連結性　マトロイド

グラフの連結性(CONNECTEDNESS)

- グラフG=(V, A)が連結(connected)
  - $\forall u \in V$から$\forall\ v \in V$へ道が存在する
  - DFSまたはBFSで決定できる
- 連結でないグラフの極大(頂点数が極大)な連結部分(connected component)

2連結性(2-CONNECTEDNESS)

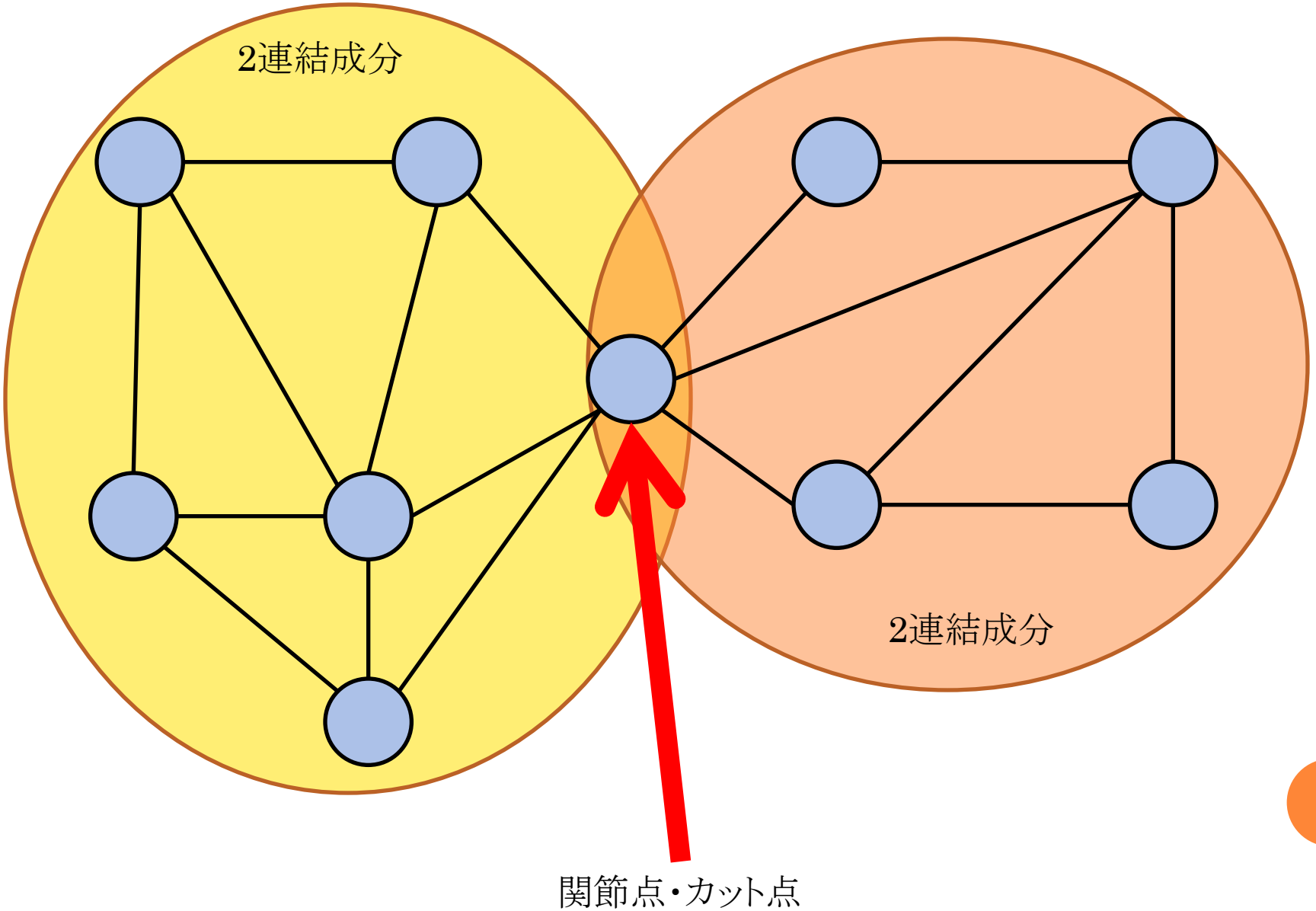
- 連結なグラフ$G=(V, A)$の部分グラフ$H_i=(V_i, A_i)$ $(i=1,2)$

$$|A_i| \geq 1, A_1 \cup A_2 = A, A_1 \cap A_2 = \varnothing$$
$$V_1 \cup V_2 = V, |V_1 \cap V_2| = 1$$

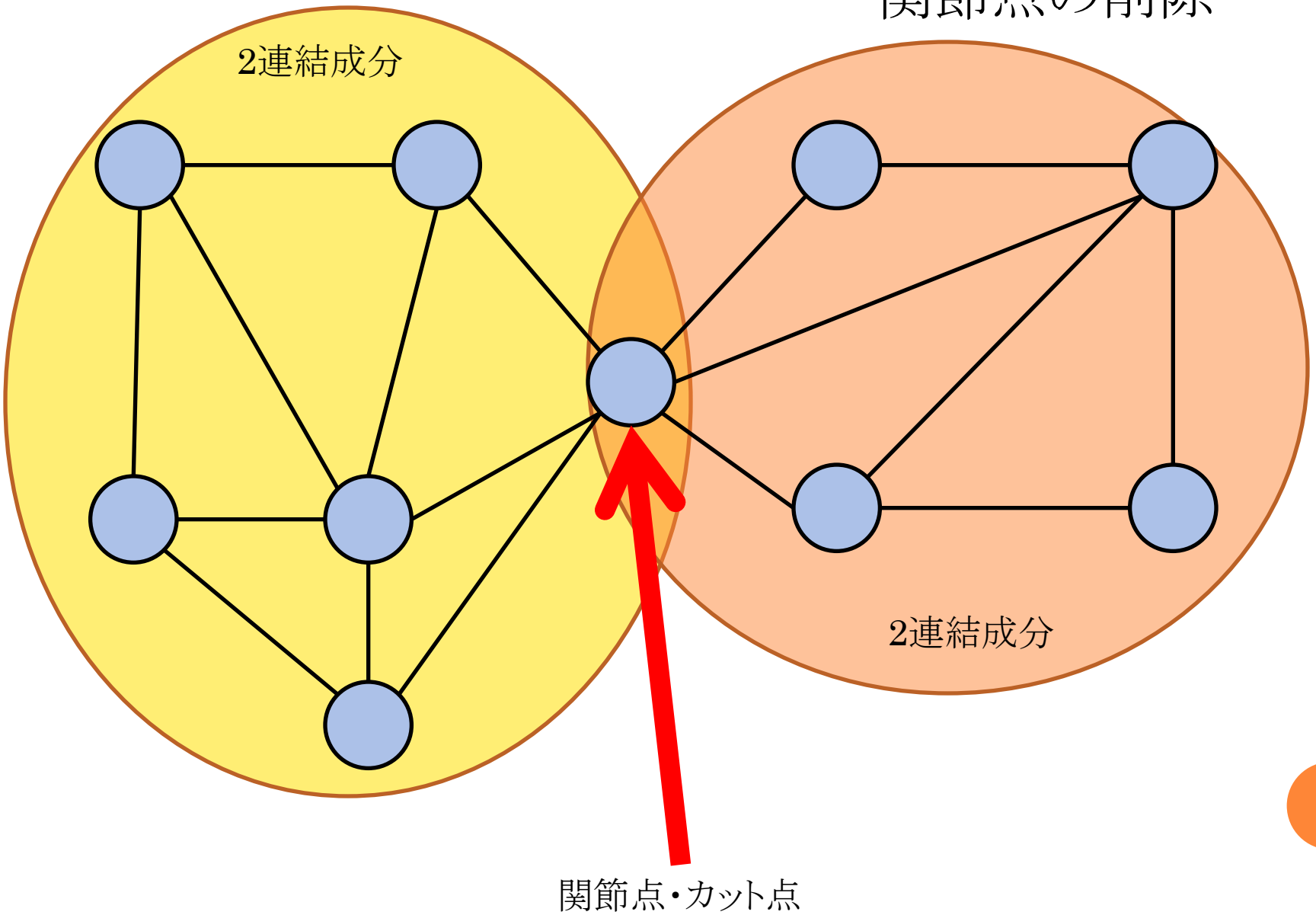
- H_iを2連結成分と呼ぶ
- 関節点(articulation vertex)またはカット点(cut-vertex)

$$|c| = V_1 \cap V_2$$

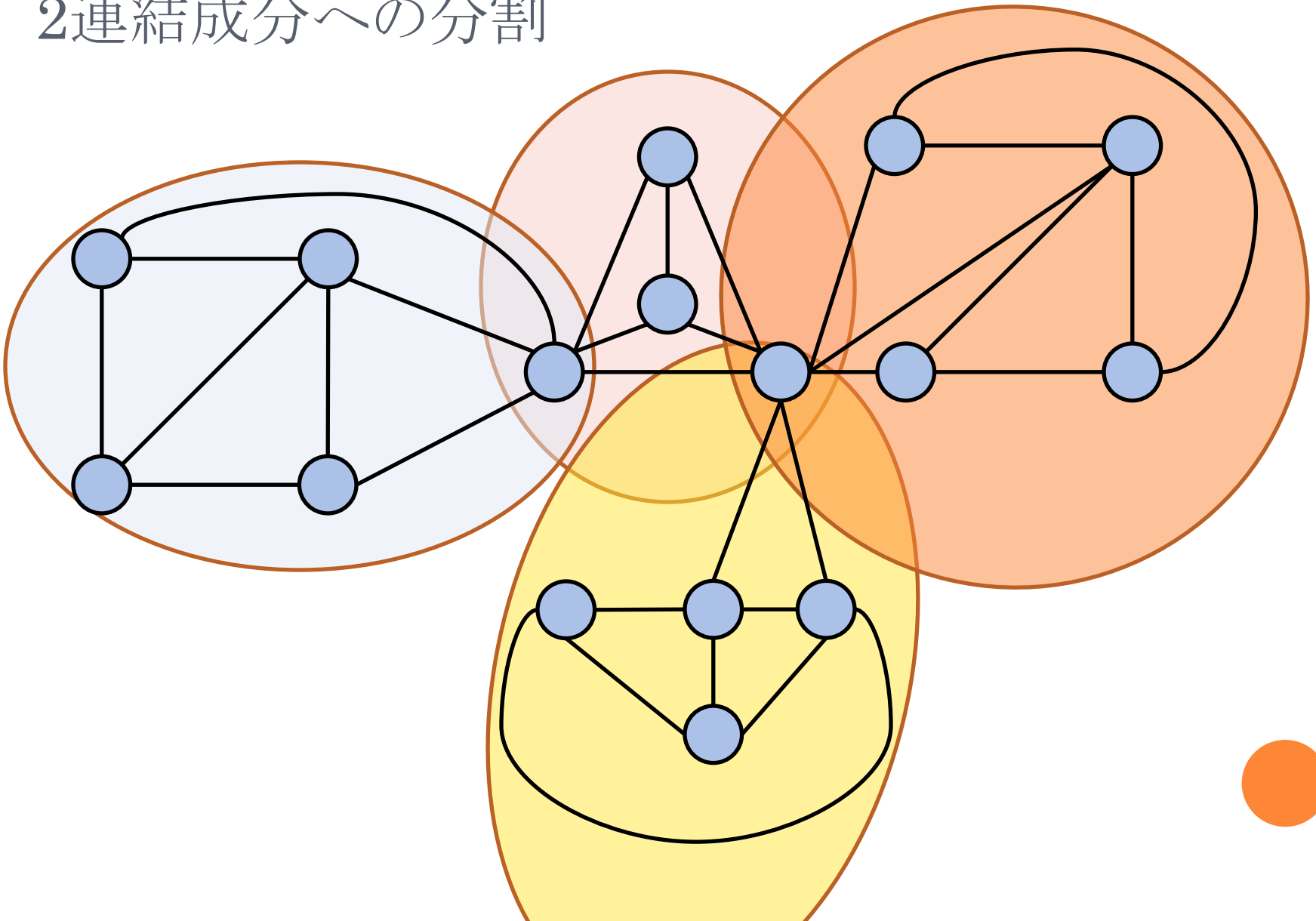
  - この頂点を削除すると、グラフが二つに切り離される
- 関節点を持たない連結グラフ
  - 2連結または非可分(non-separable)


2連結成分
2連結成分
関節点・カット点

関節点の削除



2連結成分への分割



3連結性(3-CONNECTEDNESS)

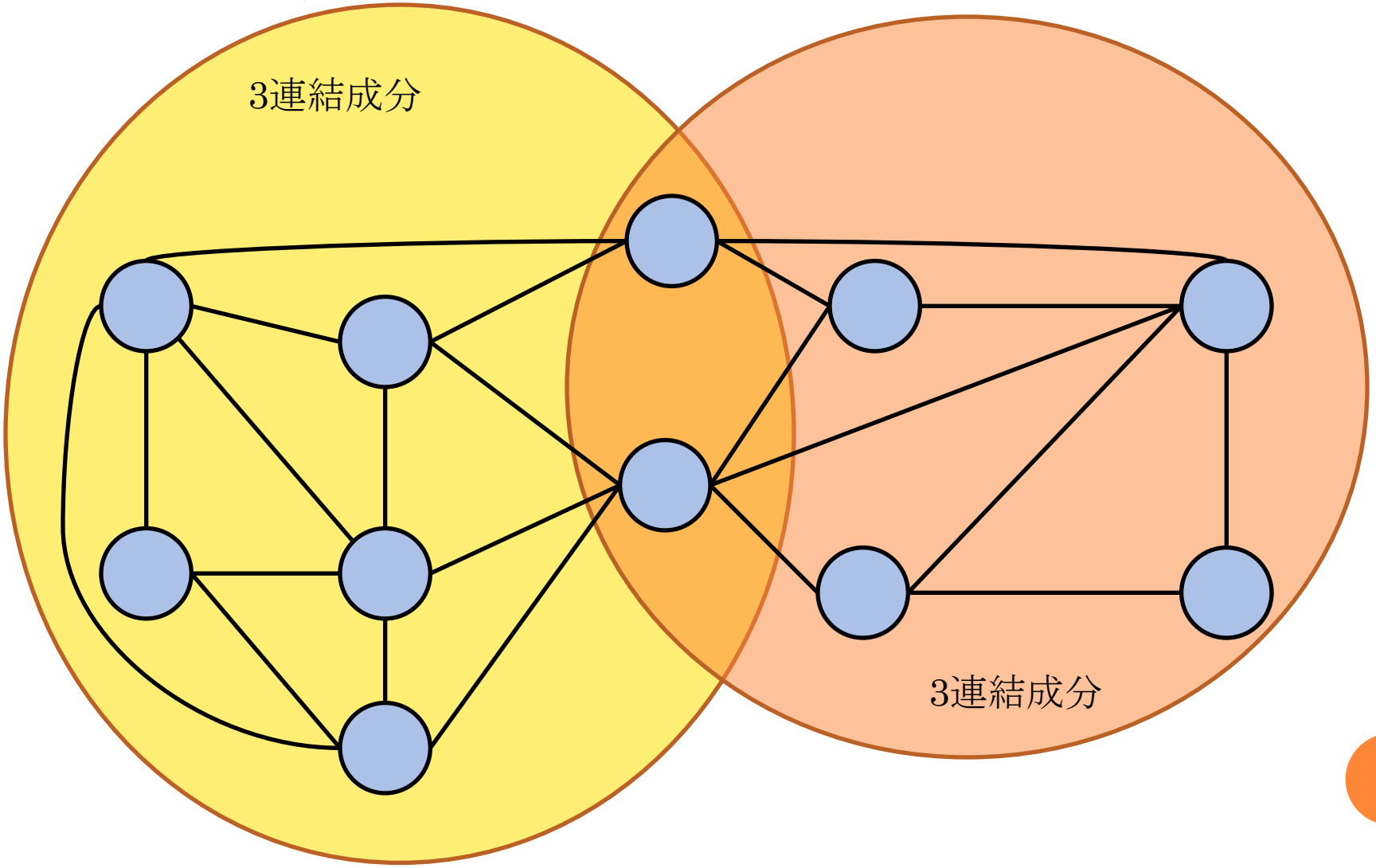
- 連結なグラフ$G=(V, A)$の部分グラフ$H_i=(V_i, A_i)$ $(i=1,2)$

$$|A_i| \geq 1, A_1 \cup A_2 = A, A_1 \cap A_2 = \varnothing$$

$$V_1 \cup V_2 = V, |V_1 \cap V_2| = 2$$

- H_iを3端子部分グラフと呼ぶ
- 2部分グラフを持たないグラフ
  - 3連結グラフ

2端子部分グラフの例



強連結(STRONGLY CONNECTED)

- グラフ$G=(V, A)$が強連結
  - $\forall u \in V$から$\forall v \in V$へ有向道が存在する
- グラフ中の強連結成分$H_i=(V_i, A_i)$
  - $\forall u \in V_i$から$\forall v \in V_i$へ有向道が存在する

連結性の簡単な確認

- 隣接行列Γを使う
- 点i から点j への弧がある　$\Gamma_{ij} \geq 1$
- 「かけ算」を定義
- 点i から点j へ長さ2の道がある　$\Gamma^2_{ij} = \sum_k \Gamma_{ik}\Gamma_{kj} \geq 1$
- 点の数をm とするとΓ^{m-1} の成分を見ることで連結成分に分解できる

グラフとマトロイド(MATROID)

- 無向グラフ $G=(V, A)$ $|A|\neq\emptyset$ を考える
- その極大木 (spanning tree) T の集合族$\mathcal{T}$

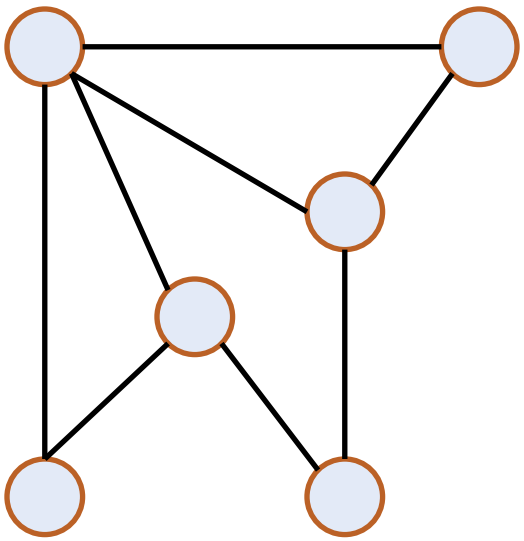
$$\mathcal{T}=\left\{T \middle| T\left(\subseteq A\right): G\text{の木}\right\}$$

  - 木をグラフの弧の集合と同一視する

- (B0) $\mathcal{T} \neq \emptyset$
- (B1)木の組 $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ と $\forall a_1 \in T_1 \setminus T_2$ に対して
  - 弧 $\exists a_2 \in T_2 \setminus T_1$ が存在し
  - 別の木を構成できる

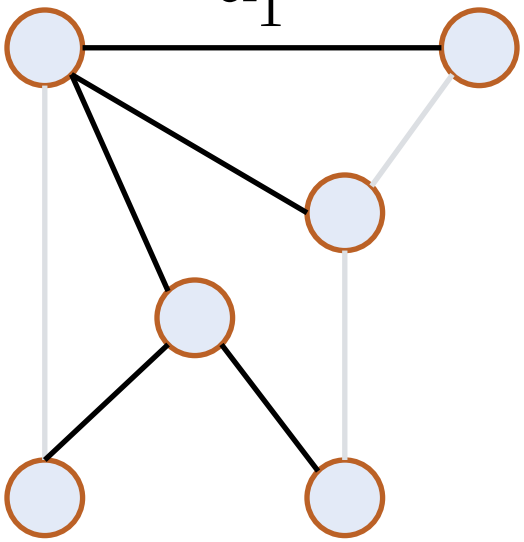
$$\left(T_1 \setminus \{a_1\}\right) \cup \{a_2\} \in \mathcal{T}$$

例



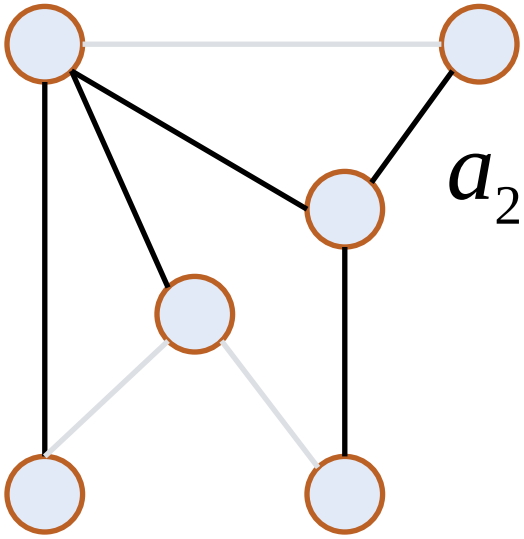
G

T_1



a_1

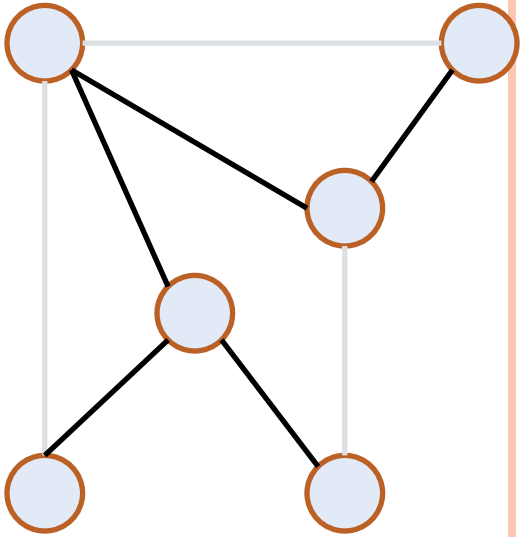
T_2



a_2

$T_3 =$

$\left(T_1 \setminus \{a_1\}\right) \cup \{a_2\}$



- (B0)と(B1)を満たす $M=(A, \mathcal{T})$
- 基族(family of bases) $\mathcal{T}$ によって定められるマトロイド(matroid)
- T_i :マトロイドの基(base)
- 基は全て同じ大きさ:枝の数は同数
  - 頂点数が与えられたとき、その極大木の枝の数

Matroid とは

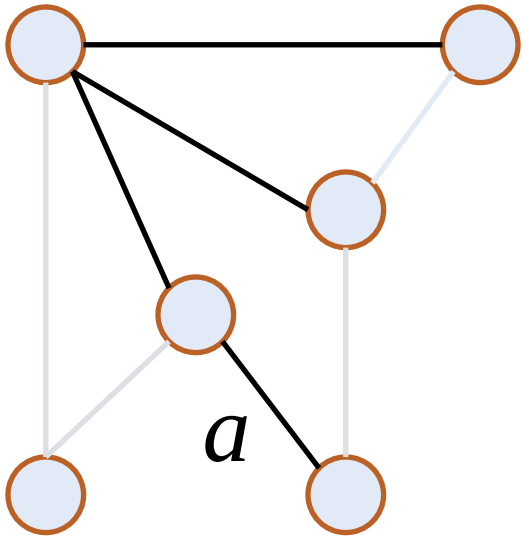
- Matrix (行列) のような(-oid) もの
  - ベクトルの要素全体と、一次独立な要素、一次従属な要素の関係を抽象化したもの
- 全体集合とその中の一次独立な要素
  - 弧の全体集合とspanning tree

独立集合(INDEPENDENT SET)

- $I_i \subseteq A$, I_i を含む基があるとき、I_iを独立集合と呼ぶ
- I_iは頂点の部分集合のspanning tree
- 独立集合族$\mathcal{I}=\{I_i \subseteq A\}$
- 極大な独立集合族が基に対応

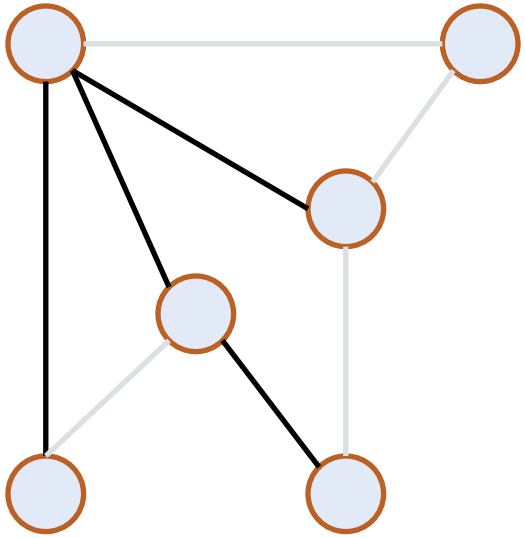
独立集合の性質

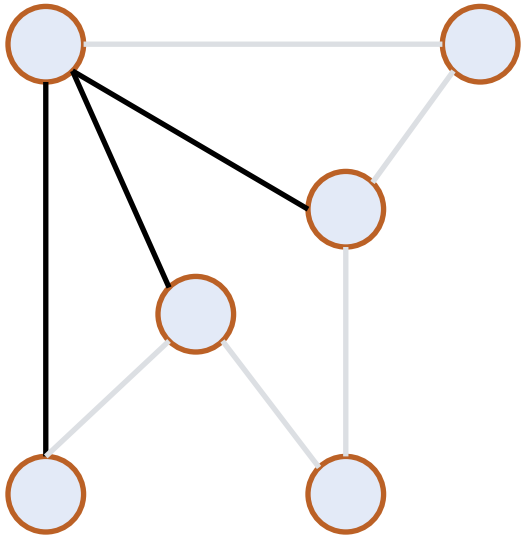
- (I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$
- (I1) $I_1 \subseteq I_2 \in \mathcal{I}$ ならば $I_1 \in \mathcal{I}$
- (I2) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ かつ $|I_1| < |I_2|$ ならば
  - $\exists a \in I_2 \setminus I_1$ が存在し、$I_1 \cup \{a\} \in \mathcal{I}$



I_2

$$I_3 = I_1 \cup \{a\}$$





I_1

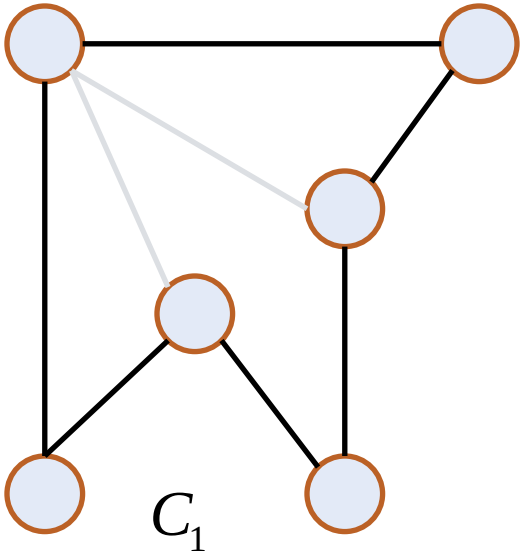
サーキット(CIRCUITS)

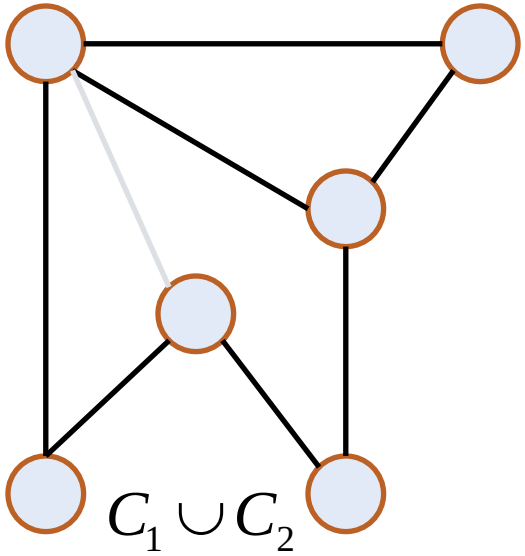
- 従属集合(dependent set)：独立集合でないAの部分集合
- つまり、木ではない枝の集合
- サーキット：極小な従属集合
- サーキット族C

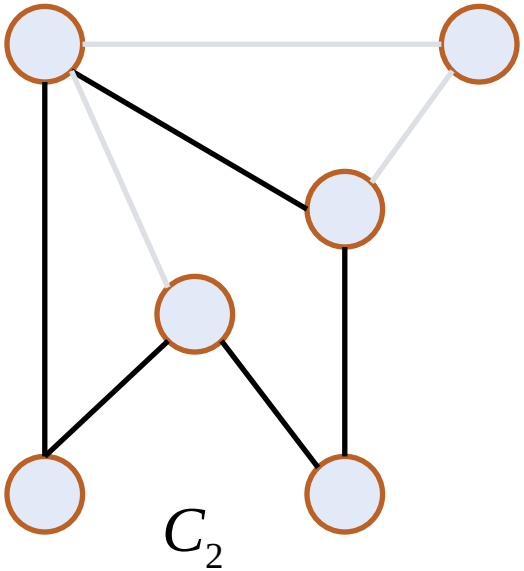
サーキットCの性質

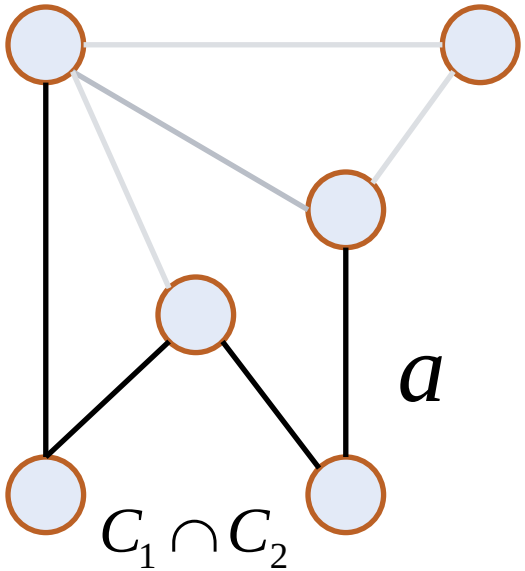
- (C0) $C \neq \{\varnothing\}$
- (C1) $C_1, C_2 \in C$ かつ $C_1 \subseteq C_2$ ならば $C_1 = C_2$
  - $C_1 \subset C_2$ であれば、C_2 が極小であることに反する
- (C2) $C_1, C_2 \in C$ かつ $C_1 \neq C_2$ ならば
  - $\forall a \in (C_1 \cap C_2)$ に対して

$$\exists C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$$

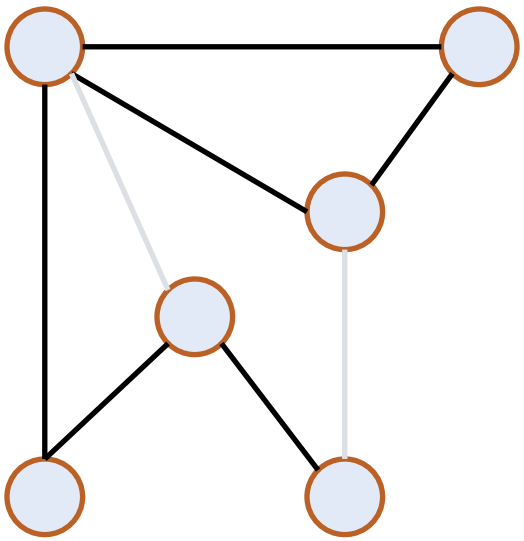




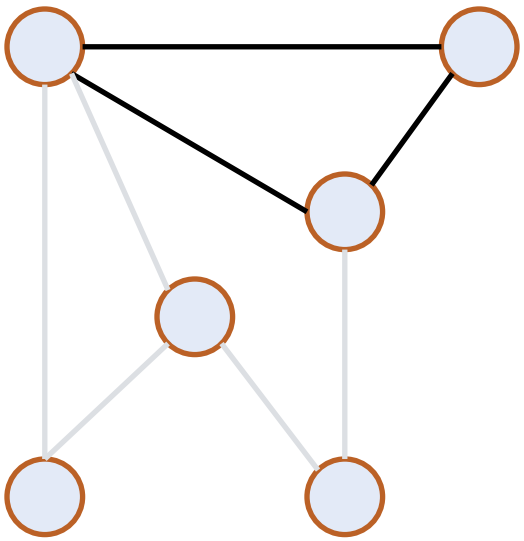




a



$(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$



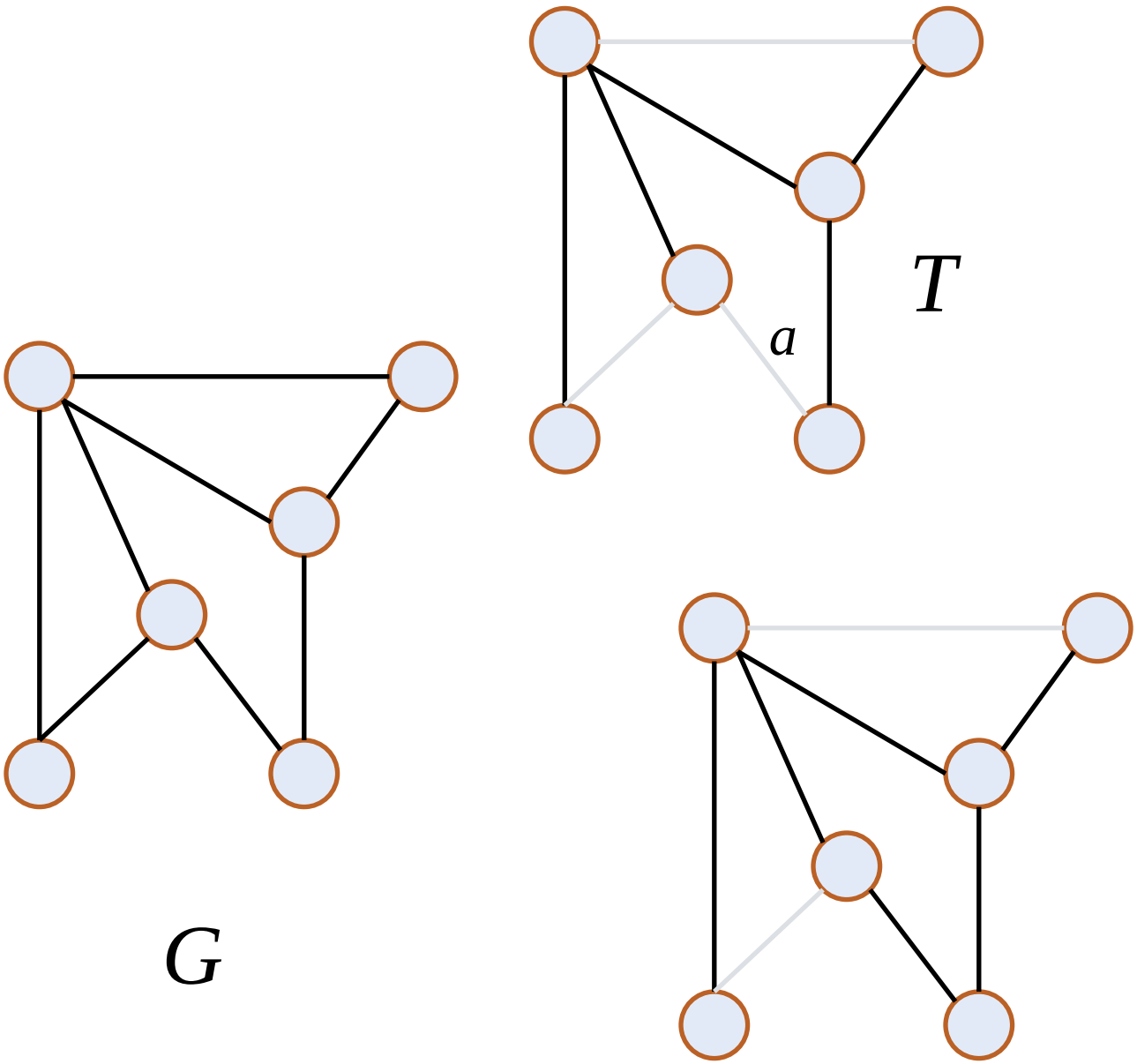
$C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$

基本サーキット

- マトロイド$M(A,\mathcal{T})$を考える
- 基$\forall T \in \mathcal{T}$と$\forall a \in A \setminus T$に対して
  - $T \cup \{a\}$必ず一つ、かつただ一つ、サーキットを持つ
  - 基本サーキット(fundamental circuit)と呼ぶ

$$C(T \mid a)$$

- 各$a \in A$に対して構成される$C(T \mid a)$の系を基本サーキット系と呼ぶ


T
a
G