

「グラフと組合せ」試験問題

2010 年度

1 数学的帰納法

任意の自然数 N に対して、以下の恒等式が成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

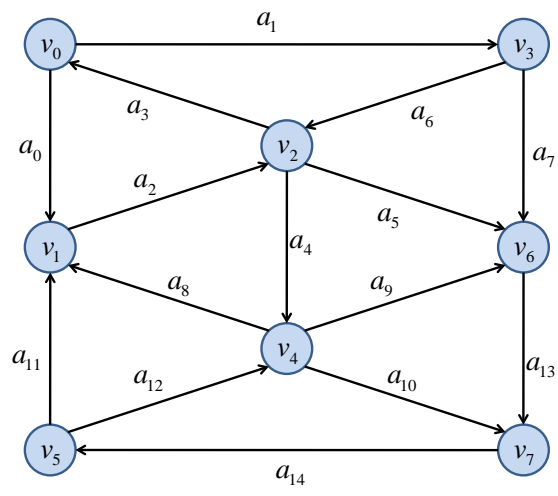
$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) \quad (1.1)$$

2 深さ優先探索

有向グラフ $G=(V,A)$ に対する、深さ優先探索 (Depth-First Search) のアルゴリズムを以下に示す。ただし、頂点 $v \in V$ を始点とする弧の集合を δ^+v 、弧 a の終点を ∂^-a とする記法を用いている。 $L \subseteq V$ は既に探索した頂点の集合とする。

```
search( $v, L$ ){  
    //  $v$  から出る全ての弧  
    forall( $a \in \delta^+v$ ){  
         $w = \partial^-a$  // 反対側の頂点  
        if( $w \notin L$ ){  
             $L = L \cup \{w\}$   
            search( $w, L$ )  
        }  
    }  
    // これ以上進めない  
    return  
}
```

このアルゴリズムを用いて、下図のグラフを深さ優先探索し、その結果として得られる極大木を示しなさい。極大木の頂点の位置は、元のグラフの位置ではなく、探索の順序に従って配置しなさい。



3 最短経路問題

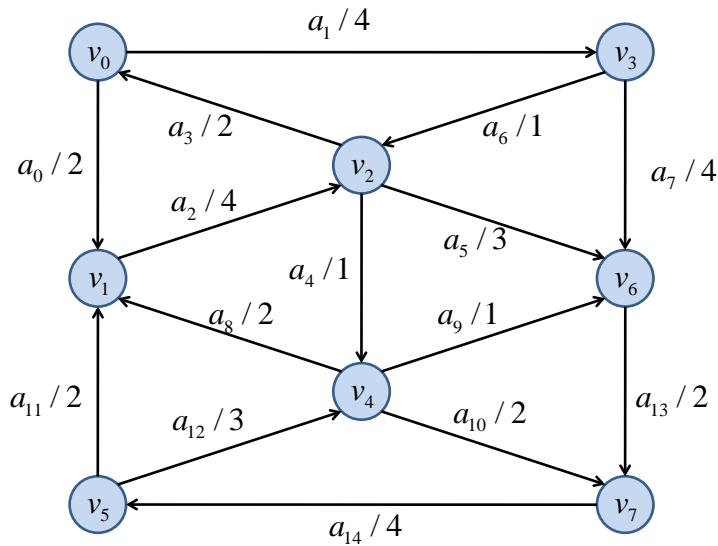
有向グラフ $G=(V,A)$ において、各弧 $a \in A$ に正の長さ $l(a)$ が定義されているとする。
このとき、ある頂点 $v_0 \in V$ から各頂点への最短経路を求める方法の一つが Dijkstra 法である。

頂点 v_0 からの各頂点 v への、最短経路に沿った距離 (ポテンシャル) を $p(v)$ 、その経路で頂点 v の直前の頂点を $q(v)$ とする。 $U \subseteq V$ を v_0 からの有向道が見つかったが距離が確定していない頂点の集合、 $W \subseteq V$ を v_0 からの有向道が見つかり距離の確定した頂点の集合とする。

このとき、Dijkstra 法は以下のように表される。ただし、初期条件は、 $U = \{v_0\}$ 、 $W = \emptyset$ 、 $p(v_0) = 0$ 、 $p(v) = \infty$ ($\forall v \in V \setminus \{v_0\}$)、 $q(v) = \text{null}$ ($\forall v \in V$) である。

```
while (  $U \neq \emptyset$  ) {  
     $p(w)$  が最小である  $w \in U$  を探す  
    forall (  $a \in \delta^+ w$  ) {  
         $x = \delta^- a$   
        if (  $x \notin W$  ) {  
            if (  $p(x) > p(w) + l(a)$  ) {  
                 $q(x) \leftarrow w$   
                 $p(x) \leftarrow p(w) + l(a)$   
                 $U \leftarrow U \cup \{x\}$   
            }  
        }  
    }  
    }  
     $W \leftarrow W \cup \{w\}$   
     $U \leftarrow U \setminus \{w\}$   
}
```

A) アルゴリズムの実行



上のグラフについて、Dijkstra 法を実行しなさい。始点は v_0 とする。図中の弧のラベルの右の数字は距離を表している。アルゴリズムの各ステップ (while ループが一回実行される毎) の、注目している頂点 w 、頂点の集合 U と V 、更新された $p(w)$ と $q(w)$ を、以下の例のように表として表しなさい。一旦計算された $p(w)$ が後で更新された場合には、そのことが分かるように例に従って矢印で表示しなさい。

手順	注目している頂点	W	U	p	q	後で更新
0		\emptyset	$\{v_0\}$	$p(v_0) = 0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_3\}$	$p(v_1) = 2$	$q(v_1) = v_0$	
				$p(v_3) = 4$	$q(v_3) = v_0$	
2	v_1	$\{v_0, v_1\}$	$\{v_2, v_3\}$	$p(v_2) = 6$	$q(v_2) = v_1$	
...						
m	v_i	W_m	U_m	$p(v_2) = k$	$q(v_2) = v_k$	

B) 得られる極大木

上の Dijkstra 法の実行によって得られる極大木を示しなさい。また、各頂点のポテンシャル $p(w)$ を示しなさい。