「グラフと組合せ」試験問題　解答例

2010 年度

１数学的帰納法

任意の自然数 N に対して、以下の恒等式が成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right) \tag{1.1}$$

解答例

- $N=1$の場合、

$$\text{左辺}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\text{右辺}=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

従って、式(1.1)が成り立つ。

- ある N で式(1.1)が成り立つと仮定する。$N+1$の場合の左辺を変形する。

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n(n+2)}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)}+\frac{1}{(N+1)(N+3)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right)\end{aligned}$$

$N+1$の場合の右辺を得る。従って、$N+1$の場合にも式(1.1)が成り立つ。

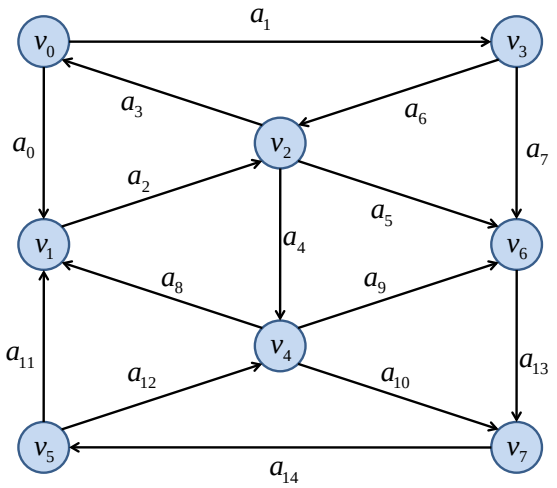
- 以上より、任意の自然数 N に対して式(1.2)が成り立つことが、数学的帰納法によって証明された。

２深さ優先探索

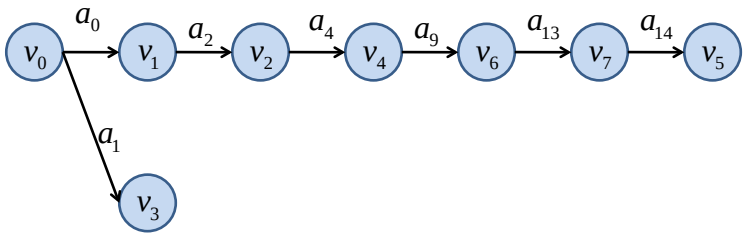
有向グラフ $G=(V,A)$ に対する、深さ優先探索（Depth-First Search）のアルゴリズムを以下に示す。ただし、頂点 $v\in V$ を始点とする弧の集合を $\delta^{+}v$、弧 a の終点を $\partial^{-}a$ とする記法を用いている。$L\subseteq V$ は既に探索した頂点の集合とする。

```
search( v , L ){
        // v から出る全ての弧
        forall( a ∈ δ⁺v ){
                w = ∂⁻a //反対側の頂点
                if( w ∉ L ){
                        L = L ∪ {w}
                        search( w , L )
                }
        }
        //これ以上進めない
        return
}
```

このアルゴリズムを用いて、下図のグラフを深さ優先探索し、その結果として得られる極大木を示しなさい。極大木の頂点の位置は、元のグラフの位置ではなく、探索の順序に従って配置しなさい。



解答例



３最短経路問題

有向グラフ $G=(V,A)$ において、各弧 $a \in A$ に正の長さ $l(a)$ が定義されているとする。このとき、ある頂点 $v_0 \in V$ から各頂点への最短経路を求める方法の一つが Dijkstra 法である。

頂点 v_0 からの各頂点 v への、最短経路に沿った距離（ポテンシャル）を $p(v)$、その経路で頂点 v の直前の頂点を $q(v)$ とする。$U \subseteq V$ を v_0 からの有向道が見つかっているが距離が確定していない頂点の集合、$W \subseteq V$ を v_0 からの有向道が見つかり距離の確定した頂点の集合とする。

このとき、Dijkstra 法は以下のように表される。ただし、初期条件は、$U=\{v_0\}$、$W=\varnothing$、$p(v_0)=0$、$p(v)=\infty$ $(\forall v \in V \setminus \{v_0\})$、$q(v)=\mathrm{null}$ $(\forall v \in V)$ である。

while ($U \neq \varnothing$) {
　　$p(w)$ が最小である $w \in U$ を探す
　　forall ($a \in \delta^+ w$) {
　　$x = \partial^- a$
　　if ($x \notin W$) {
　　if ($p(x) > p(w) + l(a)$) {
　　$q(x) \leftarrow w$
　　$p(x) \leftarrow p(w) + l(a)$

$$U \leftarrow U \cup \{x\}$$

}

}

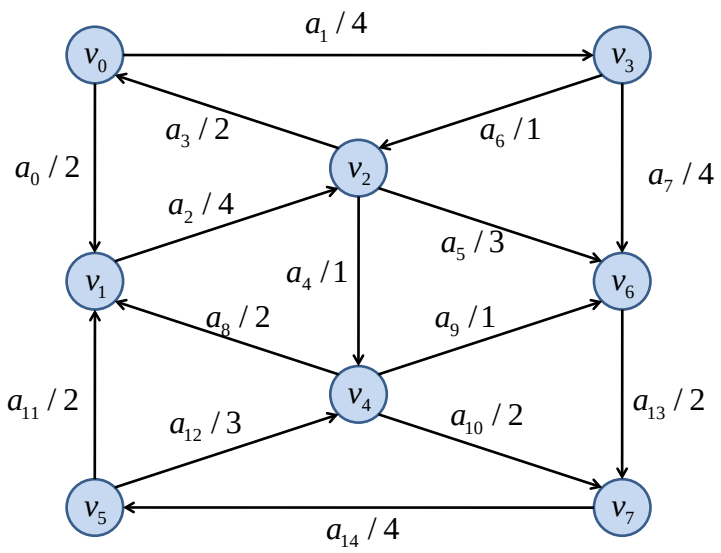
}

$W \leftarrow W \cup \{w\}$

$U \leftarrow U \setminus \{w\}$

}

A) アルゴリズムの実行



上のグラフについて、Dijkstra 法を実行しなさい。始点はv_0とする。図中の弧のラベルの右の数字は距離を表している。アルゴリズムの各ステップ（while ループが一回実行される毎）の、注目している頂点w、頂点の集合UとV、更新された$p(w)$と$q(w)$を、以下の例のように表として表しなさい。一旦計算された$p(w)$が後で更新された場合には、そのことが分かるように例に従って矢印で表示しなさい。

手順	注目している頂点	W	U	p	q	後で更新
0		$\varnothing$	$\{v_0\}$	$p(v_0)=0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1,v_3\}$	$p(v_1)=2$	$q(v_1)=v_0$	
				$p(v_3)=4$	$q(v_3)=v_0$	
2	v_1	$\{v_0,v_1\}$	$\{v_2,v_3\}$	$p(v_2)=6$	$q(v_2)=v_1$	
$\cdots$						
m	v_j	W_m	U_m	$p(v_2)=k$	$q(v_2)=v_k$	

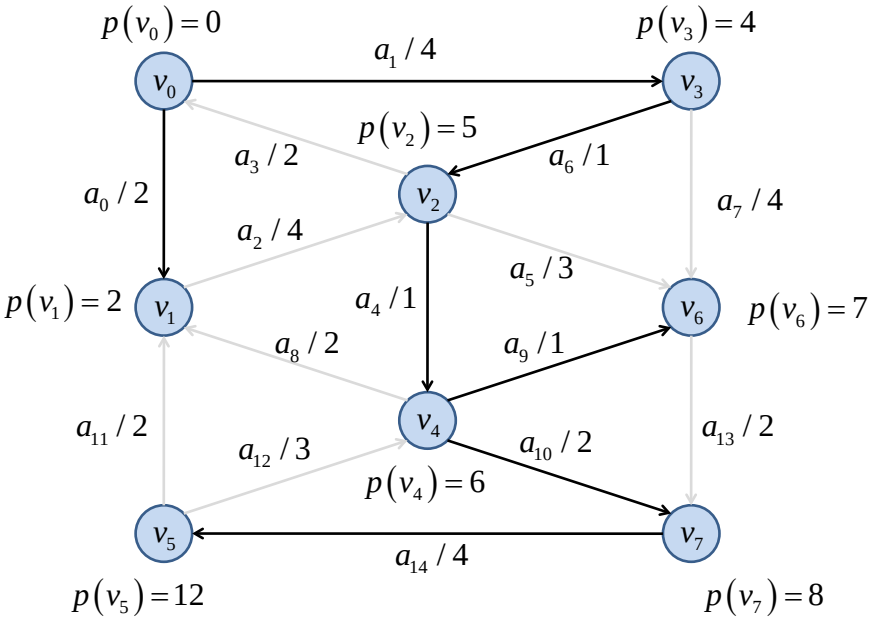
解答例

手順	注目している頂点	W	U	p	q	後で更新
0		$\varnothing$	$\{v_0\}$	$p(v_0)=0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1,v_3\}$	$p(v_1)=2$	$q(v_1)=v_0$	
				$p(v_3)=4$	$q(v_3)=v_0$	
2	v_1	$\{v_0,v_1\}$	$\{v_2,v_3\}$	$p(v_2)=6$	$q(v_2)=v_1$	
3	v_3	$\{v_0,v_1,v_3\}$	$\{v_2,v_6\}$	$p(v_2)=5$	$q(v_2)=v_3$	
				$p(v_6)=8$	$q(v_6)=v_3$	
4	v_2	$\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$	$\{v_4,v_6\}$	$p(v_4)=6$	$q(v_4)=v_2$	
5	v_4	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4\}$	$\{v_6,v_7\}$	$p(v_6)=7$	$q(v_6)=v_4$	
				$p(v_7)=8$	$q(v_7)=v_4$	
6	v_6	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_6\}$	$\{v_7\}$			
7	v_7	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_7\}$	$\{v_5\}$	$p(v_5)=12$	$q(v_5)=v_7$	
8	v_5	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$	$\varnothing$			

B)　得られる極大木

上の Dijkstra 法の実行によって得られる極大木を示しなさい。また、各頂点のポテンシャル $p(w)$ を示しなさい。

解答例


$p(v_0)=0$
$p(v_3)=4$
$a_1/4$
v_0
v_3
$p(v_2)=5$
$a_3/2$
$a_6/1$
$a_0/2$
v_2
$a_7/4$
$a_2/4$
$a_5/3$
$p(v_1)=2$
v_1
$a_4/1$
v_6
$p(v_6)=7$
$a_8/2$
$a_9/1$
$a_{11}/2$
v_4
$a_{13}/2$
$a_{12}/3$
$a_{10}/2$
$p(v_4)=6$
v_5
v_7
$a_{14}/4$
$p(v_5)=12$
$p(v_7)=8$