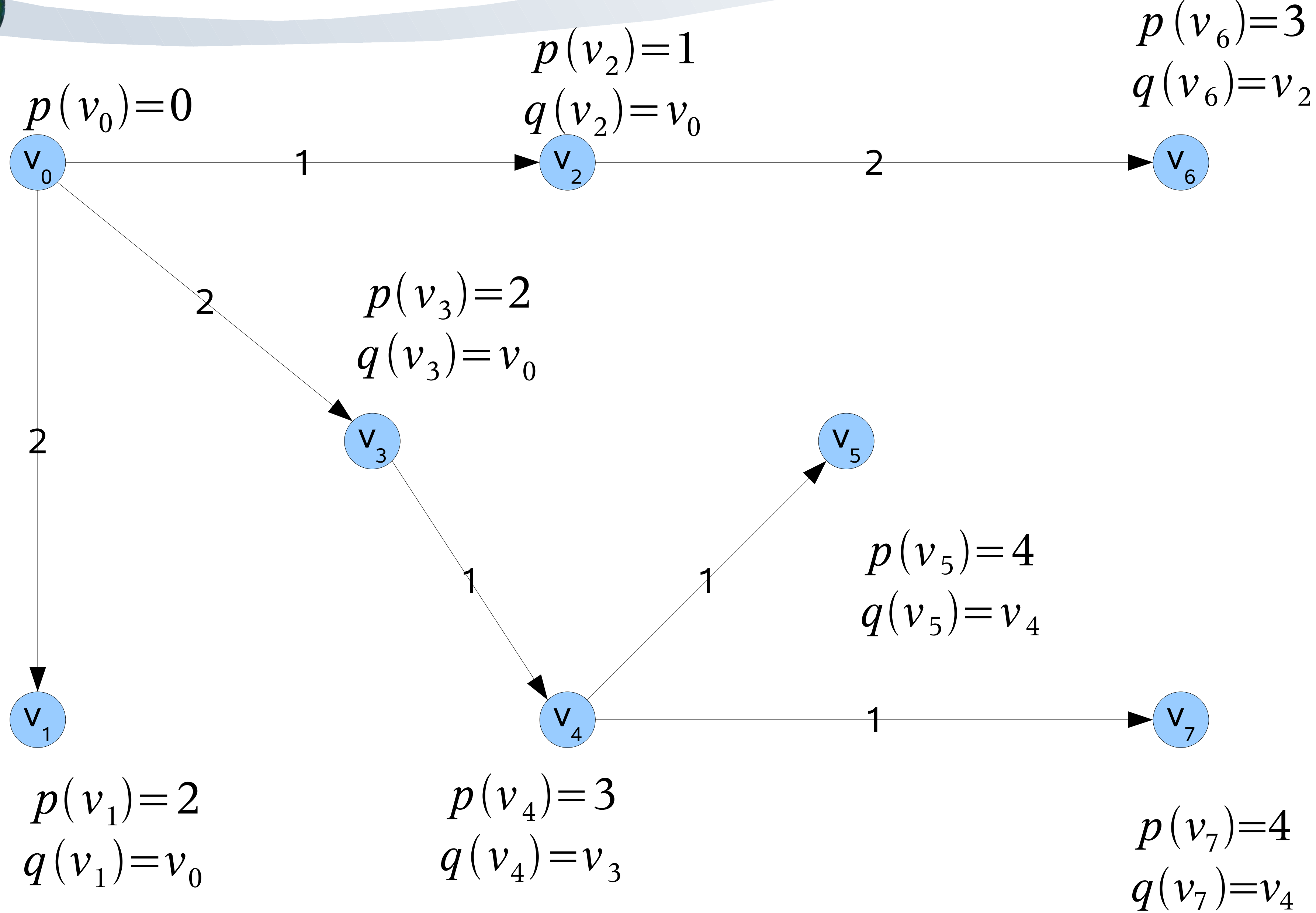
```
while( U≠∅ ){
    p(w) が最小となる w∈U を見つける
    forall ( a∈δ⁺w ){
        x=∂⁻a
        if ( x∉W ){
            if( p(x)>p(w)+l(a) ){
                q(x)←w
                p(x)←p(w)+l(a)
                U←U∪{x}
            }
        }
    }
    W←W∪{w}
    U←U\{w}
}
```

例



$p(v_0)=0$
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_6)=3$
$q(v_6)=v_2$
$p(v_3)=2$
$q(v_3)=v_0$
$p(v_5)=5$
$q(v_5)=v_3$
$p(v_5)=4$
$q(v_5)=v_4$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=3$
$q(v_4)=v_3$
$p(v_4)=4$
$q(v_4)=v_1$
$p(v_7)=4$
$q(v_7)=v_4$
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
3
1
2
1
1
1
3
3
2
1

手順	注目している頂点	W	U	p	q	更新を受けた手順
0		$\emptyset$	$\{v_0\}$	$p(v_0)=0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$	$p(v_1)=2$	$q(v_1)=v_0$	
				$p(v_2)=1$	$q(v_2)=v_0$	
				$p(v_2)=2$	$q(v_3)=v_0$	
2	v_2	$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3, v_6\}$	$p(v_6)=3$	$q(v_6)=v_2$	
3	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4, v_6\}$	$p(v_4)=4$	$q(v_4)=v_1$	4
4	v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4, v_5, v_6\}$	$p(v_4)=3$	$q(v_4)=v_3$	
				$p(v_5)=5$	$q(v_5)=v_3$	5
5	v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{v_5, v_6, v_7\}$	$p(v_5)=4$	$q(v_5)=v_4$	
				$p(v_7)=4$	$q(v_7)=v_4$	
6	v_6	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$	$\{v_5, v_7\}$			
7	v_7	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}$	$\{v_5\}$			
8	v_5	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$	$\emptyset$			


$p(v_0)=0$
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_6)=3$
$q(v_6)=v_2$
$p(v_3)=2$
$q(v_3)=v_0$
$p(v_5)=4$
$q(v_5)=v_4$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=3$
$q(v_4)=v_3$
$p(v_7)=4$
$q(v_7)=v_4$
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
1
1
1

Dijkstra法の妥当性：補題1

- Dijkstra法の実行に伴って点が $v_0, v_1, v_2, \ldots$ の順で W に登録されるとする。
- このとき以下が成り立つ。

$$0 \le p(v_0) \le p(v_1) \le \ldots \le p(v_i) \le p(v_{i+1}) \le \ldots$$

- 始点からの距離の小さい順に W に登録される。

補題1証明

- Dijkstra法実行中に以下が成り立つ

$$\max\left\{ p(u) \middle| u \in W \right\} \leq \min\left\{ p(u) \middle| u \in V \setminus W \right\}$$

補題1証明

- 一回目のwhileループ実行後：自明
  - $W = \{v_0\},\ p(v_0) = 0$
- あるステップで上記関係が成り立つと仮定
  - 次に選ばれる$w \in U \subseteq V \backslash W$ (p を更新する前)

$$\max\left\{ p(u) \middle| u \in W \right\} \le p(w) \le \min\left\{ p(u) \middle| u \in V \setminus \left(W \cup \{w\} \right) \right\}$$

  - 更新後

$$\max\left\{ p(u) \middle| u \in W \right\} \le \min\left\{ p(u) \middle| u \in V \setminus W \right\}$$

Dijkstra法の妥当性：補題2

- W に始点を持つ G の枝の集合 δ^+W
  - $G_W = (W \cup U, \delta^+W)$上で
    - $l_p(a) \geq 0 \ \ (a \in \delta^+W)$
    - $l_p(q(u),u) = 0 \ \ (u \in (W \cup U) \setminus \{v_0\})$
  - 全ての$u \in (W \cup U) \setminus \{v_0\}$に対して定まる枝 $(q(u),u)$ は v_0 を根とする有向木である。

補題2証明

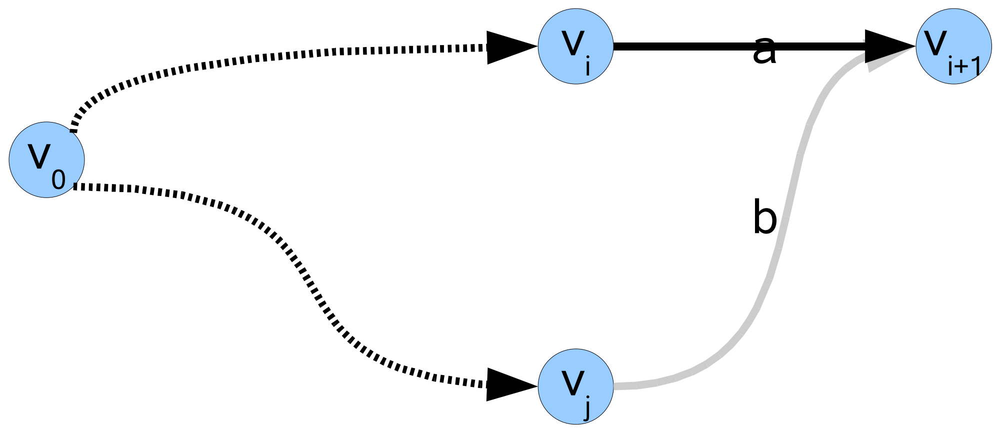
- Dijkstra法から明らか
  - $a \in \delta^+ W$に対して

$$p(\partial^- a) \leq p(\partial^+ a) + l(a)$$
$$\rightarrow \ l_p(a) = l(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) \geq 0$$

  - $u \in U$に対して

$$p(u) = p(q(u)) + l(q(u), u)$$
$$\rightarrow \ l_p(q(u), u) = l(q(u), u) + p(q(u)) - p(u) = 0$$

補題2証明



$$l_p(a)=l(a)+p(v_i)-p(p_{i+1})=0$$
$$l_p(b)=l(b)+p(v_j)-p(p_{i+1})\geq 0$$

補題2証明

- 補題1より、W の要素は順序付けられている
  - $q(v_i) = v_j$とすると $j < i$ である。