「グラフと組み合わせ」課題 8 (解答例)

2010/6/14

1　列挙

n 個の文字の集合

$$S = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$$

の全てからなる文字列、つまり同じ文字を含まない、長さ n の文字列を列挙する方法を考える。

1. 何通りの文字列があるかを答えなさい。また、そのことが正しいことを数学的帰納法で示しなさい。
2. 文字列を列挙する再帰的アルゴリズムを構築しなさい。
3. $n = 4$ の場合に、上記のアルゴリズムに従って文字列を列挙しなさい。列挙する途中の過程についても示しなさい。

解答例

1. n 個の文字から構成され、同じ文字を含まない文字列の総数は $n!$ である。このことを数学的帰納法で証明する。
   - $n = 1$ の場合、明らか。
   - ある文字数 n の時、文字列の総数が $n!$ であると仮定する。各文字列に対して、新しい文字 α を加えた文字列を生成することを考える。文字の間が $n-1$ 箇所、それに先頭と末尾を加え、文字 α を加えて長さ $n+1$ の文字列を作る方法は $n+1$ 通りである。各文字列の同じ数の場合があるので、

     $(n+1) \times n! = (n+1)!$ 通りの文字列が生成される。

2. アルゴリズムを enumString(L) とする。ここで、L は、文字列作成に既に使用した文字のリストとする。つまり、生成された文字列となる。

```
enumString(L){
    if (|L| == |S|) {L を印刷}
    else {
        forall (s ∈ S) {
            if (s ∉ L){
                s を L に追加
                enumString(L)
                s を L から削除
            }
        }
    }
}
```

3.　$S=\{a,b,c,d\}$ の場合の動作例を示す。再帰関数を f とする。

$f\{[\ ]\}$	$f\{[a]\}$	$f\{[a,b]\}$	$f\{[a,b,c]\}$	$f\{[a,b,c,d]\}$
			$f\{[a,b,d]\}$	$f\{[a,b,d,c]\}$
		$f\{[a,c]\}$	$f\{[a,c,b]\}$	$f\{[a,c,b,d]\}$
			$f\{[a,c,d]\}$	$f\{[a,c,d,b]\}$
		$f\{[a,d]\}$	$f\{[a,d,b]\}$	$f\{[a,d,b,c]\}$
			$f\{[a,d,c]\}$	$f\{[a,d,c,b]\}$
	$f\{[b]\}$	$f\{[b,a]\}$	$f\{[b,a,c]\}$	$f\{[b,a,c,d]\}$
			$f\{[b,a,d]\}$	$f\{[b,a,d,c]\}$
		$f\{[b,c]\}$	$f\{[b,c,a]\}$	$f\{[b,c,a,d]\}$
			$f\{[b,c,d]\}$	$f\{[b,c,d,a]\}$

		$f\{[b,d]\}$	$f\{[b,d,a]\}$	$f\{[b,d,a,c]\}$
			$f\{[b,d,c]\}$	$f\{[b,d,c,a]\}$
	$f\{[c]\}$	$f\{[c,a]\}$	$f\{[c,a,b]\}$	$f\{[c,a,b,d]\}$
			$f\{[c,a,d]\}$	$f\{[c,a,d,b]\}$
		$f\{[c,b]\}$	$f\{[c,b,a]\}$	$f\{[c,b,a,d]\}$
			$f\{[c,b,d]\}$	$f\{[c,b,d,a]\}$
		$f\{[c,d]\}$	$f\{[c,d,a]\}$	$f\{[c,d,a,b]\}$
			$f\{[c,d,b]\}$	$f\{[c,d,b,a]\}$
	$f\{[d]\}$	$f\{[d,a]\}$	$f\{[d,a,b]\}$	$f\{[d,a,b,c]\}$
			$f\{[d,a,c]\}$	$f\{[d,a,c,b]\}$
		$f\{[d,b]\}$	$f\{[d,b,a]\}$	$f\{[d,b,a,c]\}$
			$f\{[d,b,c]\}$	$f\{[d,b,c,a]\}$
		$f\{[d,c]\}$	$f\{[d,c,a]\}$	$f\{[d,c,a,b]\}$
			$f\{[d,c,b]\}$	$f\{[d,c,b,a]\}$

2　実装

前問で作成した再帰的アルゴリズムをプログラムとして実装し、動作を確認しなさい。

解答例

プログラムは別紙に示す。実行結果を以下に示す。各行の最後がm列挙すべき

長さ 4 の文字列である。

```
  a  ab  abc  abcd
  abd  abdc
  ac  acb  acbd
  acd  acdb
  ad  adb  adbc
  adc  adcb
  b  ba  bac  bacd
  bad  badc
  bc  bca  bcad
  bcd  bcda
  bd  bda  bdac
  bdc  bdca
  c  ca  cab  cabd
  cad  cadb
  cb  cba  cbad
  cbd  cbda
  cd  cda  cdab
  cdb  cdba
  d  da  dab  dabc
  dac  dacb
  db  dba  dbac
  dbc  dbca
  dc  dca  dcab
  dcb  dcba
24 strings are found.
```