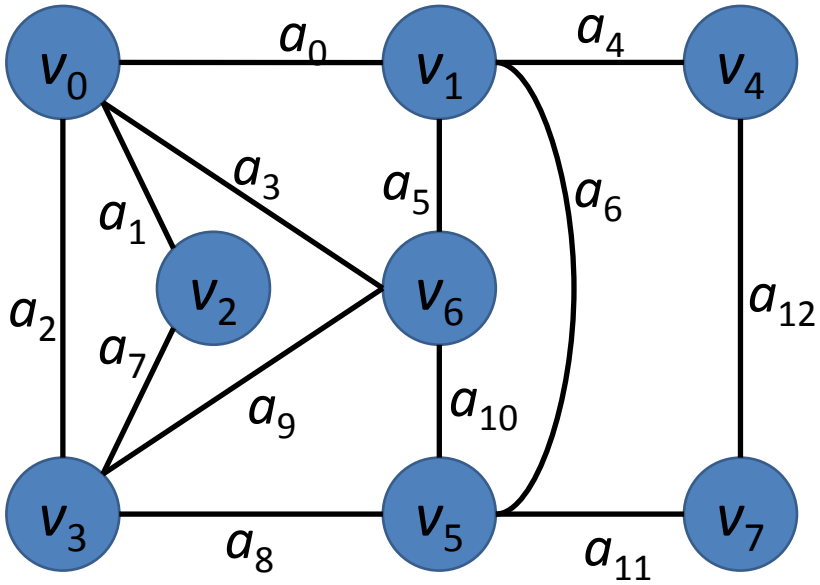
「グラフと組み合わせ」課題 3 (解答例)

2010/4/26

1　Euler閉路

次のグラフ中の Euler 閉路(一筆描き)を見つけなさい。



解答例

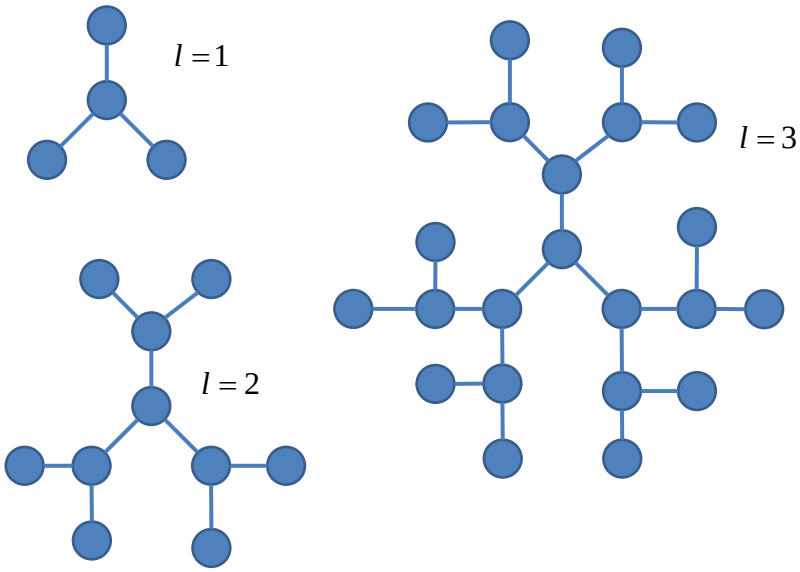
一つの例だけを示す

$$a_0 a_5 a_3 a_1 a_7 a_9 a_{10} a_6 a_4 a_{12} a_{11} a_8 a_2$$

2　Cayley木内の点間の距離

次数$k>2$の Cayley 木を以下の手順で構成することにする。下の図は$k=3$の場合である。

1. 頂点の数が$k+1$の Cayley 木を作る（図中の$l=1$の場合)。
2. 外側のk個のそれぞれの頂点から、新たに$k-1$本の弧を伸ばして新しい頂点を接続する（図中の$l=2$の場合)。
3. 上記ステップを$l=L$まで繰り返す。



このとき頂点の数NをLで表しなさい。

解答例

$l=1$の場合、頂点数は$n=k+1$である。$l=2$の場合、外側のk個の頂点から、それぞれ$k-1$本の弧が伸びる。従って、総頂点数は

$$n=1+k+k(k-1)$$

となる。$l=3$の場合は、外側の頂点の数は$k(k-1)$であり、総頂点数は、同様に以下のようになる。

$$n=1+k+k(k-1)+k(k-1)^2$$

上記を繰り返すことで、次式を得る。

$$N=1+k\sum_{i=0}^{L-1}(k-1)^i=1+k\frac{1-(k-1)^L}{1-(k-1)}=\frac{2-k(k-1)^L}{2-k}$$