「グラフと組み合わせ」課題 9 (解答例)

2010/6/21

1　数学的帰納法

次の二項定理を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

ここで

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

は、二項係数である。

解答例

- $n=0$ の場合、両辺は1となり、成り立つ
- ある n で成り立つと仮定し、$n+1$ でも成り立つことを示す。

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n \times (x+y) = (x+y) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} x^{k+1} y^{n+1-k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}\end{aligned}$$

及び

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n+1-k}{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

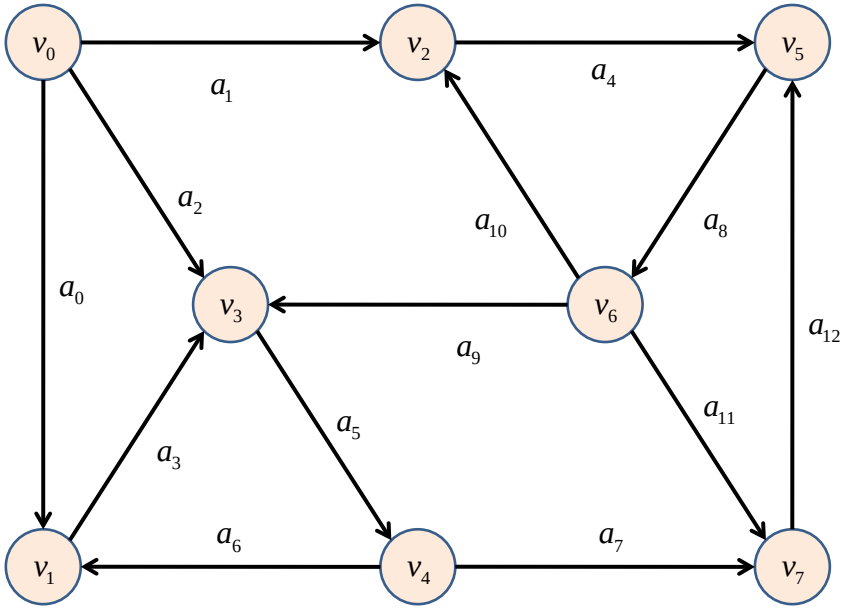
を使うと

$$(x+y)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n-k+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{k}y^{n+1-k}$$

を得る。

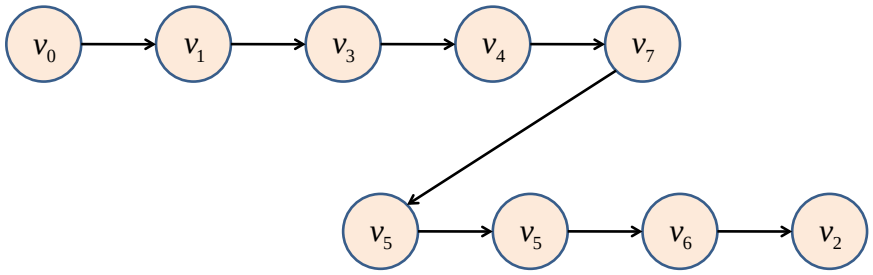
2　グラフの探索

下記のグラフに対して、深さ優先探索及び幅優先探索を実行し、得られる極大木を求めなさい。

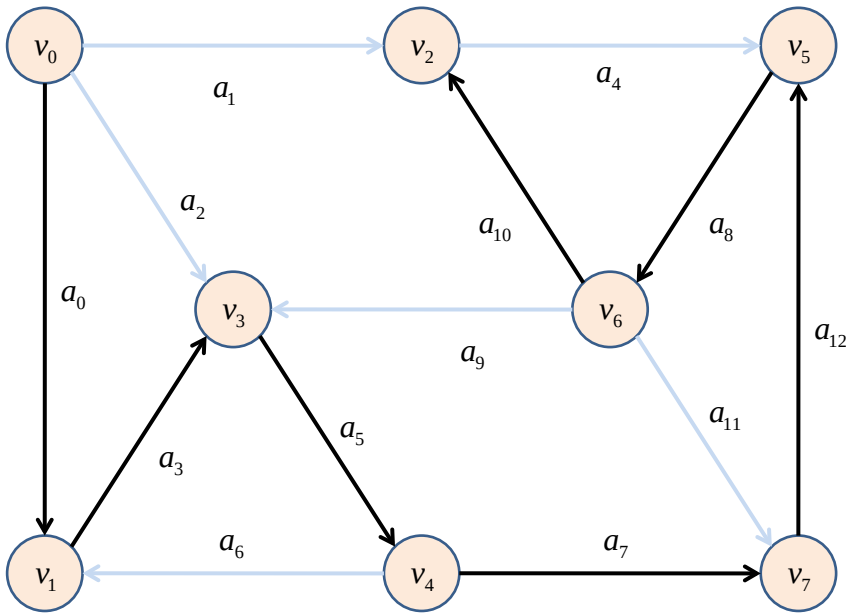


解答例

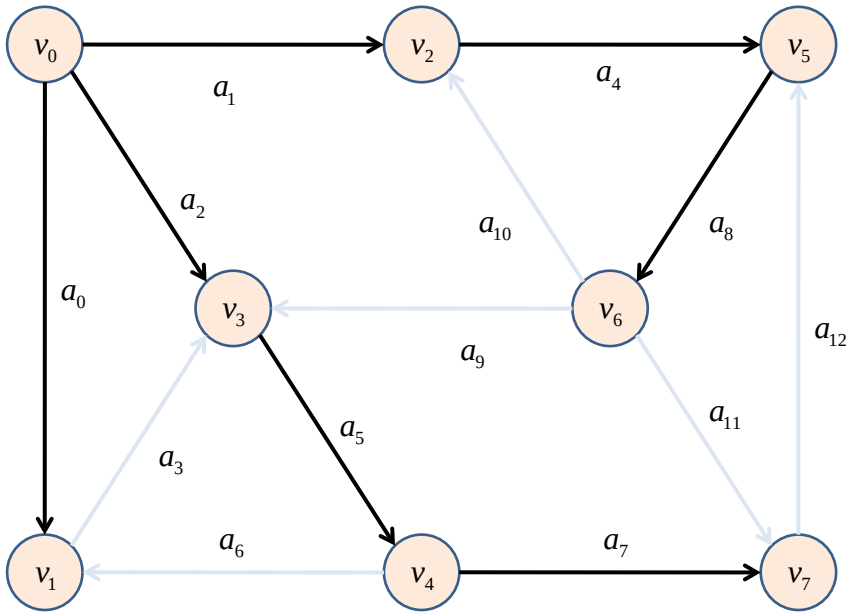
深さ優先探索を実施すると以下のように頂点を探索する。



この結果の探索木は以下のようになる。



次に幅優先探索を考える。探索済の頂点の集合を L、待ち行列を Q と表すことにして、探索の様子を示す。

現在の頂点	L	Q
	$\varnothing$	$\{v_0\}$
v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$
v_1	$\{v_0, v_1\}$	$\{v_2, v_3\}$
v_2	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_5\}$
v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_5, v_4\}$
v_5	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_5\}$	$\{v_4, v_6\}$
v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_5, v_4\}$	$\{v_6, v_7\}$
v_6	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_6\}$	$\{v_7\}$
v_7	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_6, v_7\}$	$\varnothing$

この結果の探索木は以下のようになる。