フローとカット
Flow and Cut

ネットワーク中のフロー (流量、FLOW)

- 交通網中の流れ
  - 都市間を流れる車両の数、及びその上限
  - 都市間を結ぶ航空路線が輸送する人数とその上限
- 物流
  - 倉庫間を移動している商品の数とその上限
- 作業
  - 各工程間のコストとその上限

容量と流れ

- 各弧に容量(上限)が存在する
  - 交通機関の輸送能力
  - 通信速度
- 各弧に実際に流れる流量
  - 容量以下
- 二点間に最大流量を実現する方法？

2端子フロー

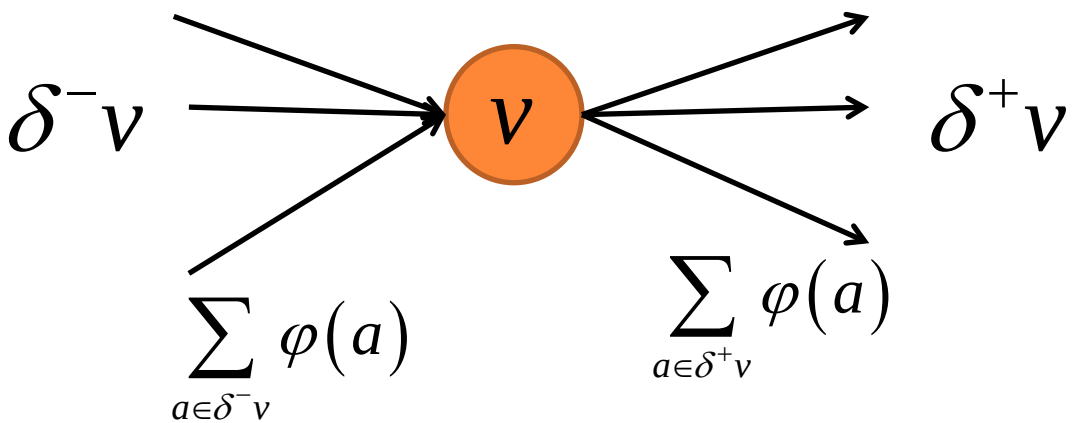
- グラフ $G=(V,A)$
- 入口 $s^{+}\in V$ と出口 $s^{-}\in V$ が定義され、s^{+} から s^{-} への有向道がある
- $\forall a\in A$ に、流量上限 $c(a)\geq 0$
  - 弧の重みを上限として解釈する
- $\forall a\in A$ に、流量(flow) $\varphi(a)\geq 0$

$$N=\left(G(V,A),s^{+},s^{-},c\right)$$

- 容量制約 $0 \le \varphi(a) \le c(a)$
- 流量保存則

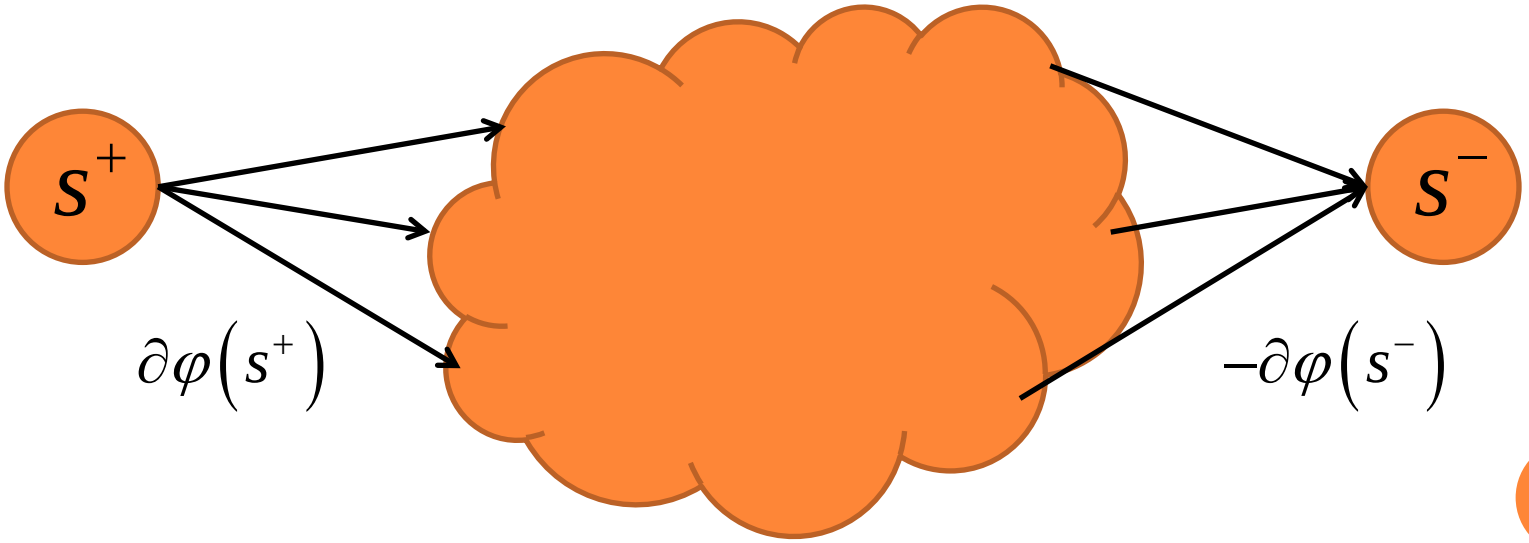
$$\partial\varphi(v) \equiv \sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) = 0$$

$$\forall v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$$



- ネットワークの流量

$$Q(\varphi) = \partial\varphi(s^+) = -\partial\varphi(s^-)$$

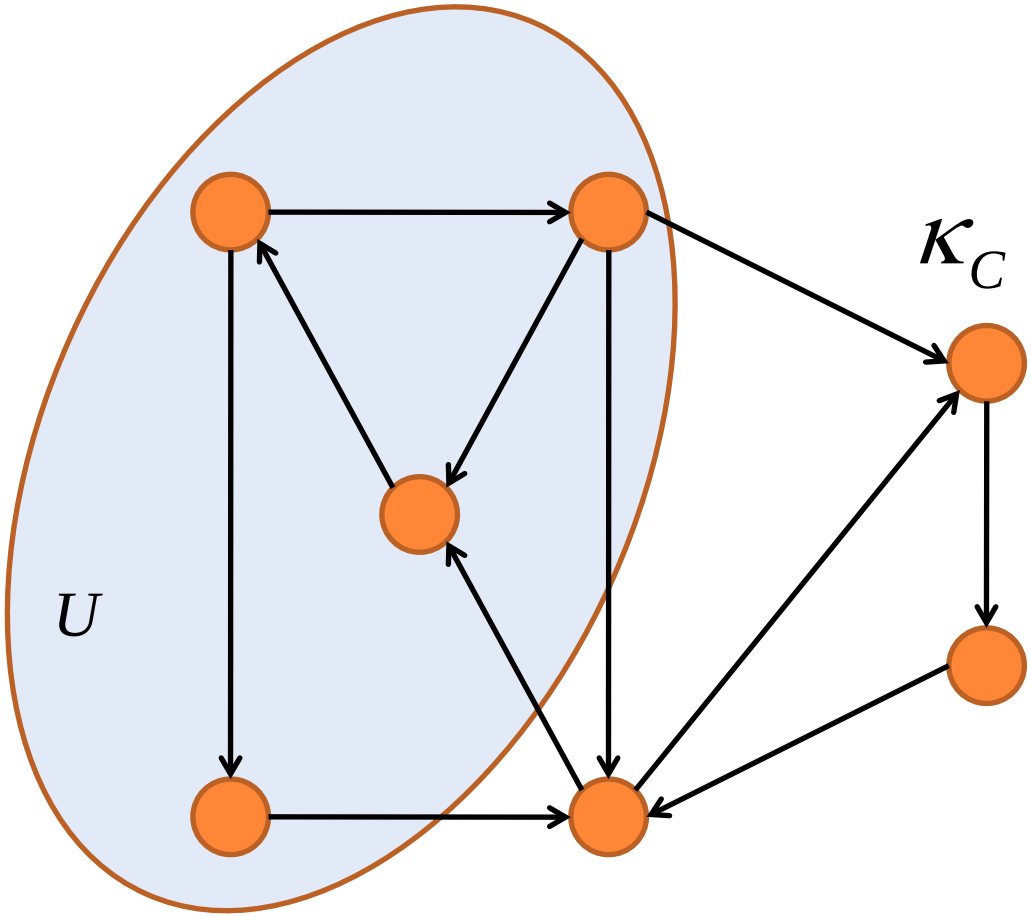


カット(CUT)

- ネットワークのカット$U \subseteq V$
  - $\left(s^{+} \in U\right) \wedge \left(s^{-} \notin U\right)$となる頂点の集合
- カットの容量
  - $\Delta^{+}U$ ：U から出て、$U \setminus V$ へ入る弧の全体

$$\kappa_C\left(U\right) = \sum_{a \in \Delta^{+}U} c\left(a\right)$$

カットとその境界



$\rightarrow \Delta^{+}U$

$$\kappa_C(U) = \sum_{a \in \Delta^{+}U} c(a)$$

$\rightarrow \Delta^{-}U$

最大流量は最小カットに対応

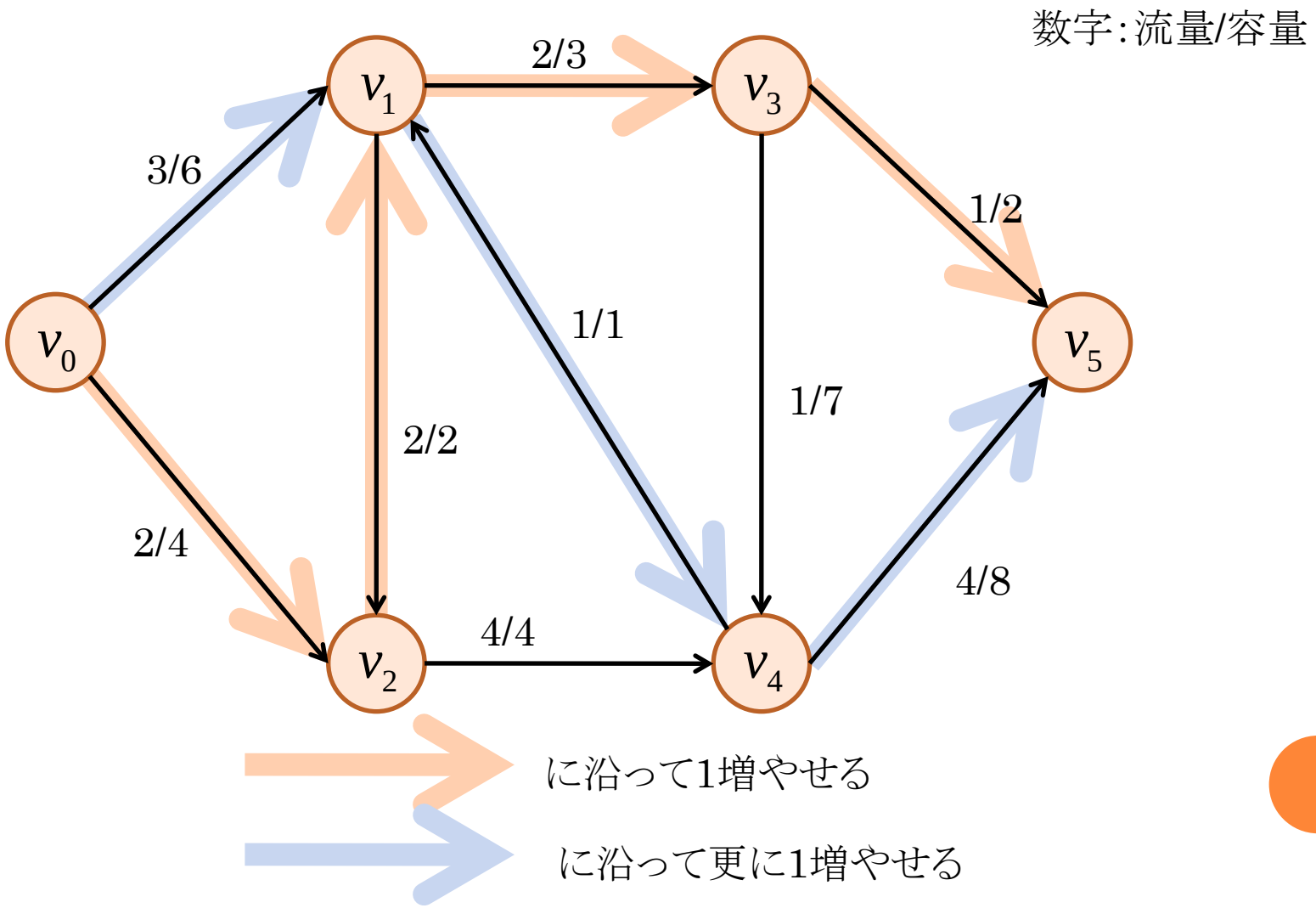
- N 中の任意のフロー φ と任意のカット U に対して次が成り立つ。

$$Q(\varphi) \le \kappa_C(C)$$

- 証明

$$\begin{aligned} Q(\varphi) &\le \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\ &\le \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) - 0 \\ &= \kappa_C(U) \end{aligned}$$

最大フローを見付ける考え方



補助ネットワーク(Auxiliary Network)

$$N = \left(G_\varphi\left(V, A_\varphi\right), s^+, s^-, c_\varphi\right)$$

$$A_\varphi = A_\varphi^{\ +} \cup A_\varphi^{\ -}$$

A_φ^+ ：順方向に容量に余裕のある孤の集合

A_φ^- ：元のネットワークと逆方向の弧の集合。ただし流量 0 の弧を除く

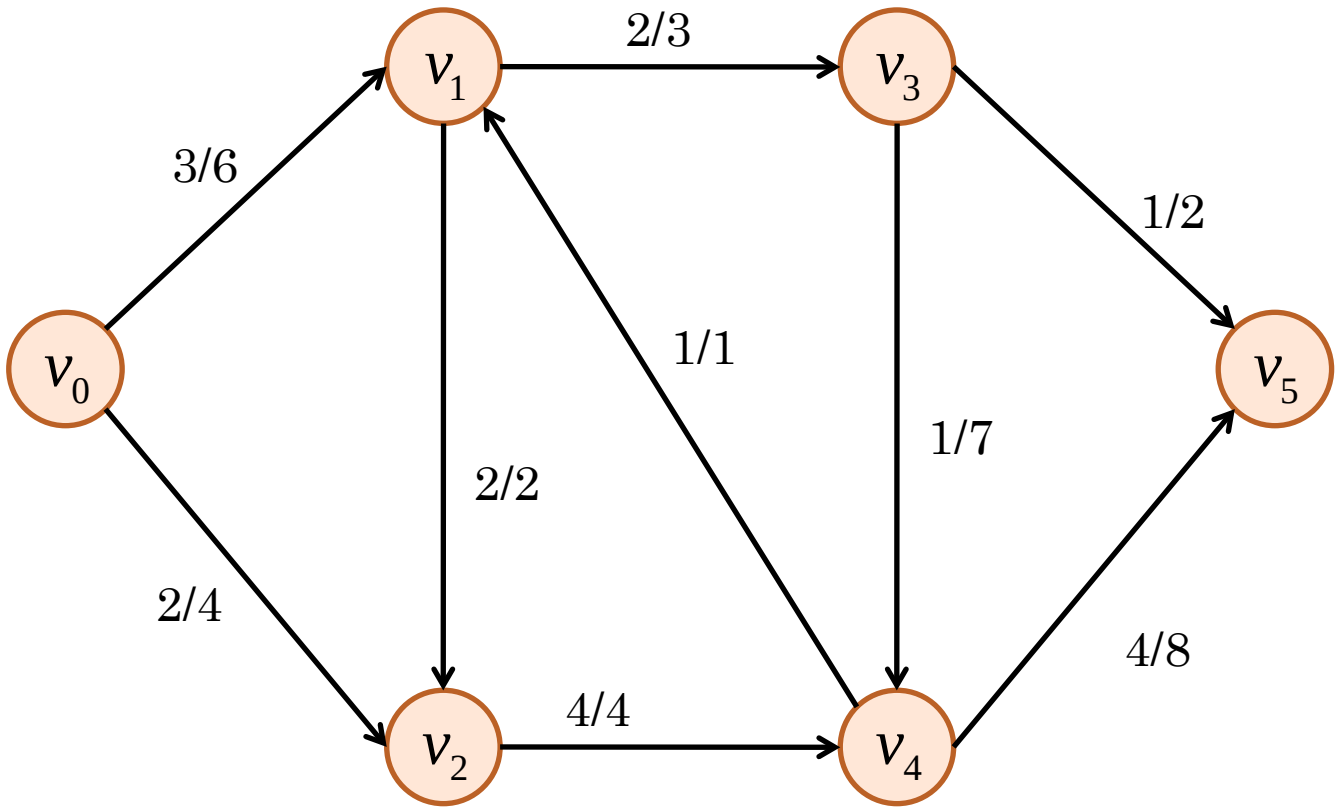
元のネットワークの$\forall a \in A$に対して

- $\varphi(a) < c(a)$ならば
  - $A_\varphi^+ \leftarrow A_\varphi^+ \cup \{a\}$ ：弧の追加
  - $c_\varphi(a) = c(a) - \varphi(a)$ ：容量の設定
  - $\varphi(a) = c(a)$である弧はA_φ^+に追加されないことに注意

- $0 < \varphi(a)$ ならば
  - $A_\varphi^- \leftarrow A_\varphi^- \cup \{b\}$ ： a と逆向きの弧 b を追加
  - $c_\varphi(b) = \varphi(a)$ ：容量設定
  - 流量が 0 の弧以外はすべて含まれることに注意
  - 元のグラフと逆向きの弧であることに注意

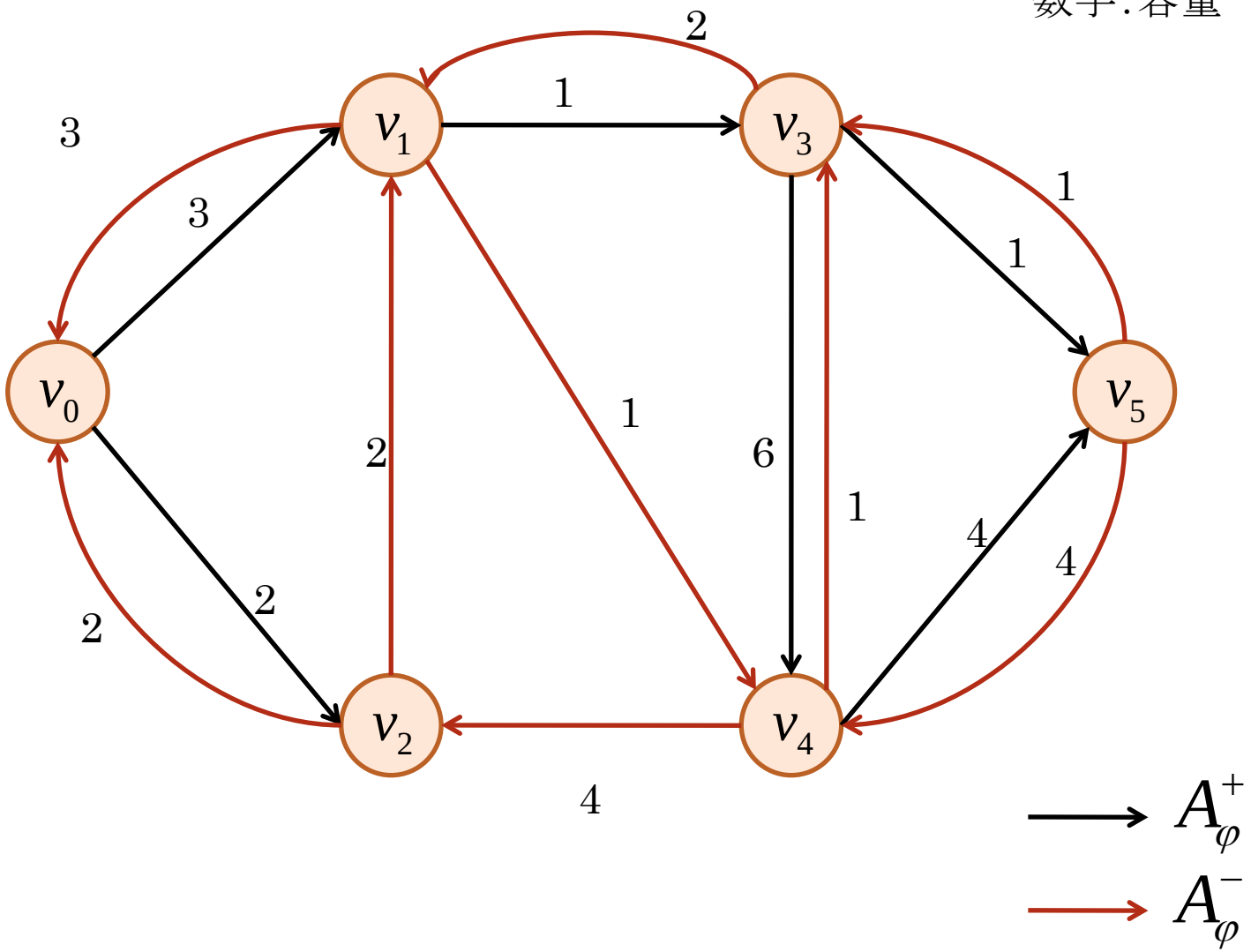
補助ネットワークの構成

数字:流量/容量



補助ネットワークの構成

数字:容量



補助ネットワーク中に s^+ から s^- への有向道 P があれば、以下の d だけ流量を増やすことができる。

$$d = \min\left(c_\varphi(a) \middle| a \in P\right) > 0$$

P を増加道と呼ぶことにする。

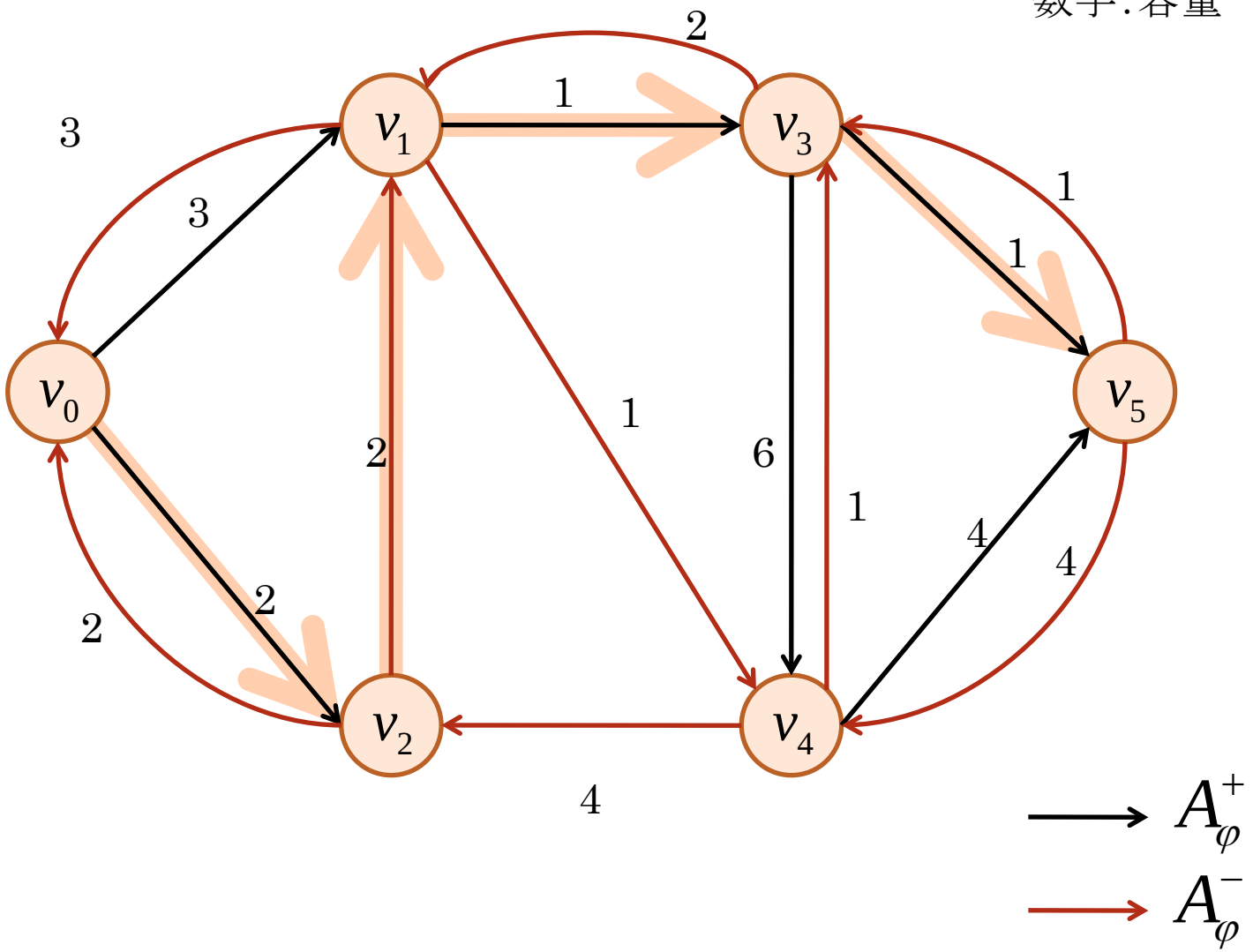
- このときの補助ネットワーク中の新しい流量

$$\varphi'(a) = \begin{cases} \varphi(a) + d & \text{for } a \in A_{\varphi}^{+} \wedge a \in P \\ \varphi(a) - d & \text{for } a \in A_{\varphi}^{-} \wedge a \in P \\ \varphi(a) & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 容量cが整数関数ならば、流量は整数

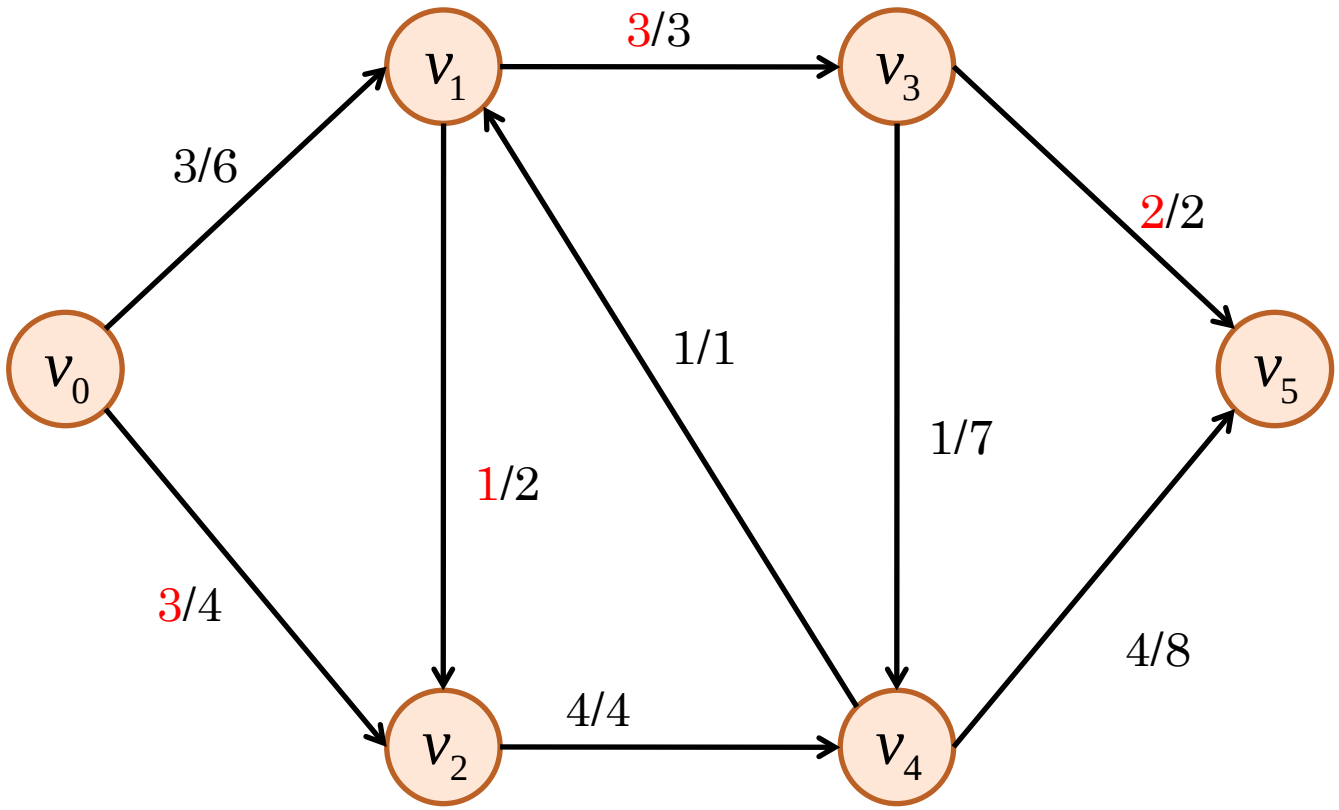
補助ネットワーク内の増加道

数字:容量



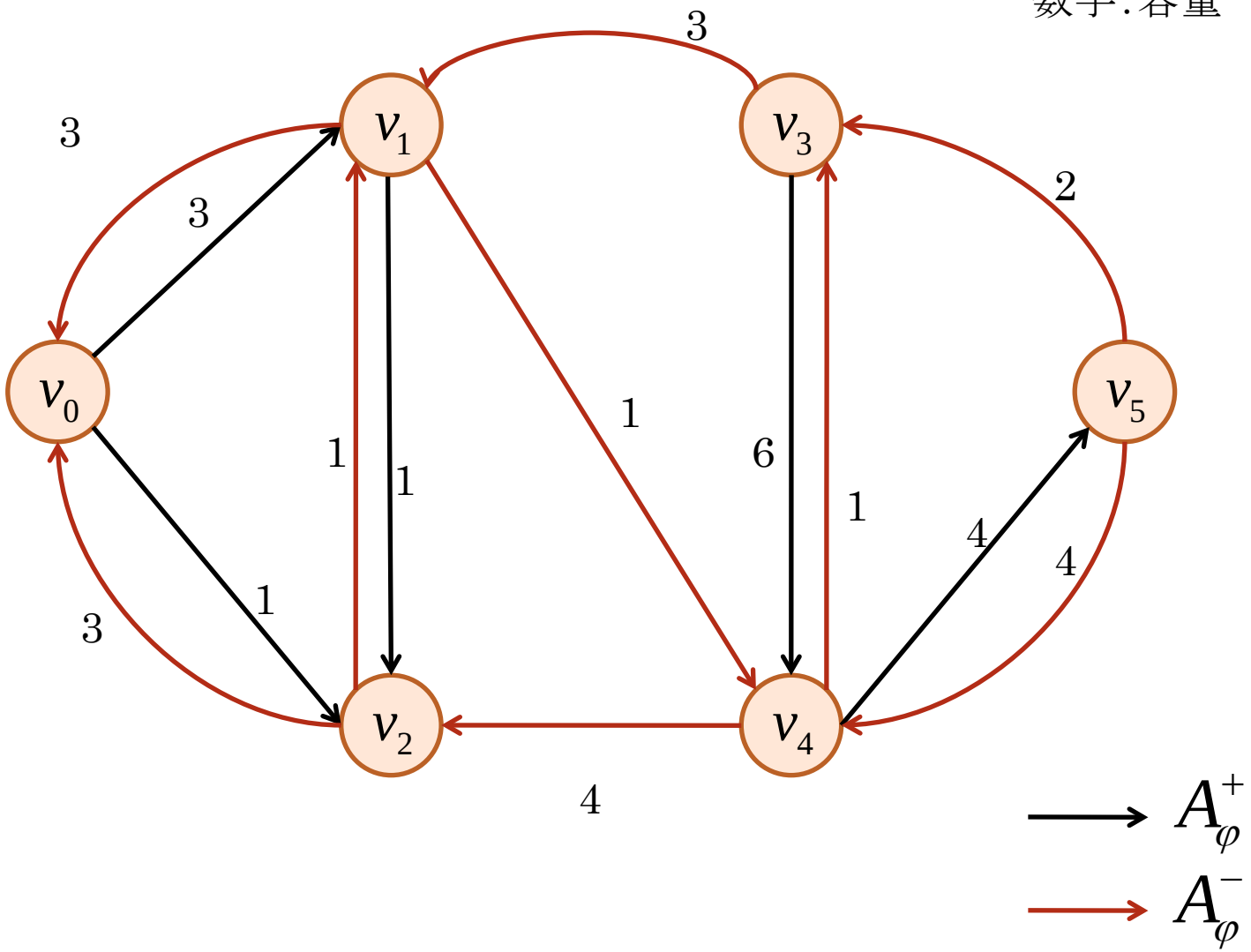
流量增加

数字:流量/容量



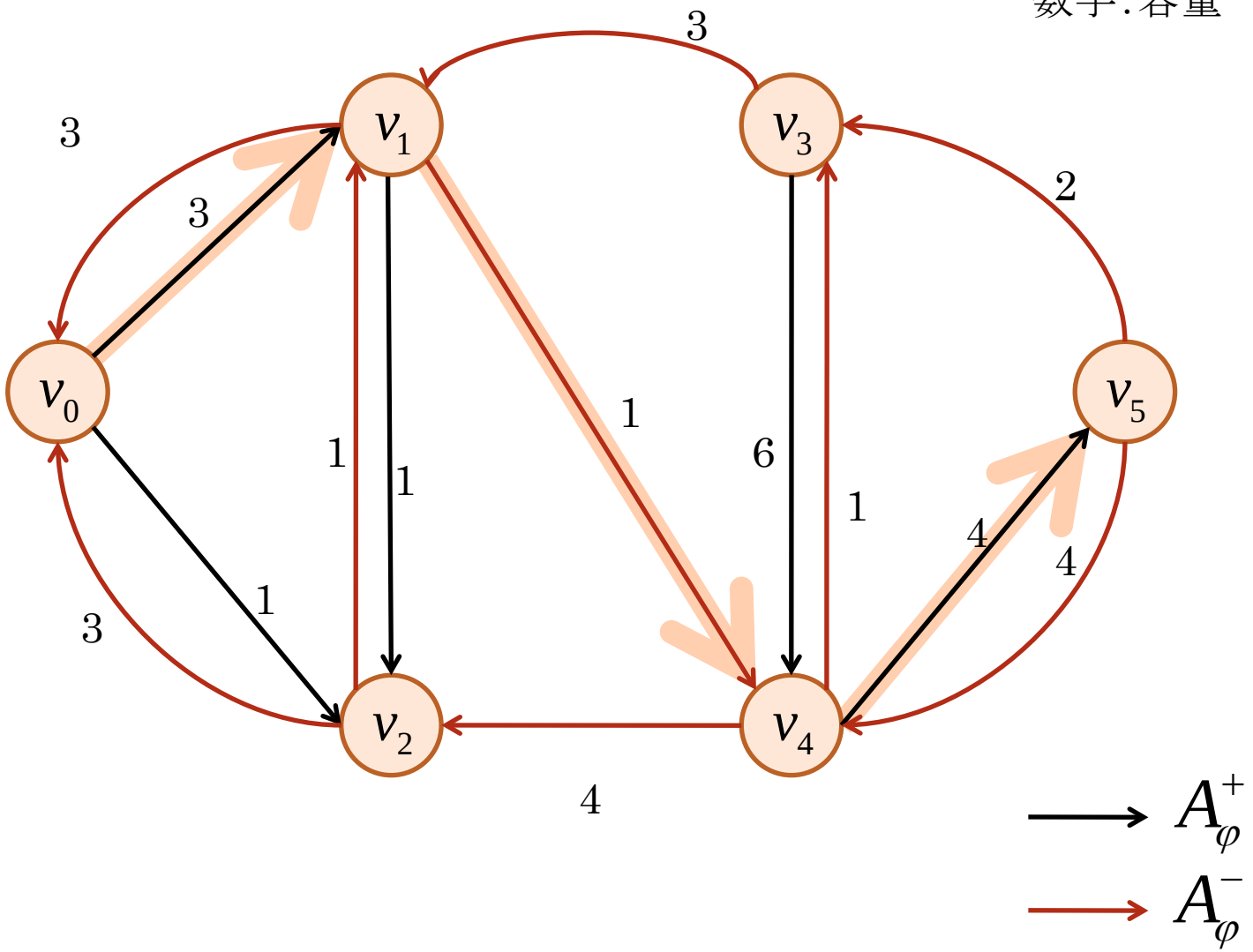
補助ネットワークの更新

数字:容量



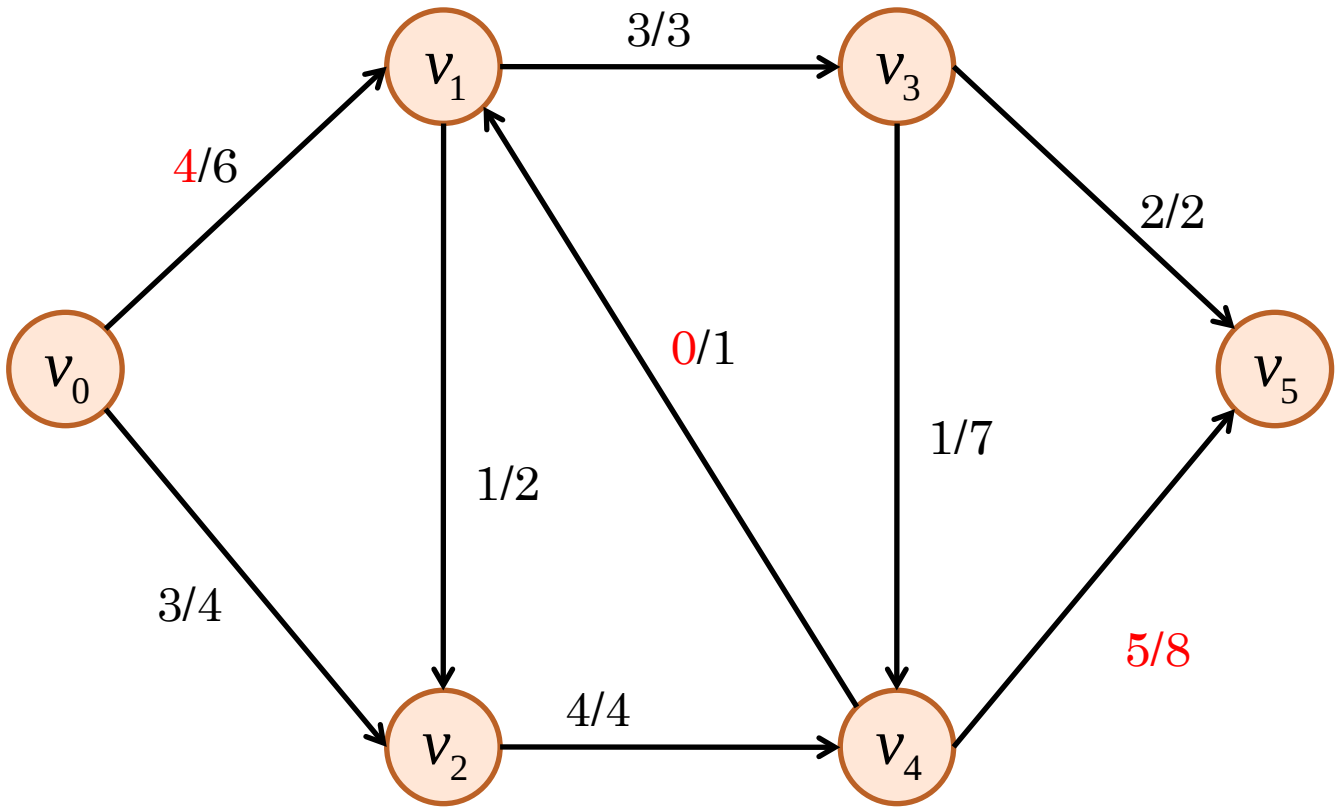
補助ネットワーク内の増加道（再）

数字：容量



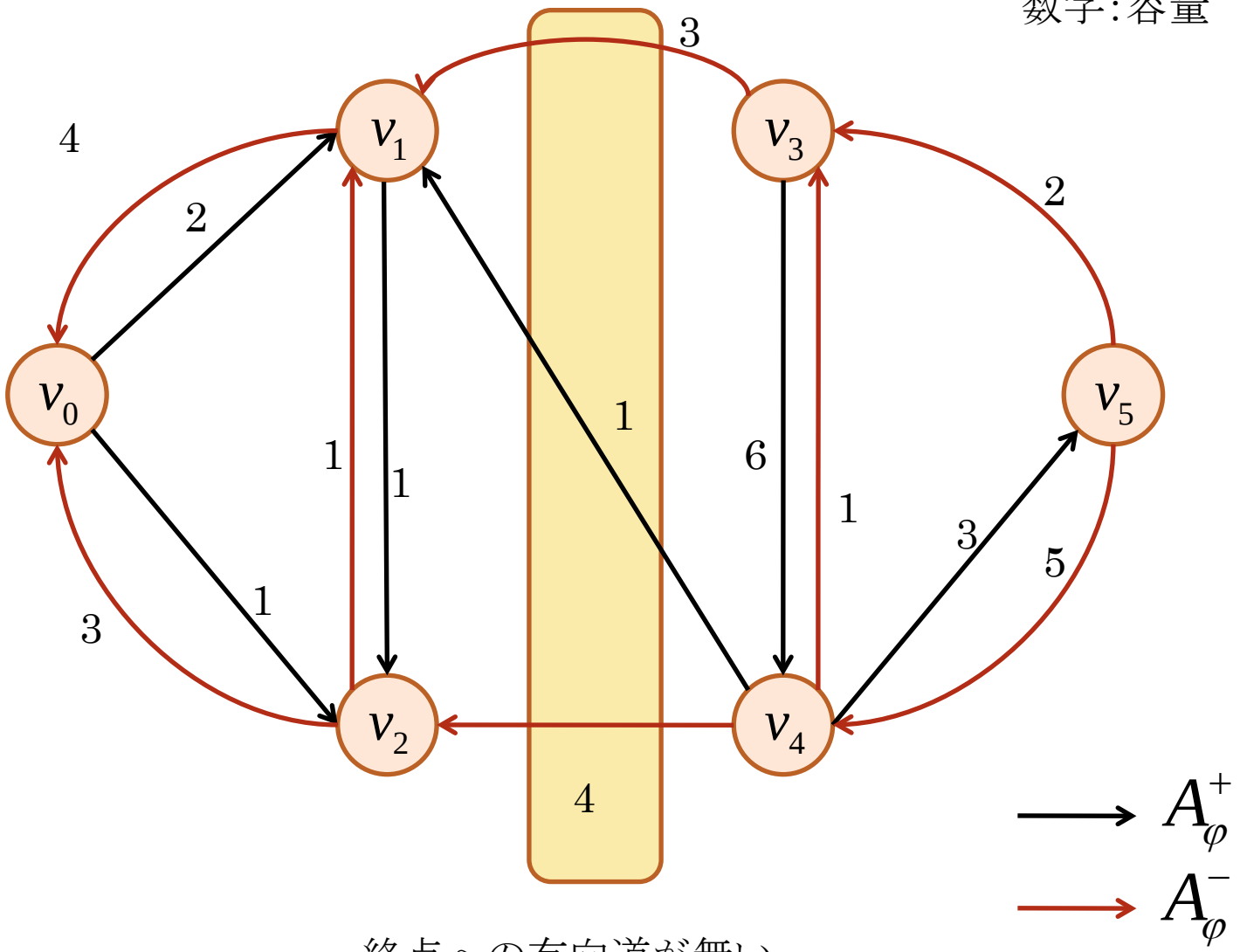
流量增加

数字:流量/容量



補助ネットワークの更新(再)

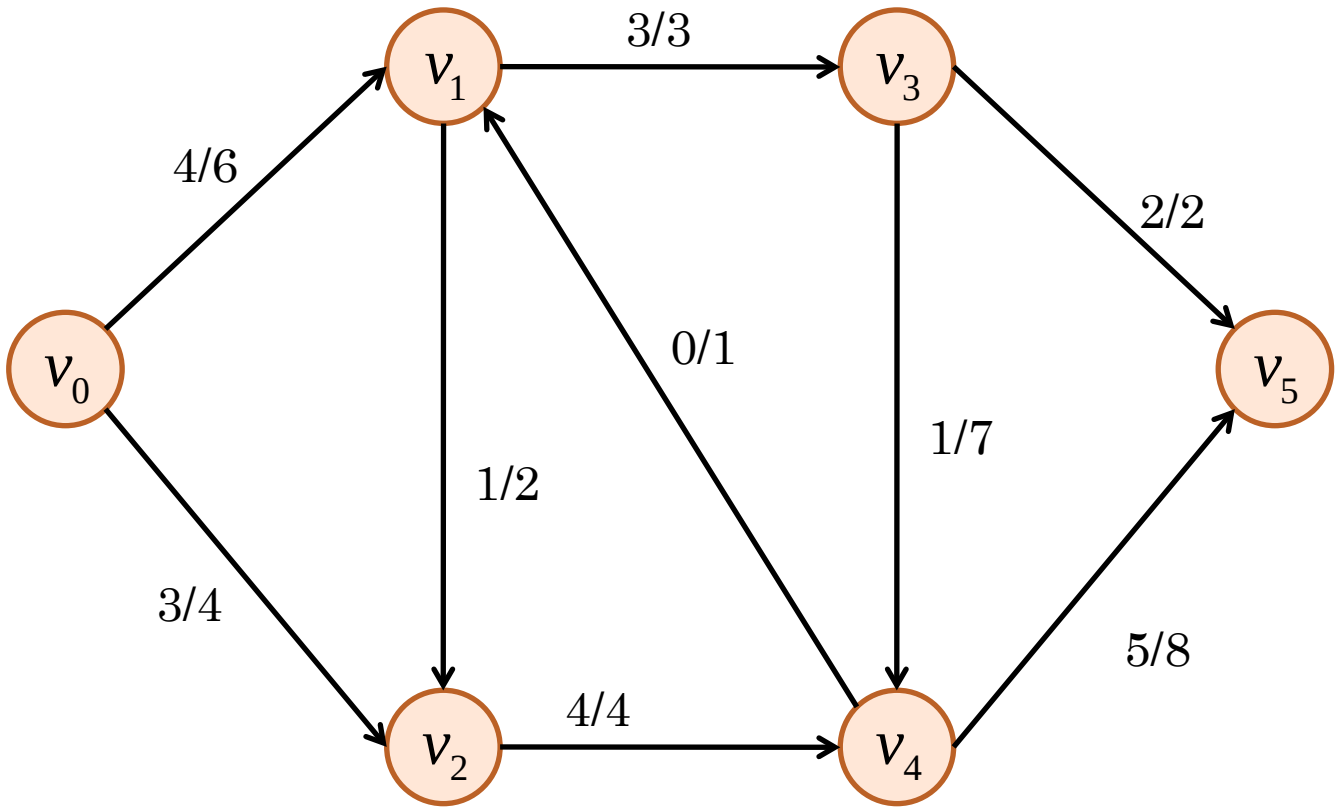
数字:容量



終点への有向道が無い

最大流量の実現

数字:流量/容量



層別ネットワーク(Layered Network)

- 補助ネットワーク　N_φ
- 効率的に利用して流量増加できる道を探す
- 層別ネットワークの導入

層別ネットワーク(Layered Network)

補助ネットワーク上で、始点s^+から最短でk回の移動で到達できる頂点の集合U_k

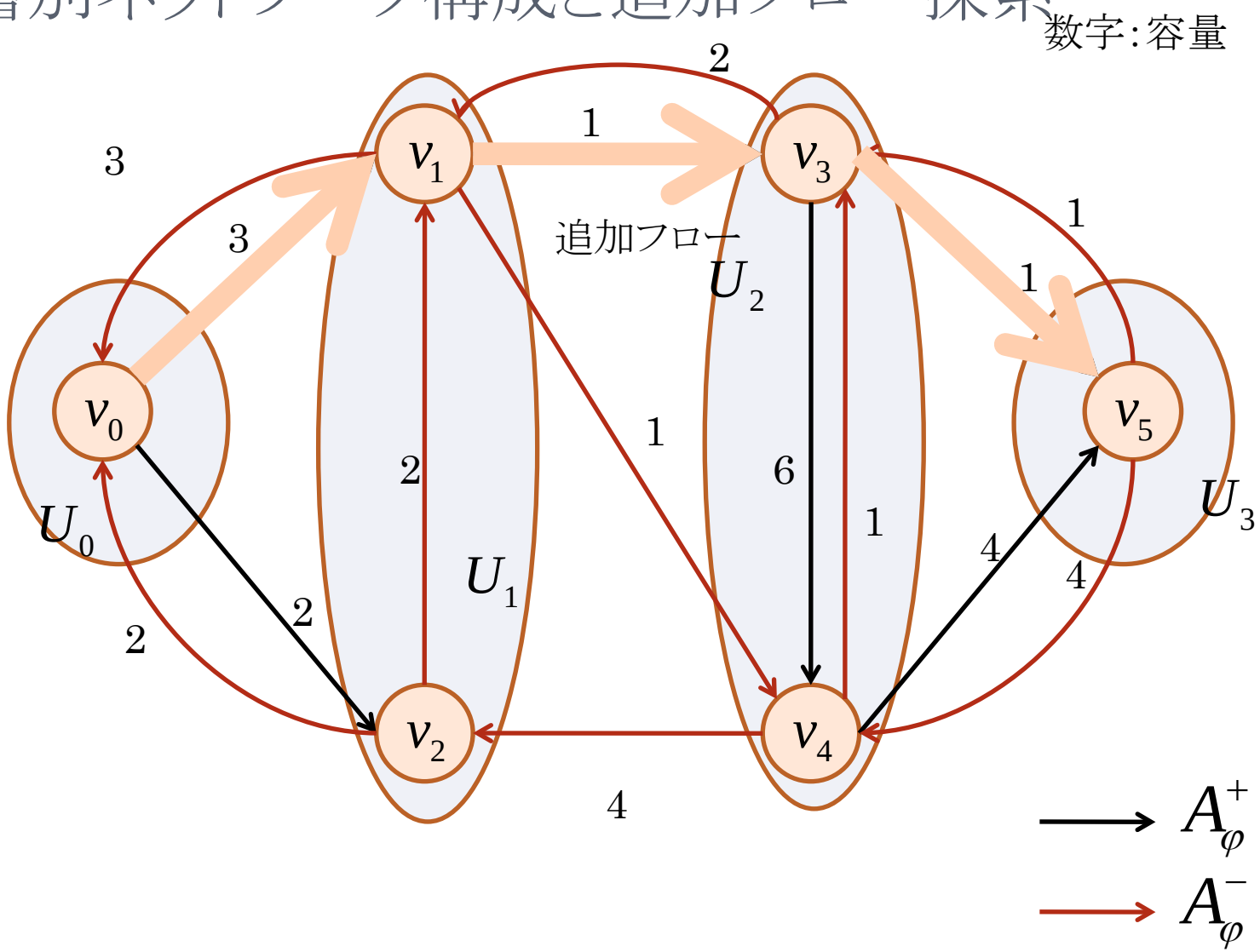
- 幅優先探索で構成できる
- U_kとU_{k+1}を結ぶ弧の集合A_k
- 終点s^-にはl回で到達すると仮定する

$$\tilde{U}_\varphi\left(\tilde{G}_\varphi\left(\tilde{V}_\varphi,\tilde{A}_\varphi\right),s^+,s^-,c_\varphi\right)$$

$$\tilde{A}_\varphi=\bigcup_{k=0}^{l-1}A_k$$

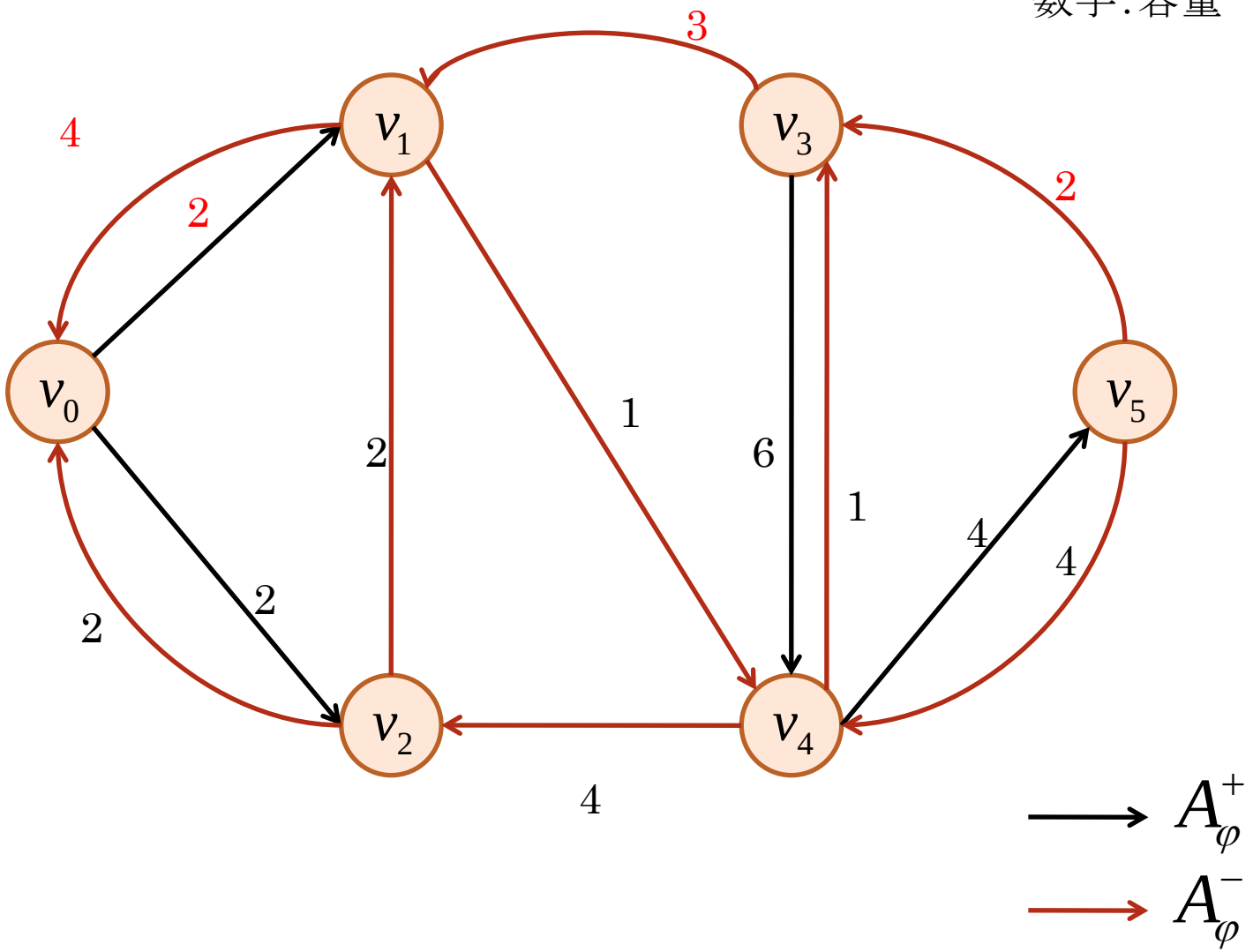
$$\tilde{V}_\varphi=\bigcup_{k=0}^{l}U_k$$

層別ネットワーク構成と追加フロー探索

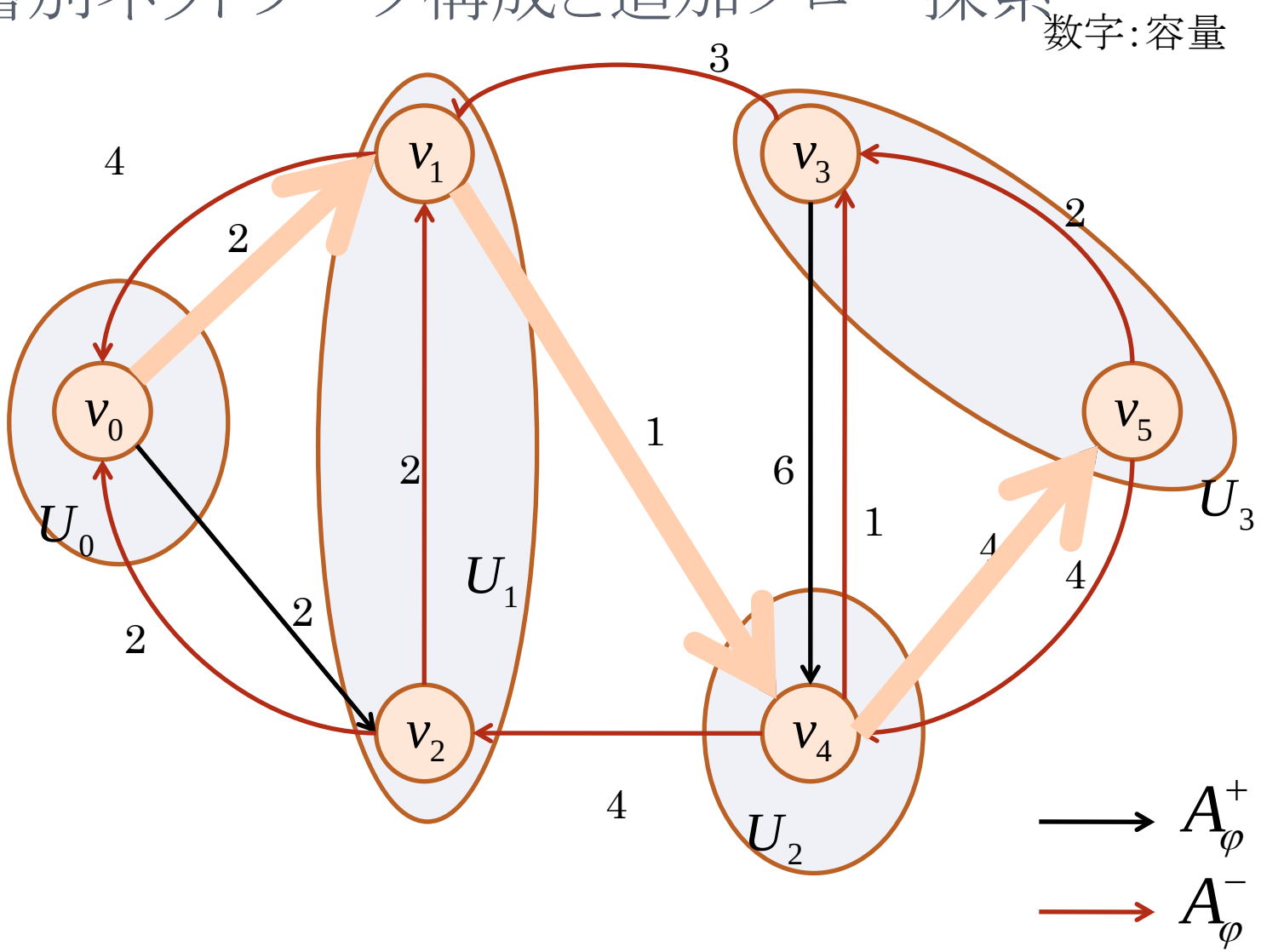


補助ネットワークの更新

数字:容量

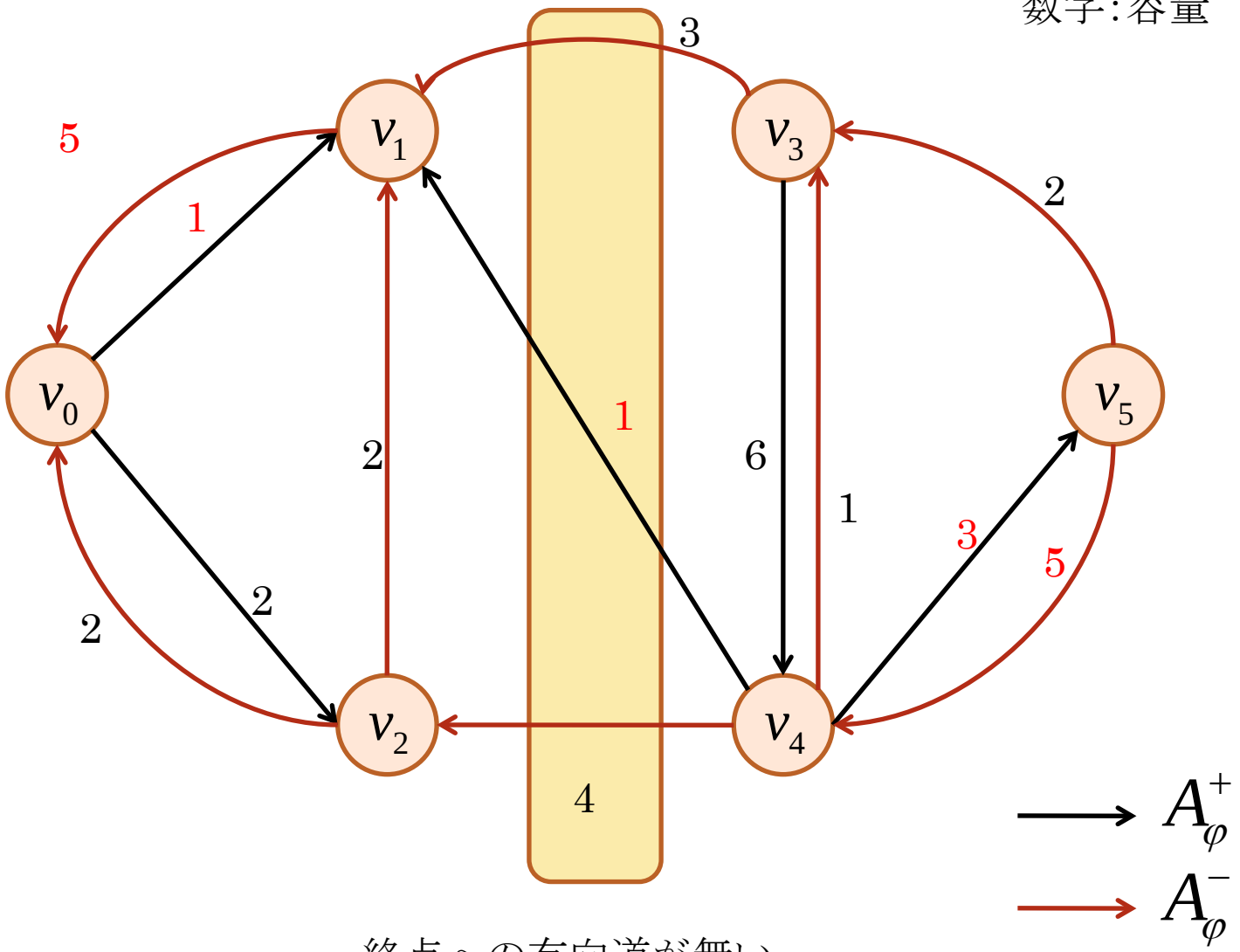


層別ネットワーク構成と追加フロー探索



補助ネットワークの更新

数字:容量



終点への有向道が無い

アルゴリズム

$\varphi \leftarrow 0$

補助ネットワーク N_φ を作る

while (N_φ に始点 s^+ から終点 s^- への有向道 P がある) {

　　層別ネットワーク $\tilde{N}_\varphi$ を構成する

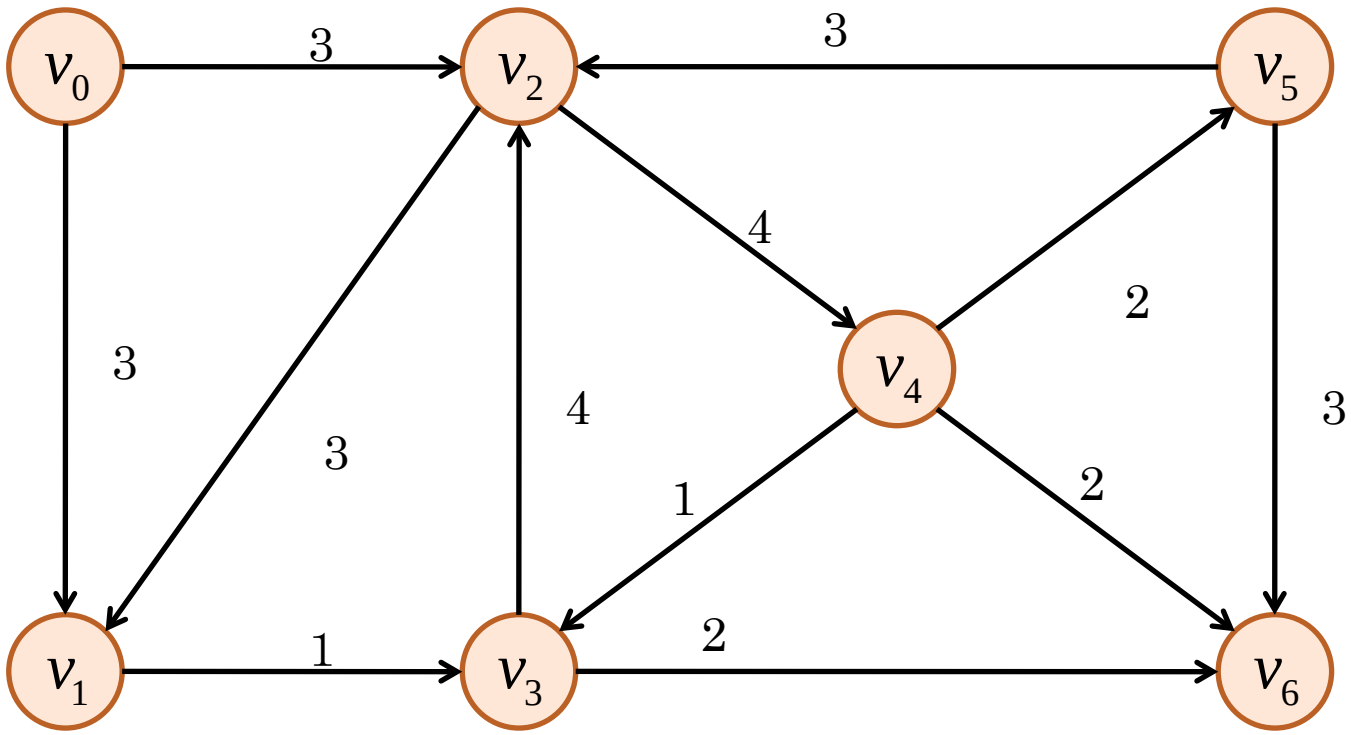
　　$\tilde{N}_\varphi$ の増加道を見つける

　　φ を更新する

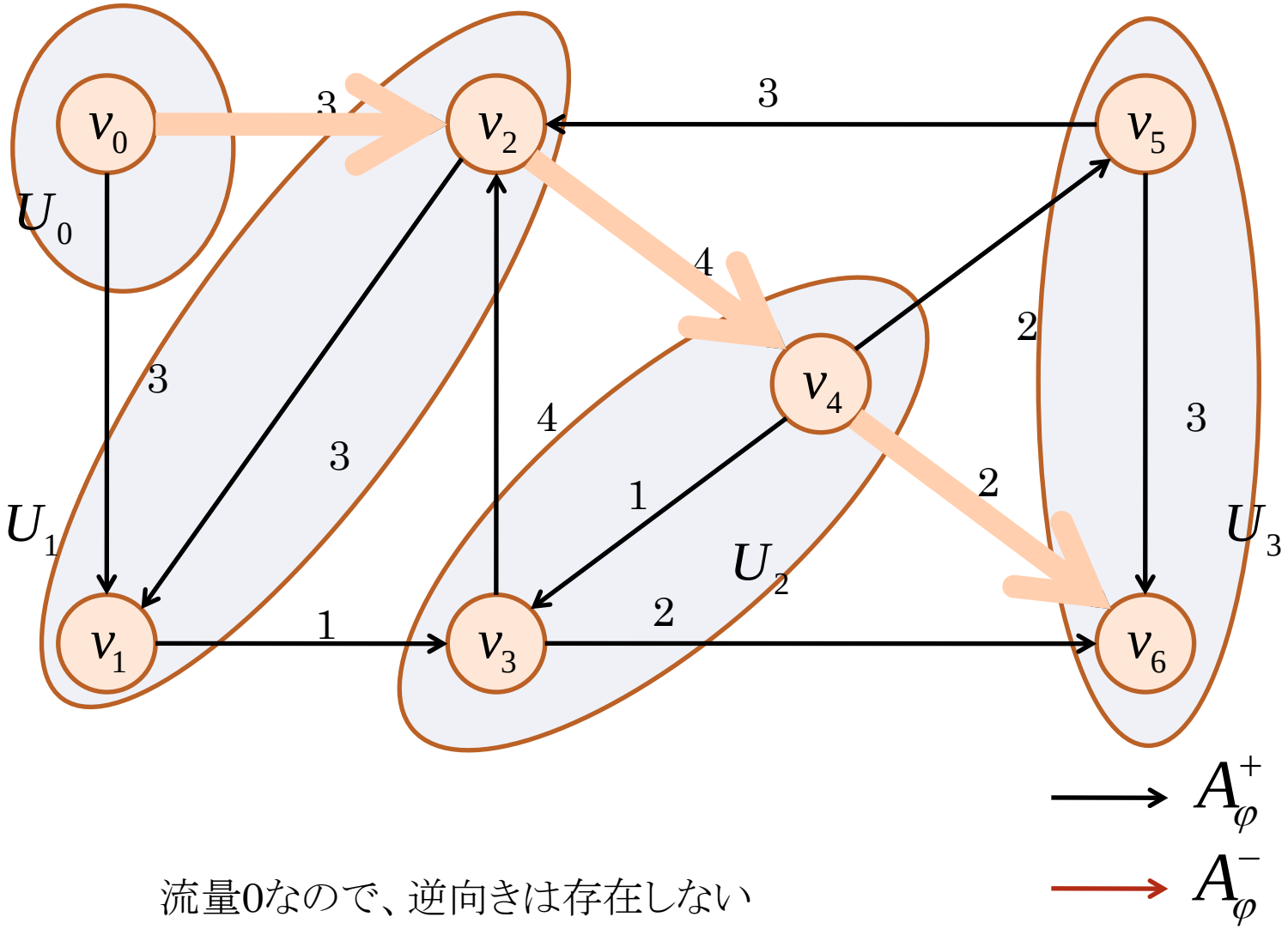
　　補助ネットワーク N_φ を作る

}

例2　$v_0 \to v_6$

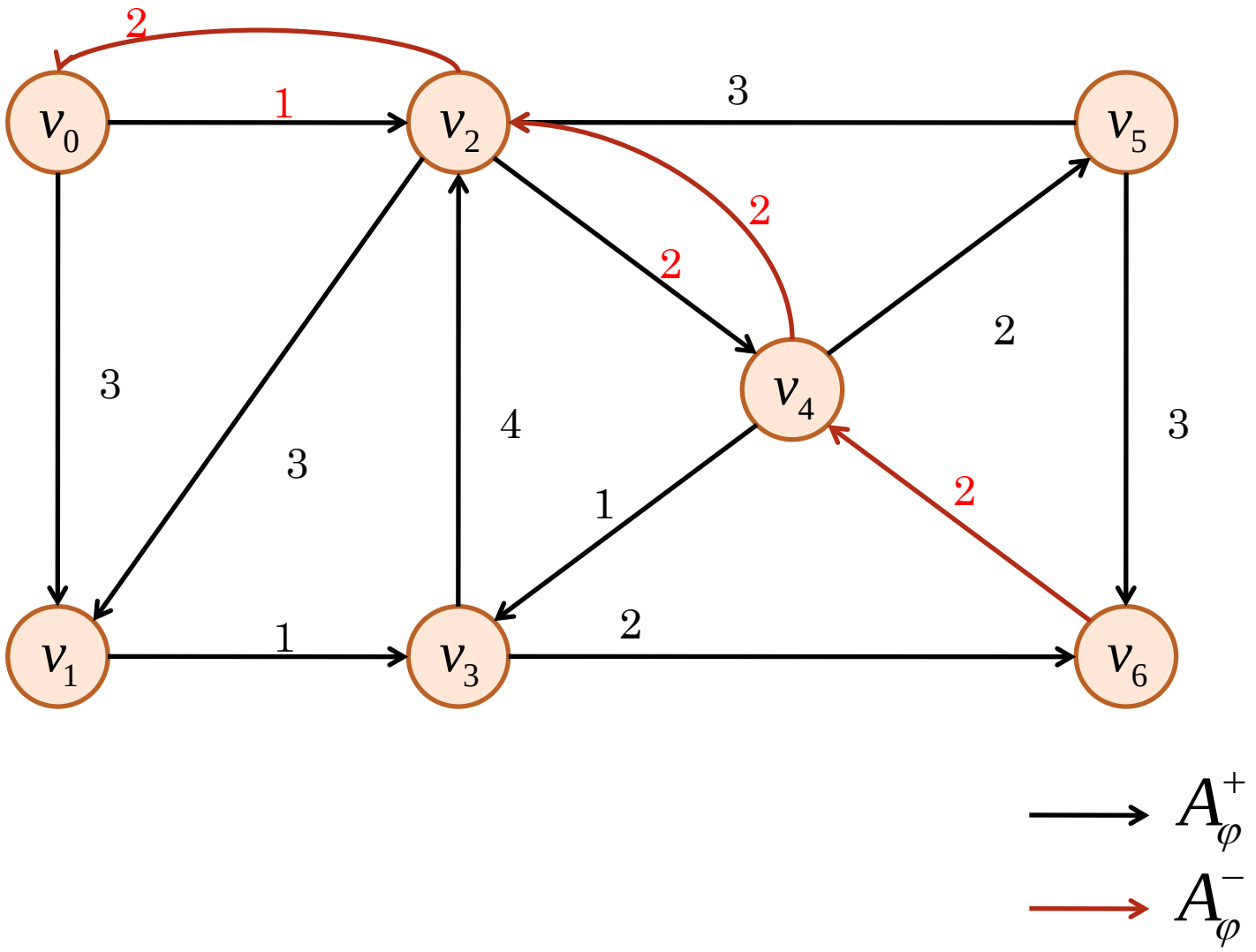


例2 :層別ネットワークと増加道探索

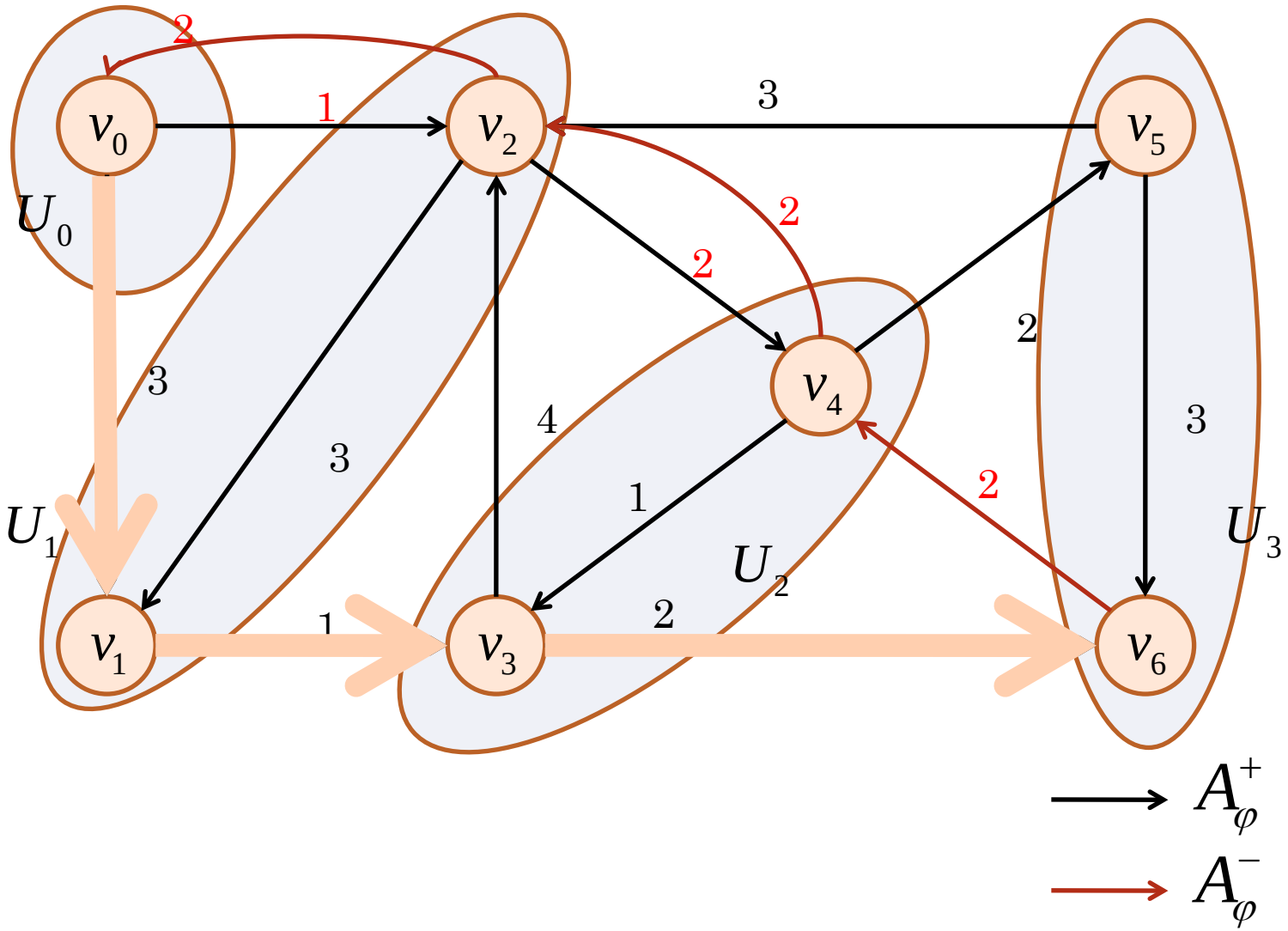


流量0なので、逆向きは存在しない

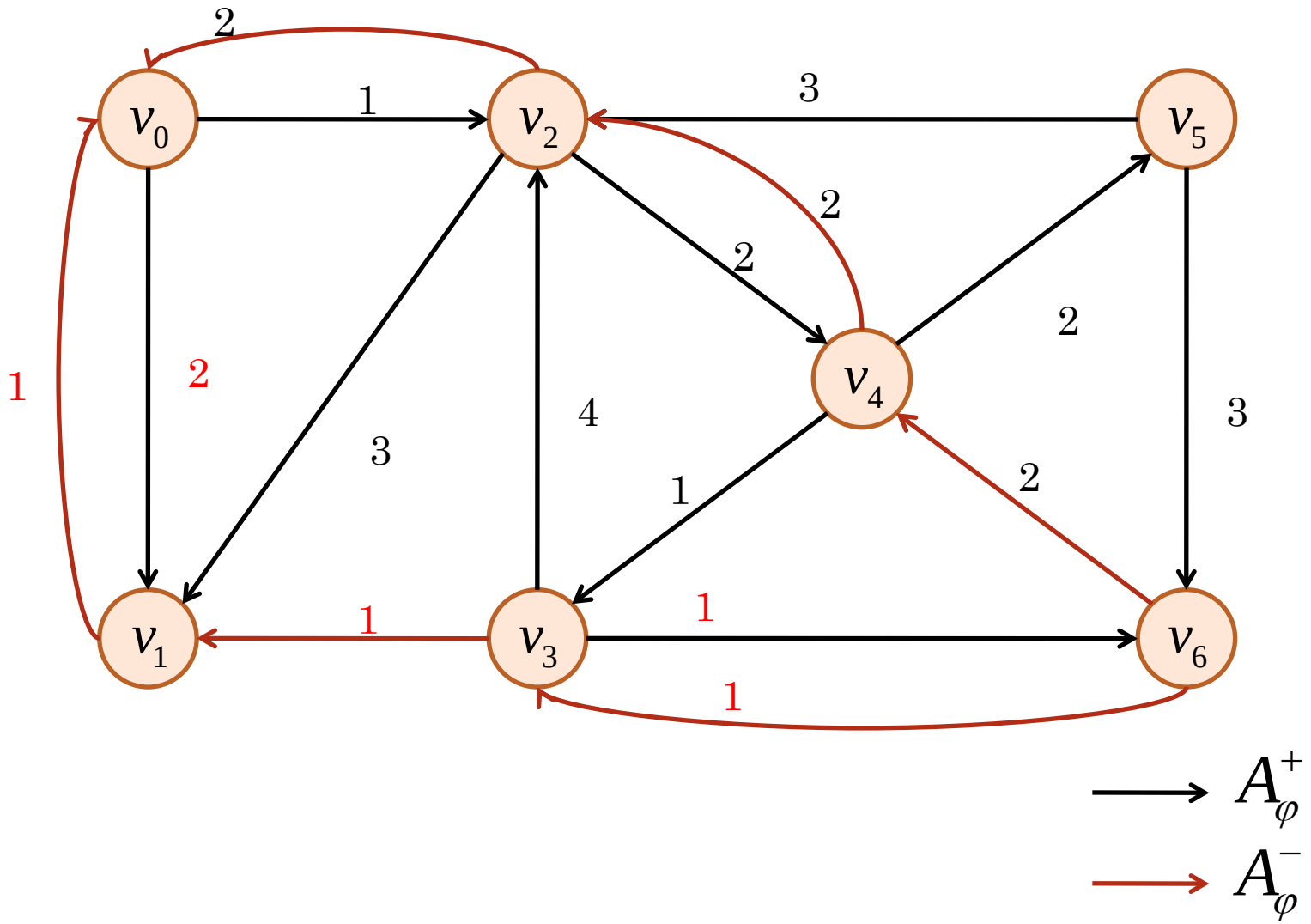
例2：補助ネットワーク更新



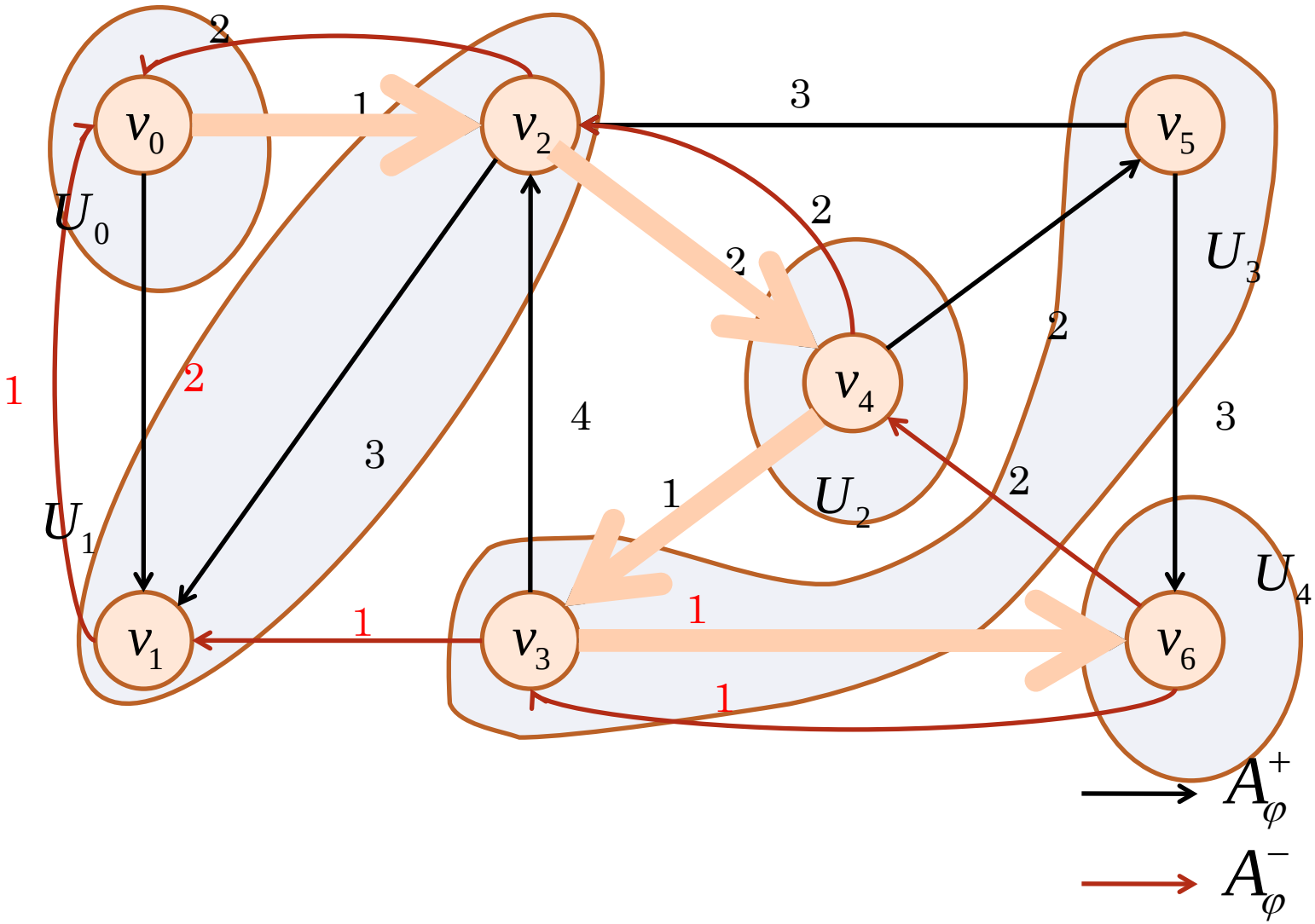
例2：層別ネットワークと増加道探索



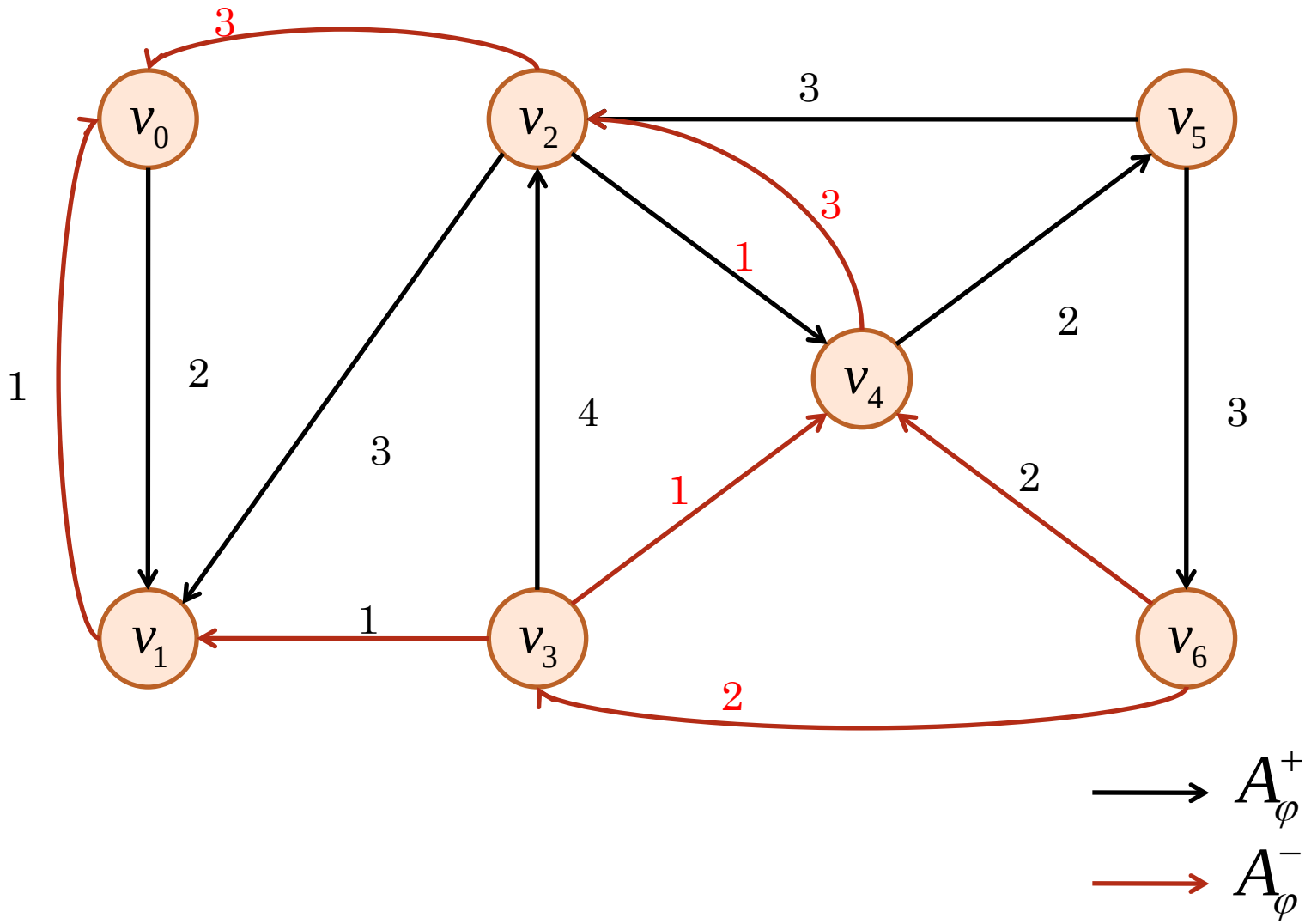
例2：補助ネットワーク更新

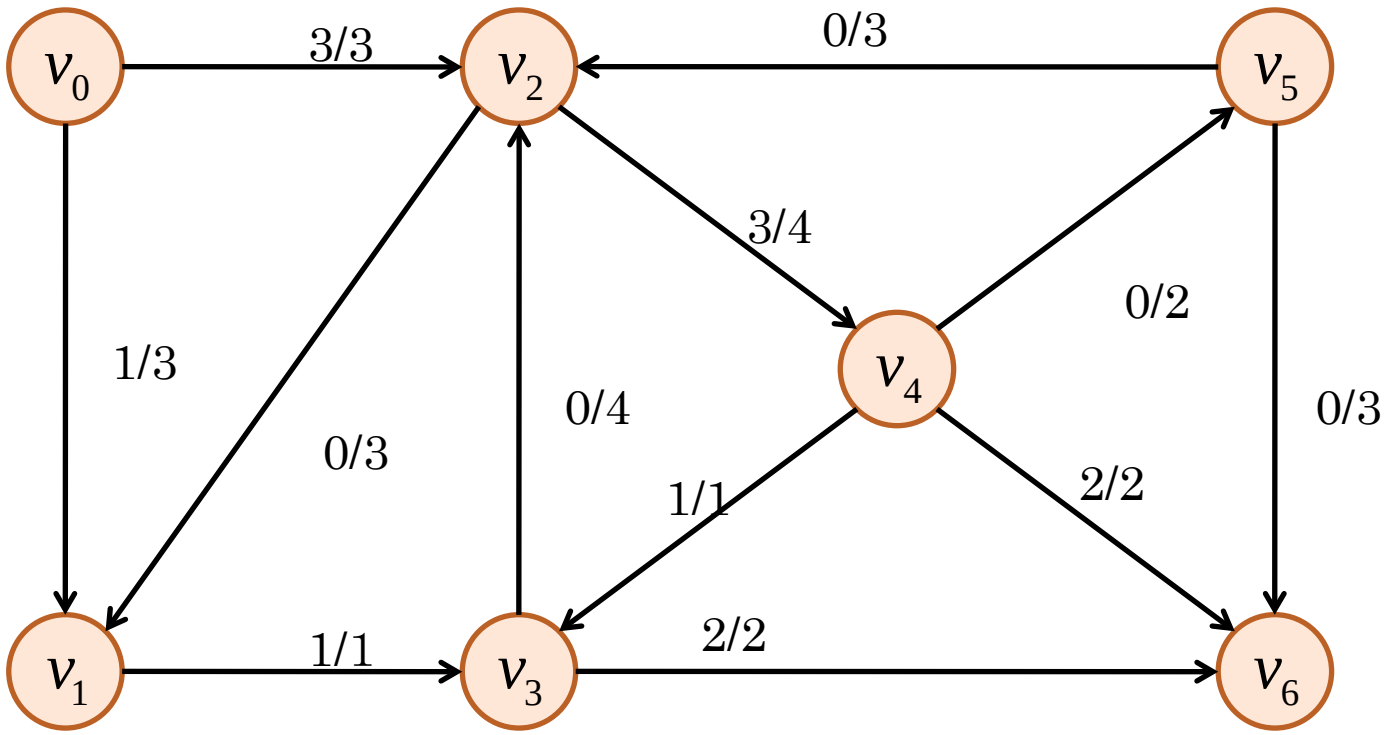


例2：補助ネットワーク更新



例2：補助ネットワーク更新



例2:最大流量の実現

数字:流量/容量