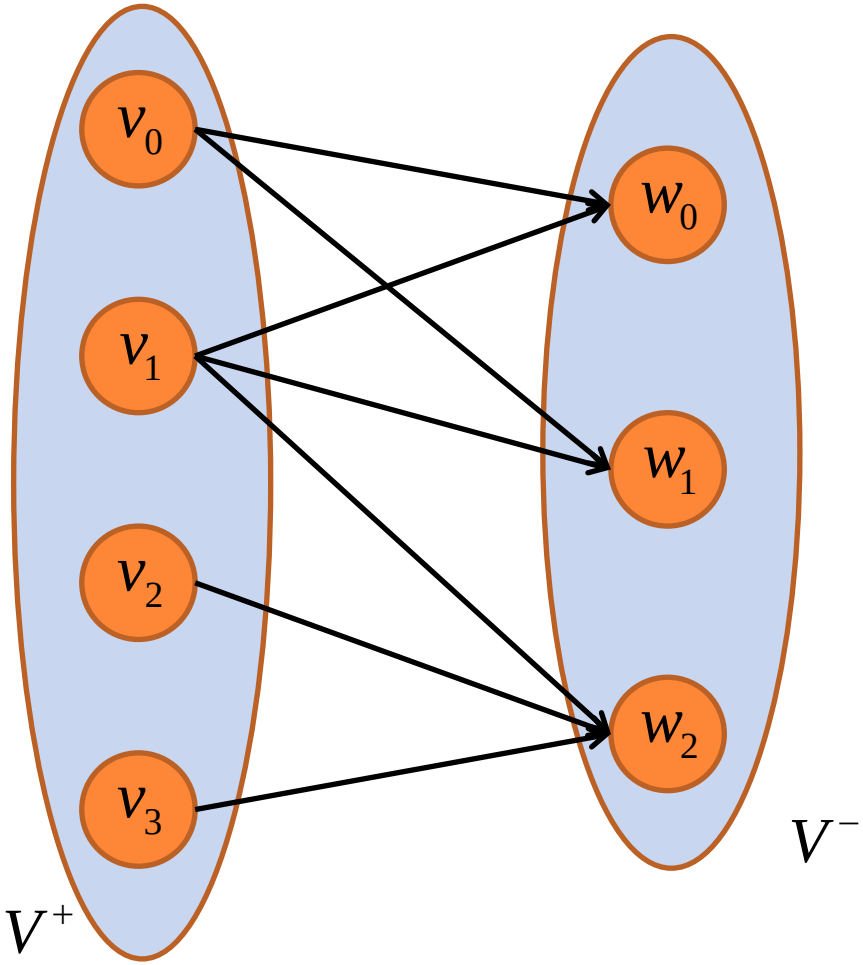
マッチングと被覆
Matching and Cover

何を考えるか

- 人と仕事の割り当て
  - 何通りの割り当てが可能か
  - 抜けが無いか
- 二部グラフで考える

二部グラフ(Bipartite Graphs)



$$G = \left(V^+, V^-, A\right)$$

マッチング(MATCHING)　$M \subseteq A$

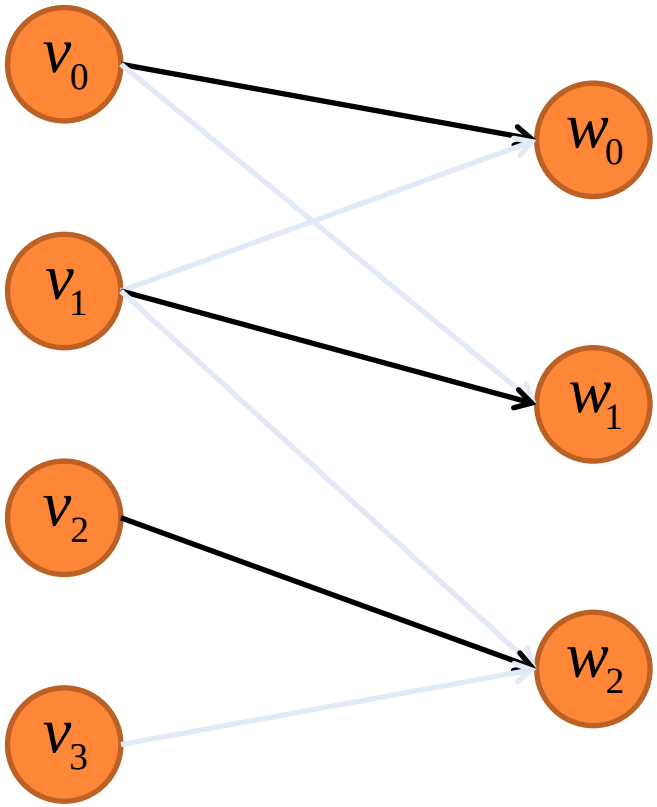
$M \subseteq A$が以下の性質を満たすとき、マッチングと呼ぶ

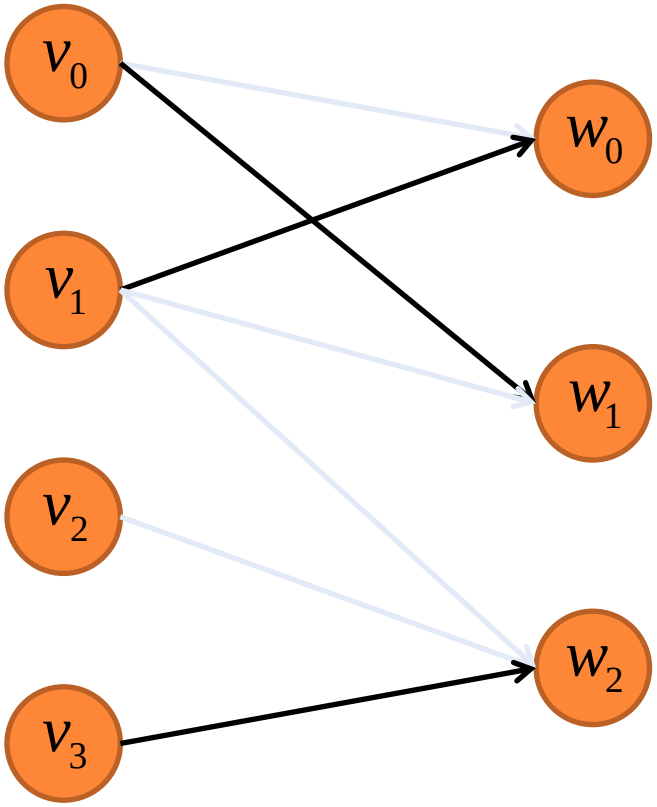
相異なる 2 つの弧$a_1, a_2 \in M$ に対して、

$$\left(\partial^+ a_1 \neq \partial^+ a_2\right) \wedge \left(\partial^- a_1 \neq \partial^- a_2\right)$$

が成り立つ。

マッチングの例



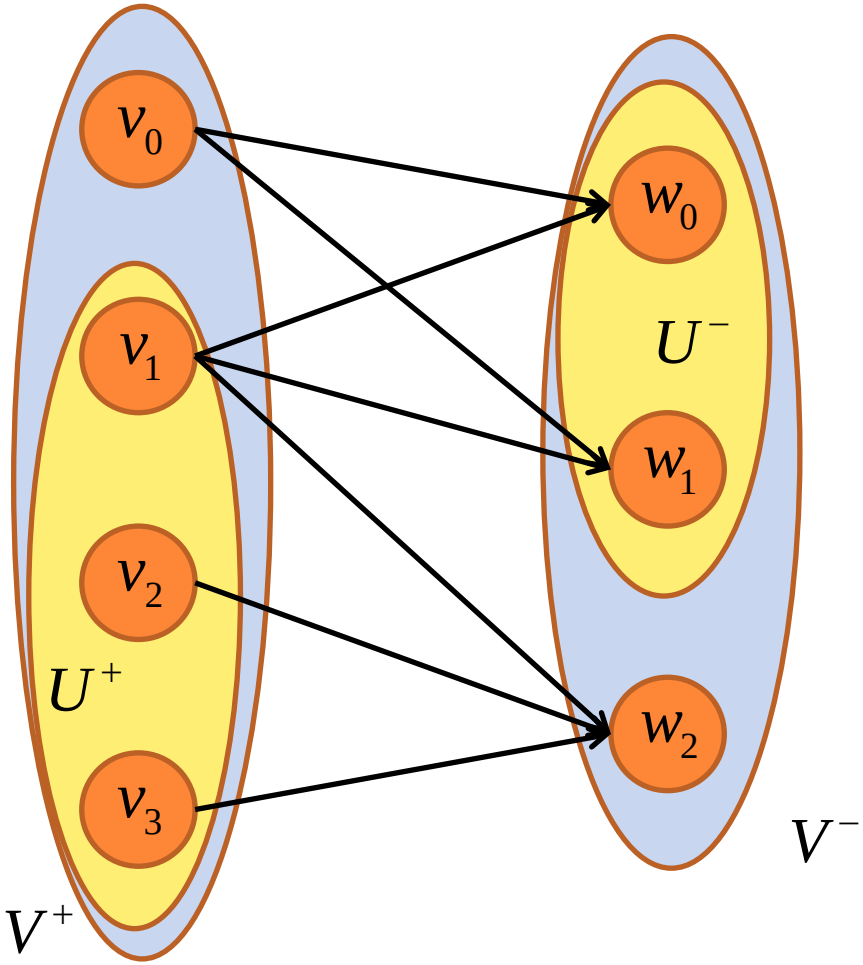


被覆(Cover) $\left(U^{+},U^{-}\right)$

二つの集合$U^{+}\subseteq V^{+}$及び$U^{-}\subseteq V^{-}$の順序対$\left(U^{+},U^{-}\right)$が以下の性質を満たす時、被覆と呼ぶ。

$$\forall a\in A,\left(\partial^{+}a\in U^{+}\right)\vee\left(\partial^{-}a\in U^{-}\right)$$

つまり、全てのこの始点または終点を覆うような頂点集合の順序対である。


v_0
v_1
v_2
v_3
U^+
V^+
w_0
w_1
w_2
U^-
V^-

最大マッチングと最小被覆

- 明らかに次式が成り立つ。

$$|M| \le |U^+| + |U^-|$$

- つまり、以下が成り立っている。

$$\max|M| \le \min\left(|U^+| + |U^-|\right)$$

- 更に、等号が成り立つことを示すことができる。

対応する二端子フローネットワークを構成

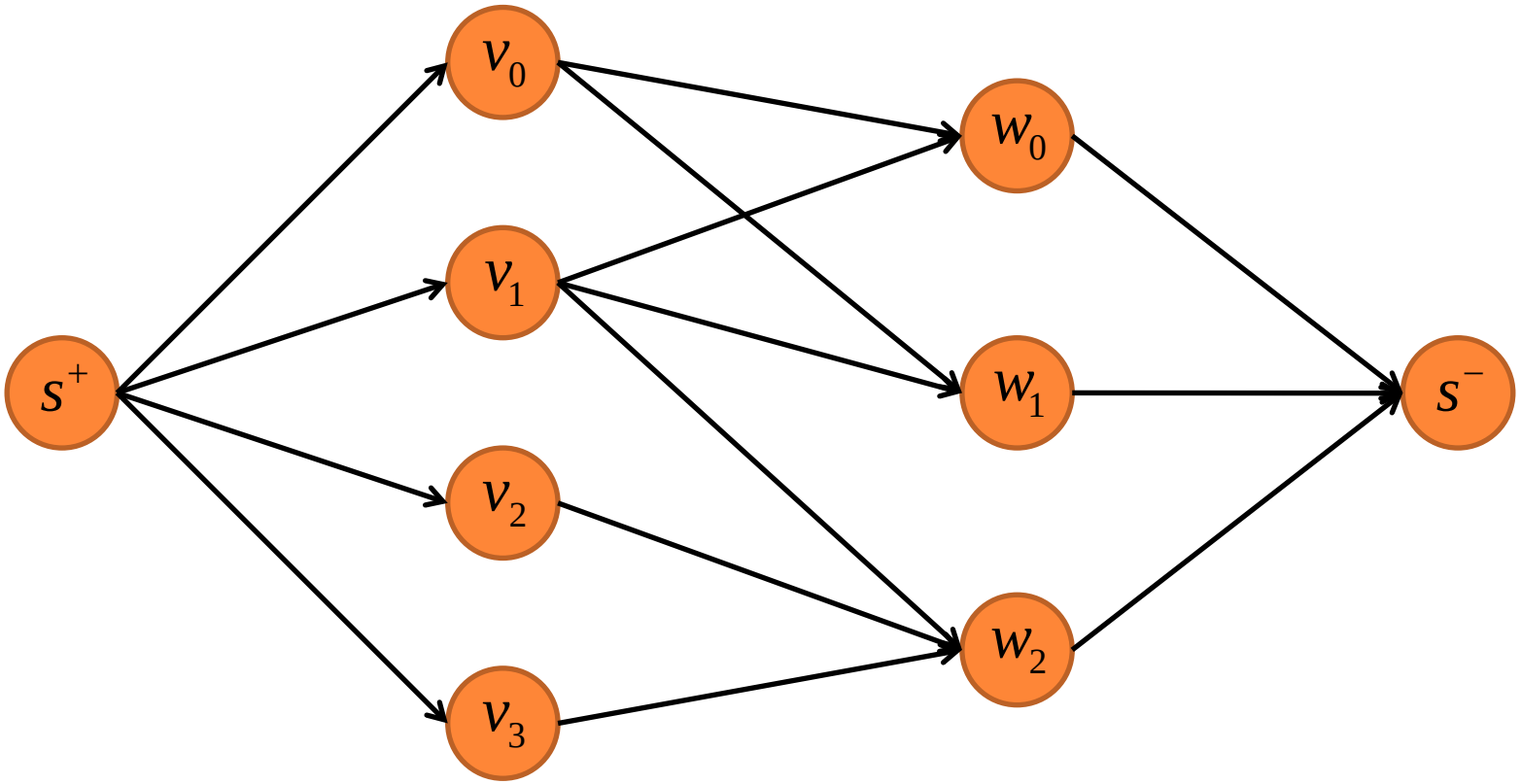
$$N_G = \left(\hat{G} = \left(\hat{V}, A\right), s^+, s^-, c\right)$$

$$\hat{V} = V^+ \cup V^- \cup \left\{s^+, s^-\right\}$$

$$\hat{A} = A \cup B^+ \cup B^-$$

$$B^\pm = \left\{\left(s^\pm, v\pm\right) \middle| v^\pm \in V^\pm\right\}$$

$$c(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in B^\pm \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$


s^+
v_0
v_1
v_2
v_3
w_0
w_1
w_2
s^-

マッチングと整数フロー

- $\forall v^{\pm} \in V^{\pm}$ に流れ込むフローは 1 または 0 である。
- $\varphi\left(\delta^{-} v^{+}\right)=1$ となる頂点 v^{+} から、一つの枝にだけ

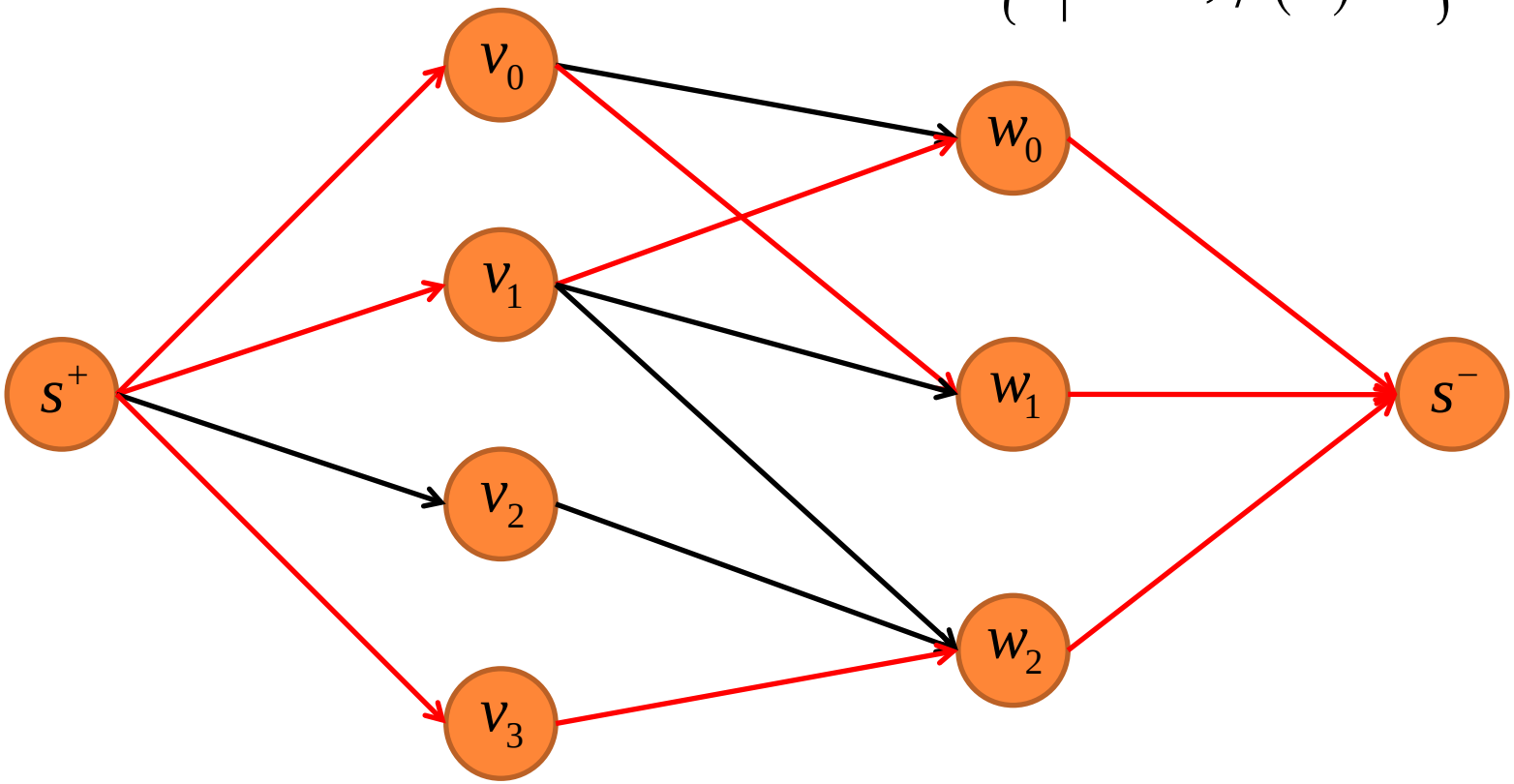
  $\varphi\left(\delta^{+} v^{+}\right)=1$ が流れる。

- $\varphi\left(\delta^{+} v^{-}\right)=1$ となる頂点 v^{-} には、一つの枝からだけ

  $\varphi\left(\delta^{-} v^{-}\right)=1$ が流れる。

- マッチングと整数フローが一対一対応になっている。

$$M = \left\{ a \middle| a \in A, \varphi(a) = 1 \right\}$$



被覆とカット

N_G の有限な容量を持つカット W に対して

$$U^+ = V^+ \setminus W$$

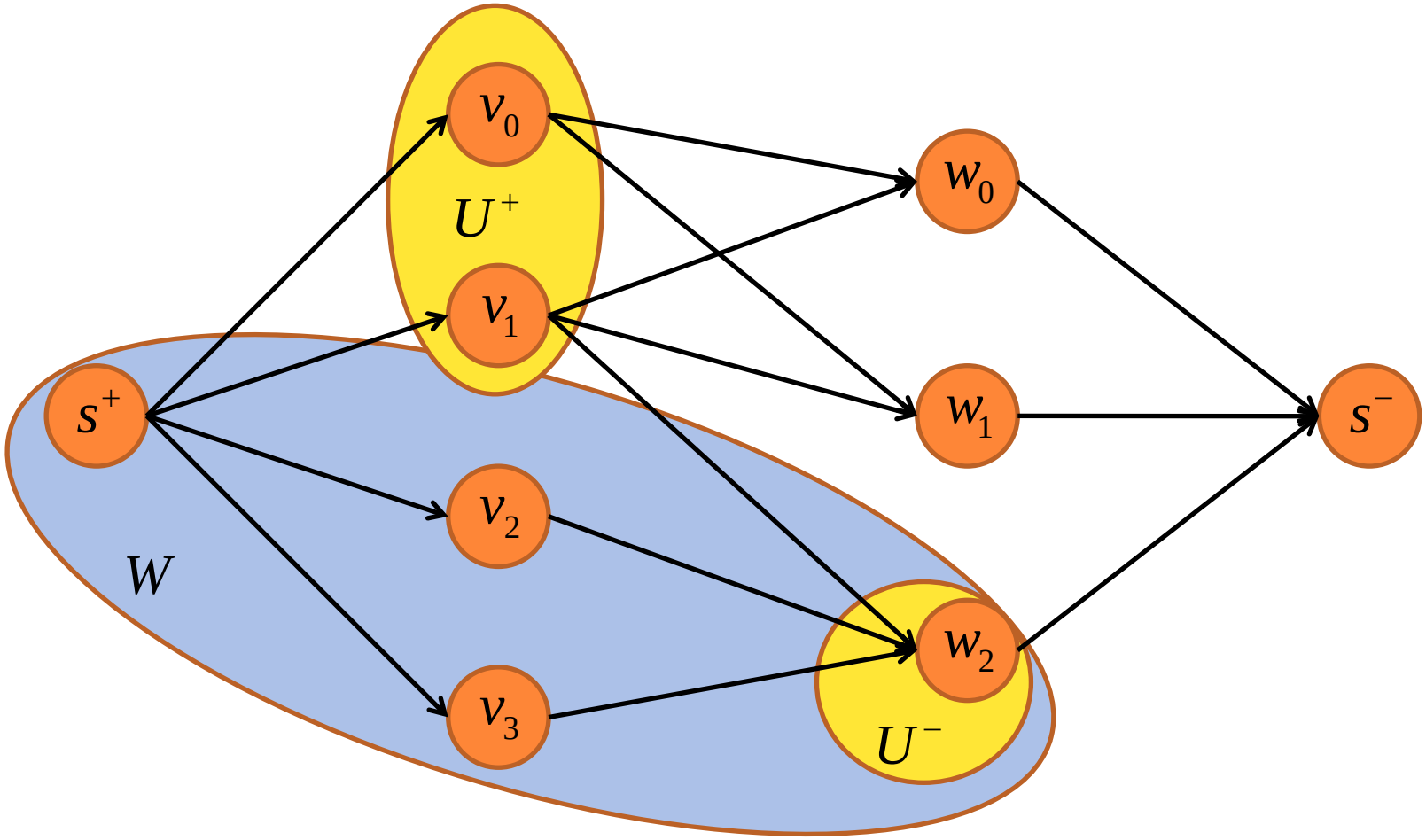
$$U^- = V^- \cap W$$

とおくと、$\left(U^+, U^-\right)$ は被覆である。

なぜなら、両端点が $\left(U^+, U^-\right)$ に属さない弧 a が存在した

とすると、a はカット W から出る弧であり、$c\left(a\right) = +\infty$ と

なり、W が有限な容量を持つことと矛盾する。


v_0
U^+
v_1
s^+
v_2
W
v_3
w_0
w_1
w_2
U^-
s^-

逆に、G の任意の被覆$\left(U^{+},U^{-}\right)$に対して

$$W=\left\{s^{+}\right\}\cup\left(V^{+}\setminus U^{+}\right)\cup U^{-}$$

とすると、W は N_G の有限な容量を持つカットとなる。

最大マッチング＝最小被覆

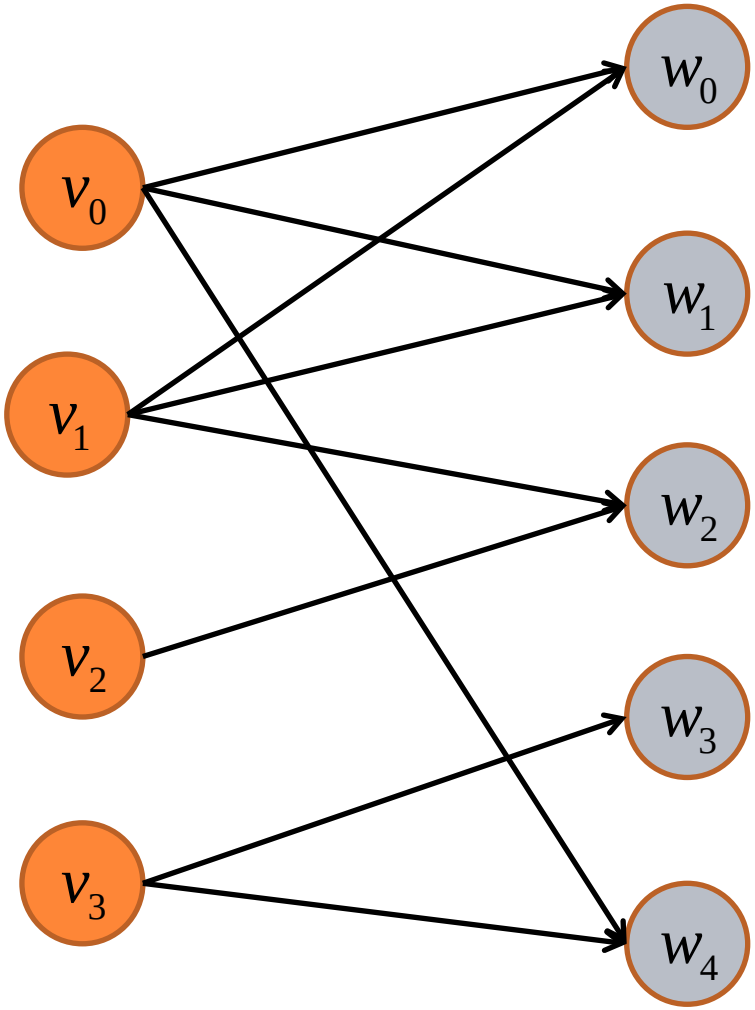
$$\max\left\{\left|M\right| \middle| M : G\text{のマッチング}\right\}$$

$$= \max\left\{Q(\varphi) \middle| \varphi : N_G\text{中の整数値フロー}\right\}$$

$$= \min\left\{\kappa_C(W) \middle| W : N_G\text{のカット}\right\}$$

$$= \min\left\{\left|U^+\right| + \left|U^-\right| \middle| \left(U^+, U^-\right) : G\text{の被覆}\right\}$$

応用例:枝彩色 (Edge Coloring)



$$G\left(V^+, V^-; A\right)$$

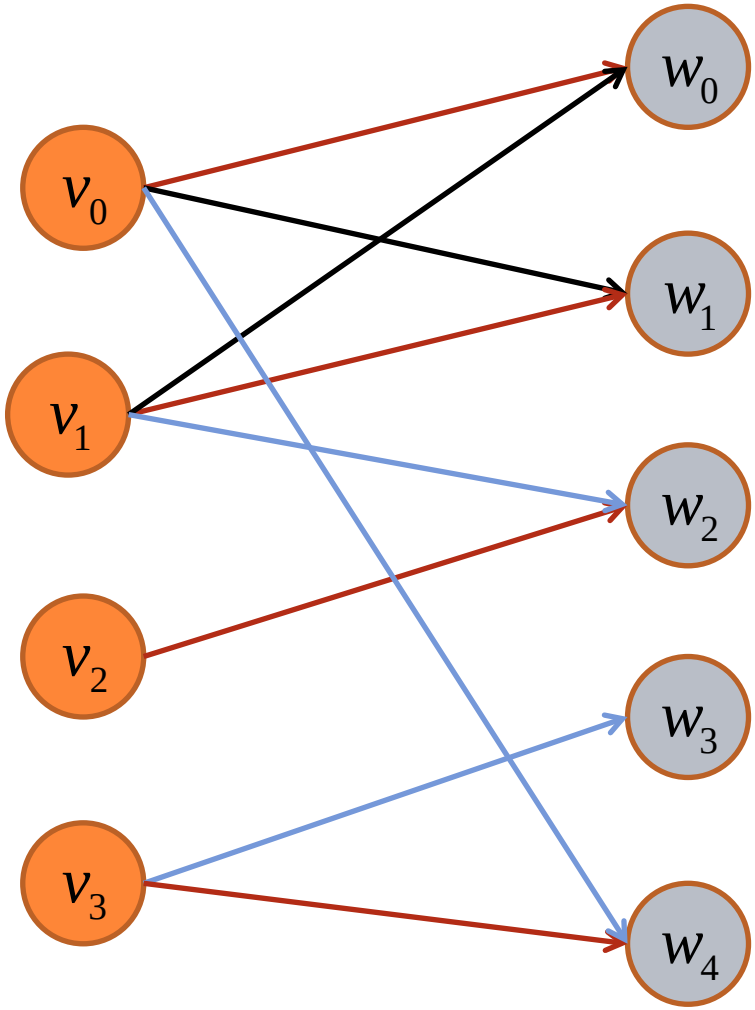
$V^+ = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$:ジョブの集まり

$V^- = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$: 機械の集まり

- 同時並行で処理できるジョブは?
- その組合せは?

- 一つの頂点に来る弧に異なる色を付ける
- 最小の色の数は?

- 最小マッチングと同じ問題

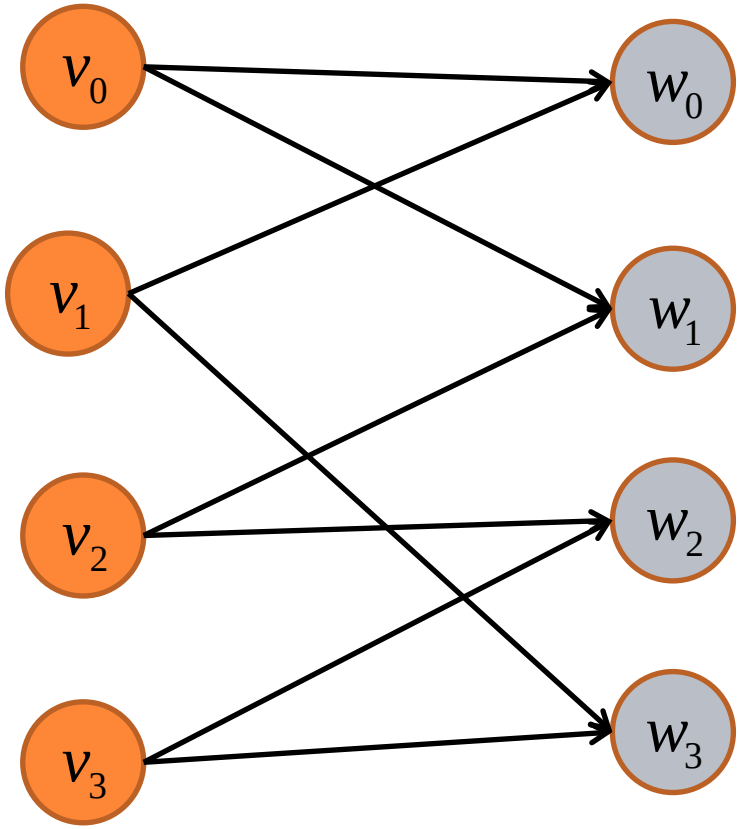


3色必要

正則2部グラフ(Regular Bipartite)

- 正則2部グラフ
  - 全ての頂点の次数が等しい2部グラフ
- k-正則な2部グラフ
  - 全ての頂点の次数がkである正則2部グラフ

例：2-正則2部グラフ



2色必要

k-正則2部グラフの
枝彩色にはk色
必要