「グラフと組み合わせ」課題 1 (解答例)

2010/4/12

1　集合の演算

二つの集合

$$X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$
$$Y = \{1,2,4,7\}$$

について、以下の集合を求め、要素を列挙することで答えなさい。

1. $X \cup Y$
2. $X \cap Y$
3. $X \setminus Y$

解答例

1. $X \cup Y = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$
   二つの集合 X と Y の要素を合わせた集合
2. $X \cap Y = \{1,2,4\}$
   二つの集合 X と Y の共通要素からなる集合
3. $X \setminus Y = \{0,3,5,6\}$
   集合 X の要素のうち、集合 Y に含まれないものの集合

2　数学的帰納法

自然数 n に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{1}{(1-a)^2}\left[a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}\right]$$

解答例

- $n=0$ の場合、両辺は 0 となり、成り立つ
- ある n で成り立つと仮定する。つまりある n に対して、

$$\sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{1}{(1-a)^2}\left[a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}\right]$$

が成り立つと仮定する。すると、以下のように$n+1$でも成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} ka^k &= \sum_{k=0}^{n} ka^k + (n+1)a^{n+1} \\
&= \frac{1}{(1-a)^2}\left[a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}\right]+(n+1)a^{n+1} \\
&= \frac{1}{(1-a)^2}\left[a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}+(n+1)a^{n+1}-2(n+1)a^{n+2}+(n+1)a^{n+3}\right] \\
&= \frac{1}{(1-a)^2}\left[a-(n+2)a^{n+2}+na^{n+3}\right]
\end{aligned}
$$

参考

数学的帰納法ではないが、以下のように導出することができる。既知の公式

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

の両辺をaで微分する。$k=0$の項が無いことに注意。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} &= \frac{1-a^{n+1}}{(1-a)^2} - \frac{(n+1)a^n}{1-a} \\
&= \frac{1}{(1-a)^2}\left[1-a^{n+1}-(n+1)(1-a)a^n\right] \\
&= \frac{1}{(1-a)^2}\left[1-(n+1)a^n+na^{n+1}\right]
\end{aligned}
$$

両辺にaを掛ける。左辺の$k=0$ の項に注意が必要。

$$\sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{1}{(1-a)^2}\left[a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}\right]$$