序論:この講義の目的

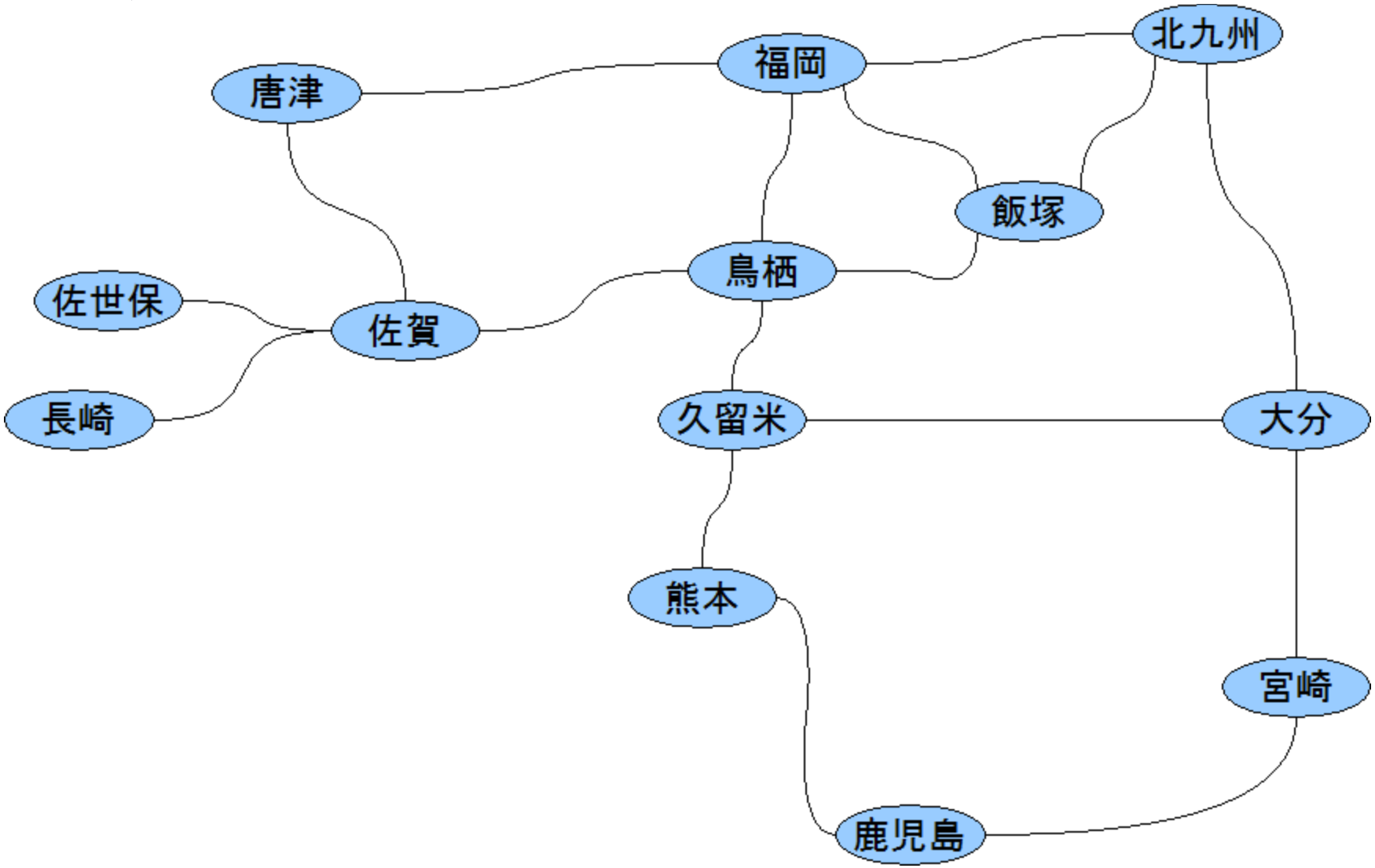
担当:只木進一(総合情報基盤センター)

グラフ(GRAPH)とは

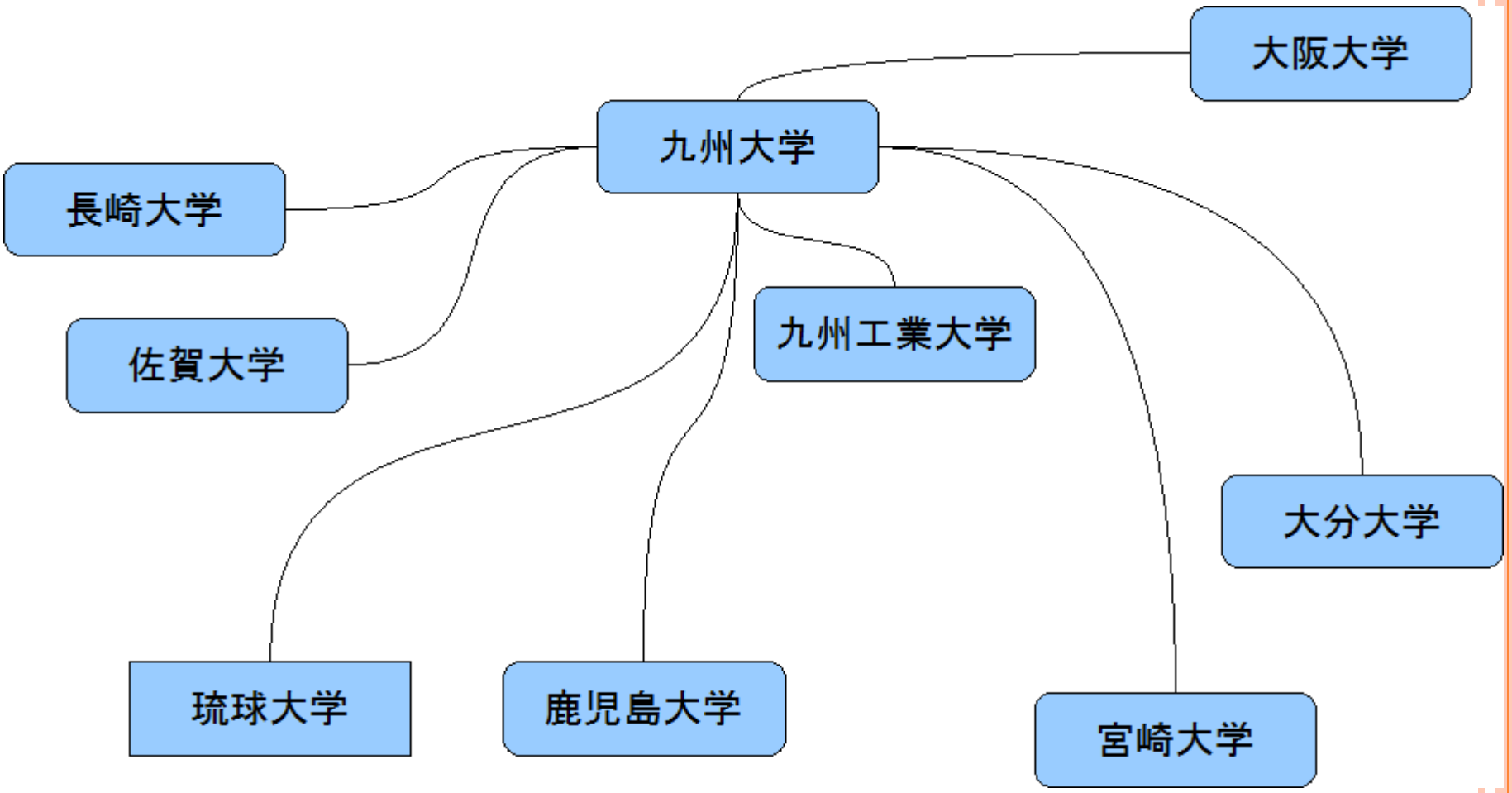
- 要素とその関係を図示する
  - 交通網:都市とそれを結ぶ交通
  - コンピュータとネットワーク
  - Webページ間のリンク
  - 部品の構成図
  - 組織構成・人の繋がり
  - 関係データベース
  - 食物連鎖
  - 代謝反応系
- 周囲にはグラフやネットワークが溢れている

具体的に想像しよう

例:都市間の鉄道



例：SINET (Science Information Network)



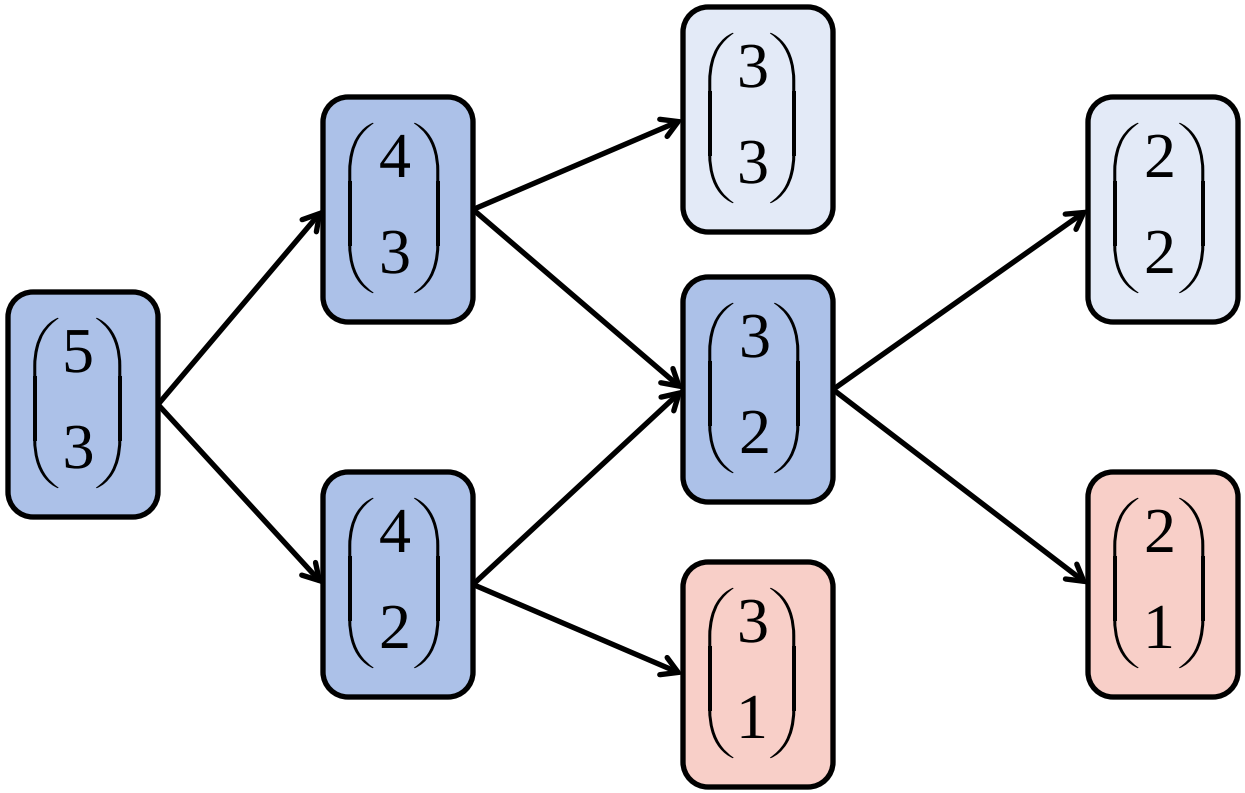
グラフ(GRAPH)とは：2

- 処理の流れを図示する
  - 処理の流れ
  - クラスオブジェクトとその呼出
  - 再帰的関数のスタック
  - 状態遷移図

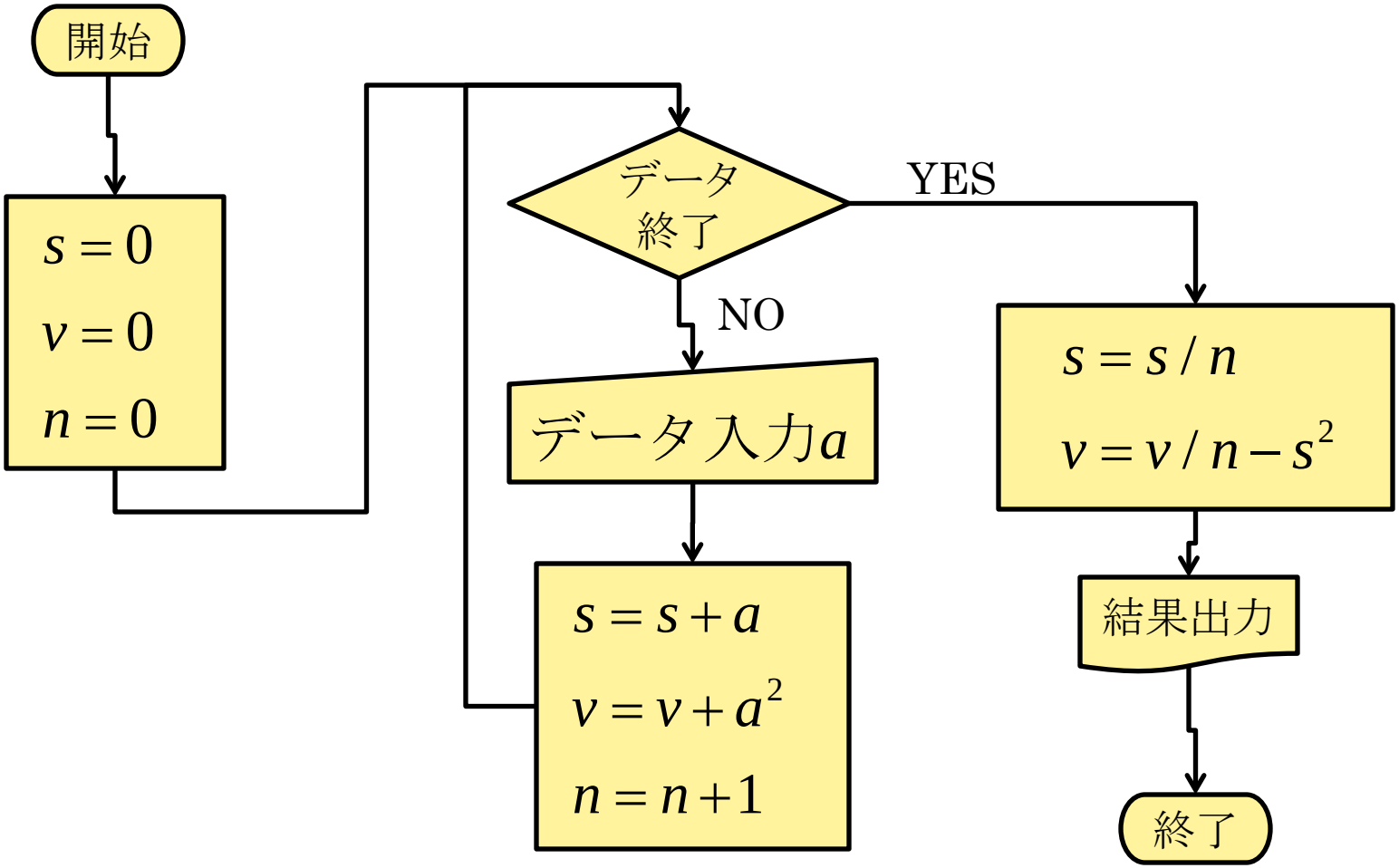
- 課題：例を3つ作りなさい

例：二項係数の漸化式

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$$



例：流れ図（平均と分散）



グラフとネットワークを使って問題を整理

- 我々人間は、式よりも図が理解しやすい

- 要素間の関係の整理
- 要素のグループ分け
- 最短経路を探す
- 最適な連絡網を探す
- 隘路を探す

グラフを抽象化して考える

- 共通点は何か
  - 頂点と辺の集合
  - つながり方に注目している
- 数学の言葉で書く
  - モデル化
  - 抽象化と厳密化
- アルゴリズムを作る
  - 最適化、探索など
  - 問題解決手順を明確にする

グラフに付随する性質

- 点ごとの性質
  - 重要性
  - 寿命
- 辺ごとの性質
  - 距離
  - その辺を流れるモノの量

グラフの何を調べるのか

- 全ての経路を列挙する
- 最短の経路を探す
- 最も効率的な路線図を作る
- 冗長性のあるネットワークを構成する
- 探索の計算量を見積もる

必要な知識

- 集合
  - グラフは点の集合と弧の集合で構成される
- 順列・組合せ
  - 何通りの経路が可能か
- 数学的帰納法
- オブジェクト指向プログラミング
  - アルゴリズムをコード化
  - グラフを記述するデータ構造
  - List, Queue, Stack

復習:集合

- 有限集合 $X \quad Y$
- 集合の要素数 $|X|$
- 集合の和

$$X \cup Y = \{e | e \in X \vee e \in Y\}$$

- 集合の共通部分

$$X \cap Y = \{e | e \in X \wedge e \in Y\}$$

- 差集合

$$X \setminus Y = \{e | e \in X \wedge e \notin Y\}$$

復習:特別な集合

- 自然数全体　N
- 整数全体　Z
- 実数全体　R
- 有理数全体　Q

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

復習：数学的帰納法

- 自然数nに関する命題S(n)
- 証明
  - S(1)は正しいことを示す
  - S(n)が正しいと仮定すると、S(n+1)も正しいことを示す
  - よって任意のnに対して、命題S(n)は正しい
- 注意
  - “・・・”を証明には使わないこと。曖昧になる

数学的帰納法の例：等比級数

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

- n=0 $\quad \mathrm{LHS} = a^0 = 1,\ \mathrm{RHS} = \dfrac{1-a^1}{1-a} = 1$

- nに対して正しいと仮定する

代入

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1}$$

$$= \frac{1}{1-a}\left(1 - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}\right)$$

$$= \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$