最短経路問題
Shortest Path Problem

最短経路問題とは

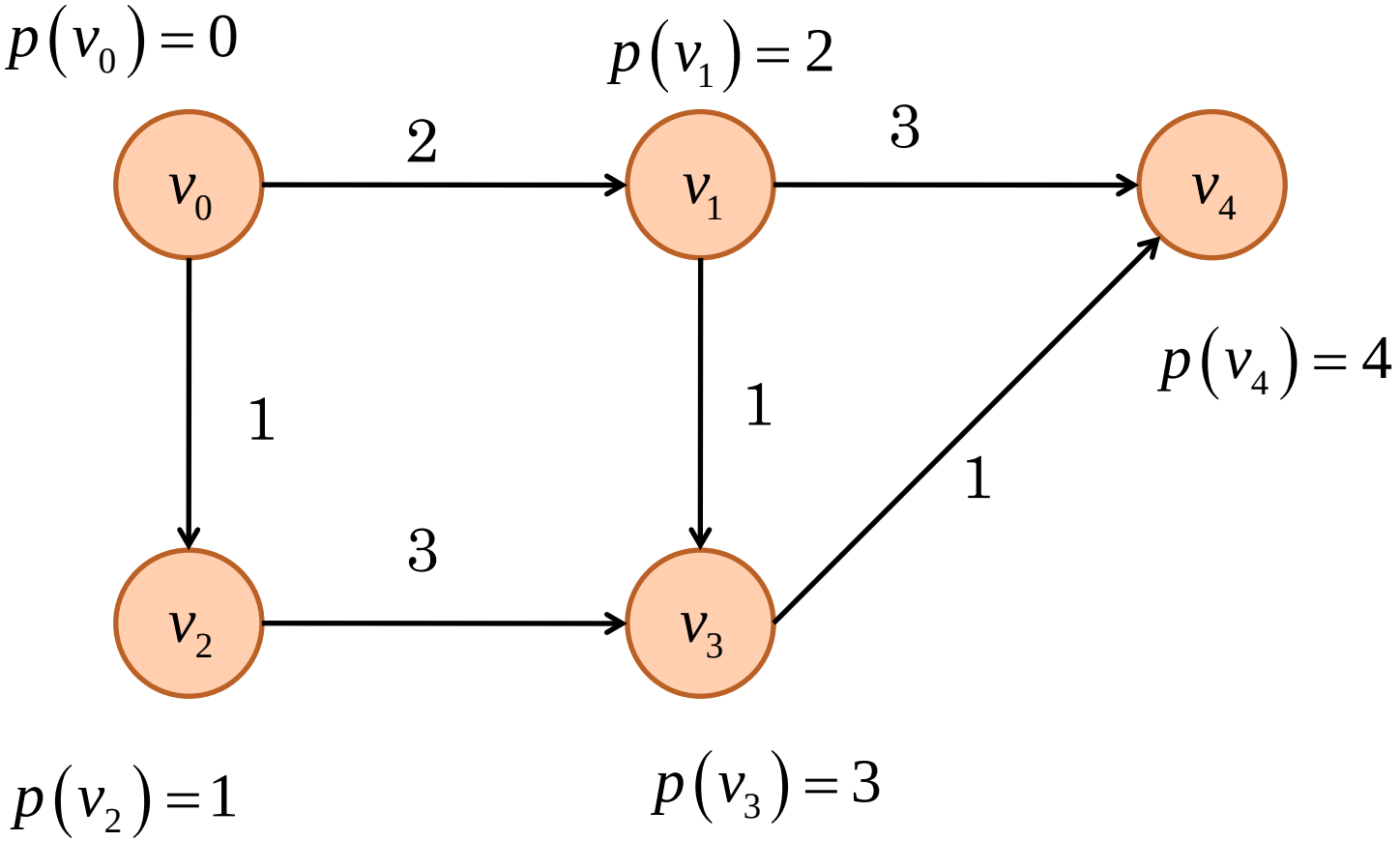
- 有向ネットワーク
  - 各弧に距離やコスト(正の実数)が定義されている
- 始点から終点までの最短有向道を見つける

準備：ポテンシャル $P:V \to R$

- 一般には、各頂点に定義された実数値
- 始点からの「高さ」(距離)をイメージする
- 経路のよらずに定まるはず

- ポテンシャル(potential)→位置エネルギー

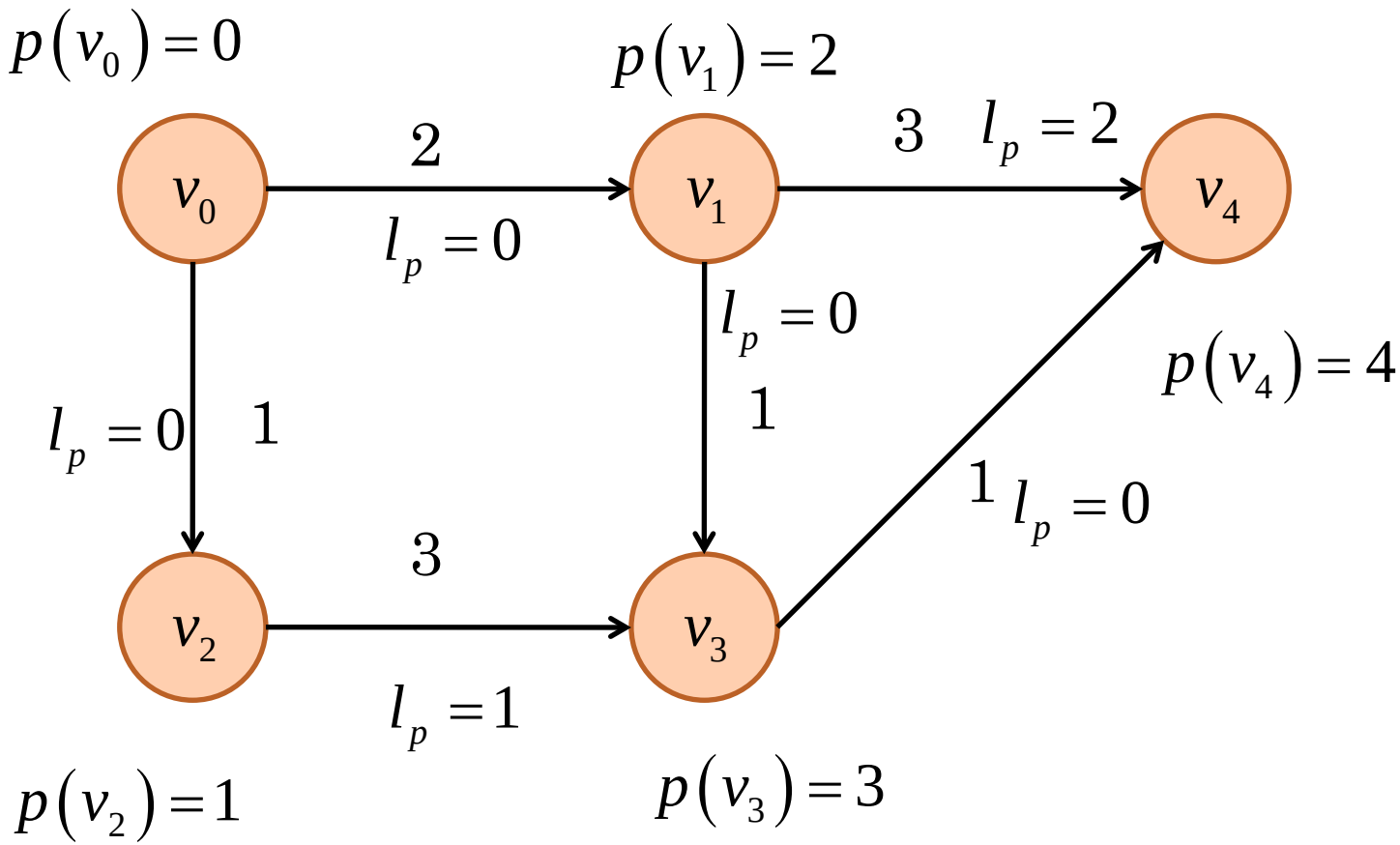
ポテンシャルの例



関数 $l_p : A \to R$

- 弧aの長さ(距離) $l(a)$
- 弧の始点(終点)のポテンシャル $p(\partial^{\pm} a)$

$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^{+} a) - p(\partial^{-} a)$$


$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
v_0
v_1
v_4
2
$l_p=0$
3
$l_p=2$
$l_p=0$
1
$p(v_4)=4$
$l_p=0$
1
1
$l_p=0$
3
v_2
v_3
$l_p=1$
$p(v_2)=1$
$p(v_3)=3$

有向道にそって拡張

- 頂点u から 頂点v へ向かう有向道 P に対して以下が成り立つ

$$l_p(P) = l(p) + p(u) - p(v)$$

$$l_p(P) \equiv \sum_{a \in P} l_p(a)$$

$$l(P) \equiv \sum_{a \in P} l(a)$$

$$P = \{u = v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k = v\}$$

$$\begin{aligned} l_p(P) &= \sum_{a \in P} l_p(a) = \sum_{i=1}^{k} l_p(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left[l(a_i) + p(v_{i-1}) - p(v_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} l(a_i) + p(u) - p(v) \\ &= l(P) + p(u) - p(v) \end{aligned}$$

- 関数$l_p : A \to R$が非負関数であり、道P上の各弧aに対して、

  $l_p(a) = 0$のとき、Pはuからvへの最短経路となる。

- なぜなら、

$$l(P) = p(v) - p(u) + l_p(P) \geq p(v) - p(u)$$

- このようなポテンシャルを構成することが、課題となる。

ダイクストラ(Dijkstra)法

- $l(a) \geq 0$ の場合を考える
- グラフ G は単純(並列弧が無い)と仮定する

- $U \subseteq V$ ：始点v_0からの有向道が見つかっているが、距離が確定していない頂点の集合
- $W \subseteq V$ ：始点v_0からの有向道が見つかり、距離が確定した頂点の集合
- $p(v) \in R$ ：始点v_0から頂点vへの距離
- $q(v) \in V$ ：最短経路を頂点vから逆にたどる際の頂点vの直前の頂点

Dijkstra法：初期化

$$U = \{v_0\}$$

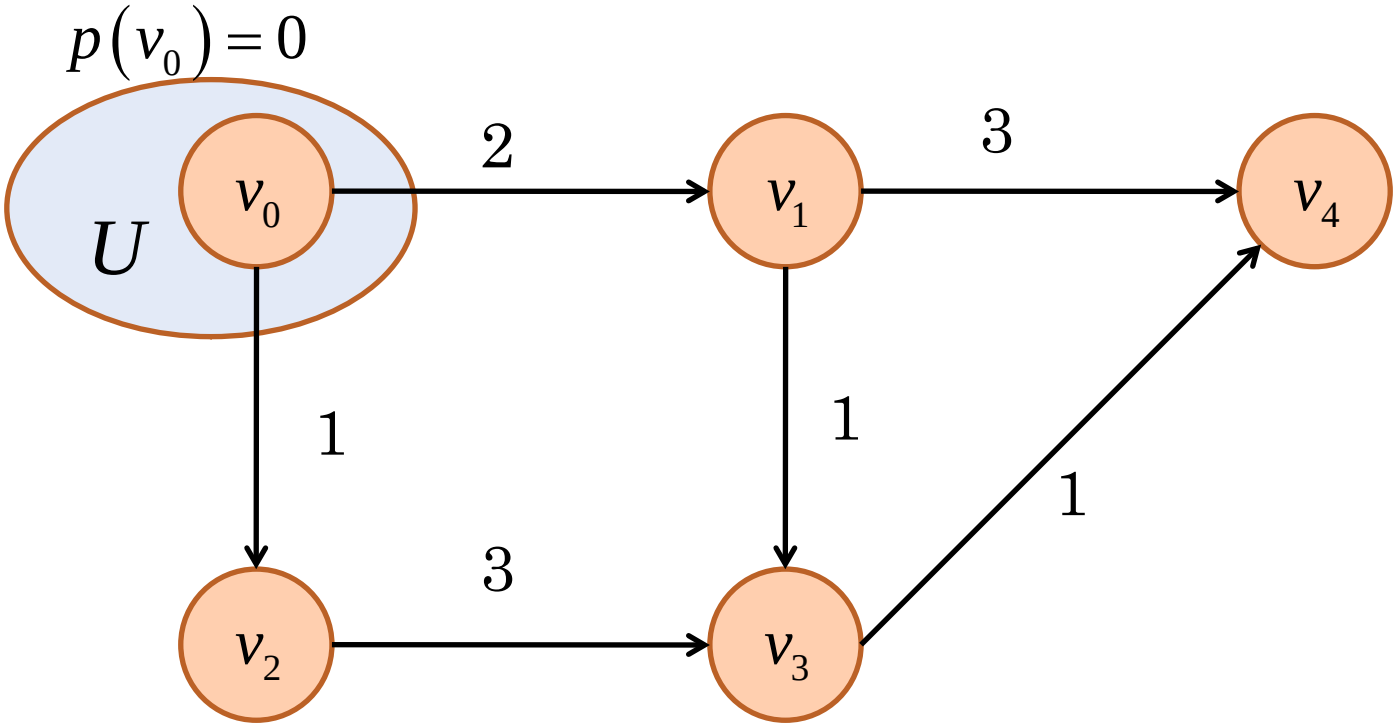
$$W = \varnothing$$

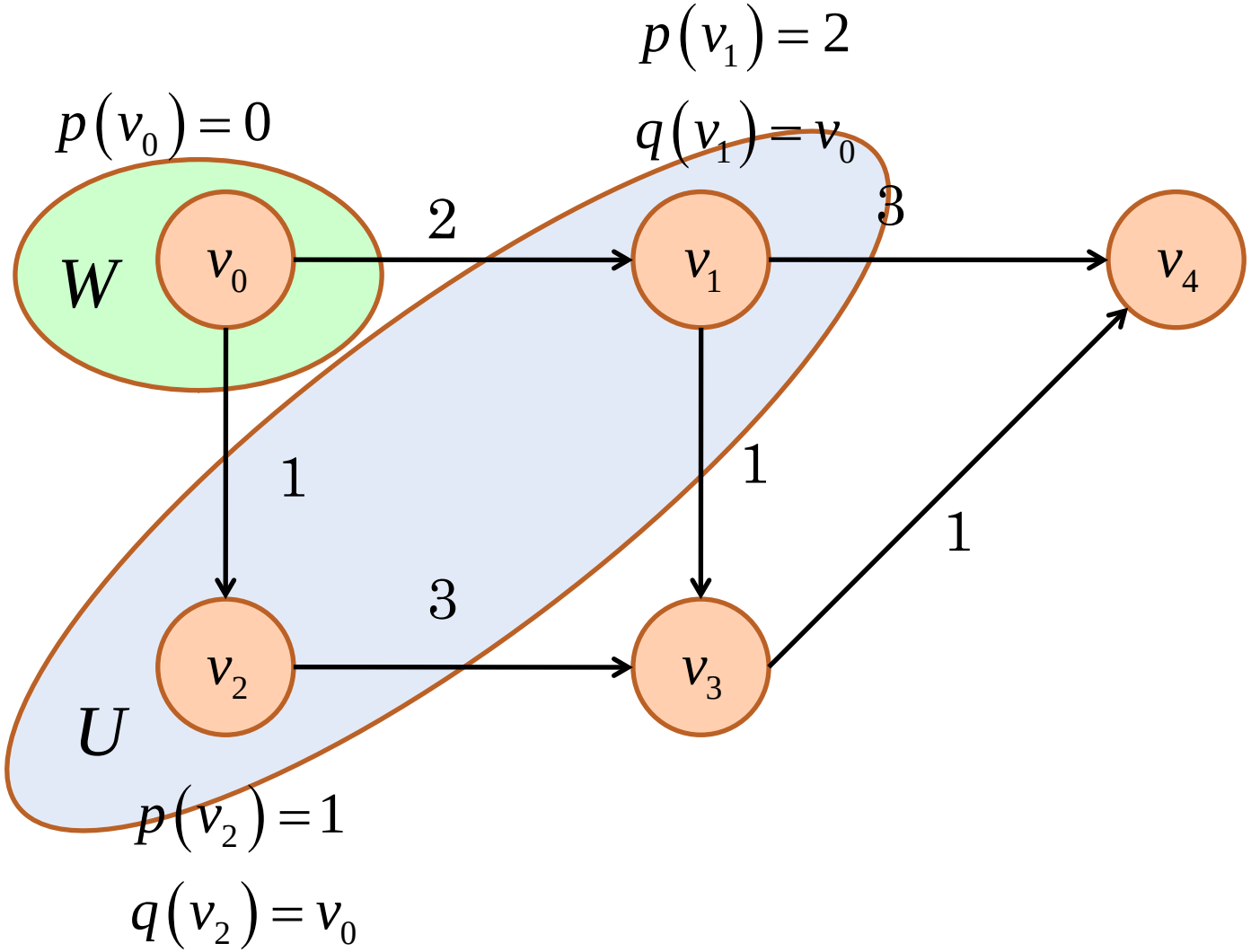
$$p(v_0) = 0$$

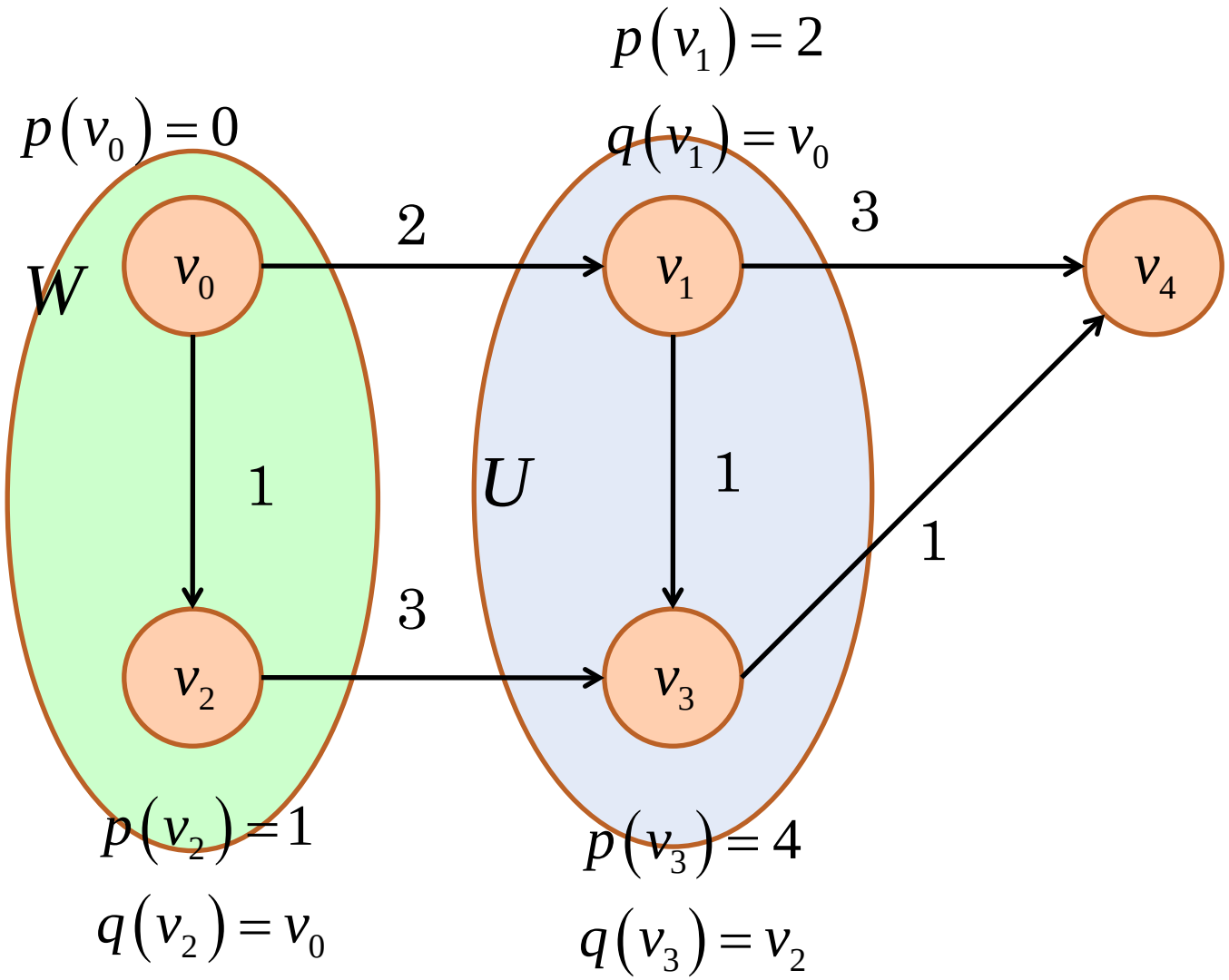
$$p(u) = +\infty \left(\forall u \in V \setminus \{v_0\}\right)$$

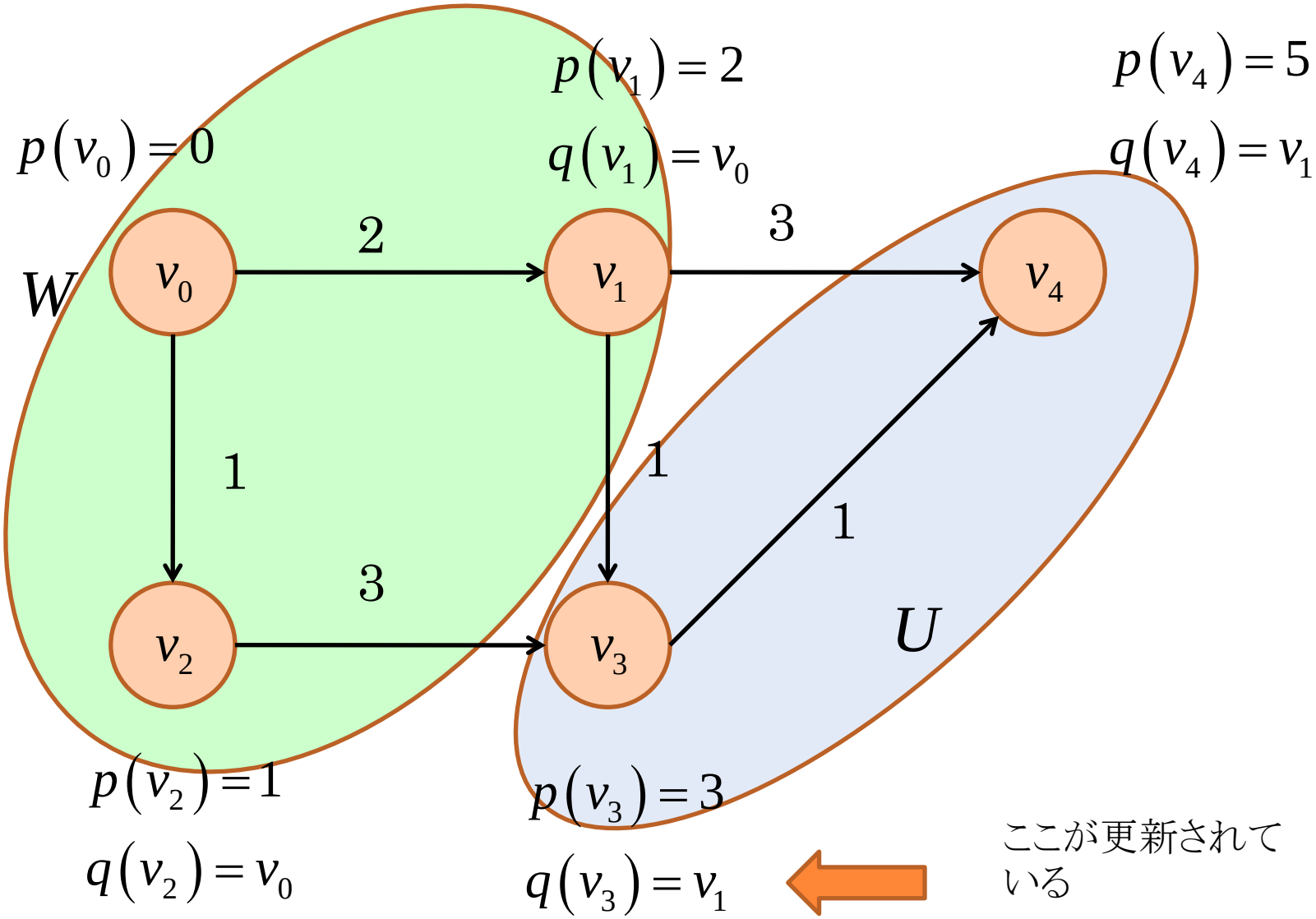
$$q(v) = \mathrm{NULL}\left(\forall v \in V\right)$$

```
while ( U ≠ ∅ ) {
    p(w) が最小である w ∈ U を探す
    forall ( a ∈ δ⁺w ) {
        x = ∂⁻a
        if ( x ∉ W ) {
            if ( p(x) > p(w) + l(a) ) {
                q(x) ← w
                p(x) ← p(w) + l(a)
                U ← U ∪ {x}
            }
        }
    }
    W ← W ∪ {w}
    U ← U \ {w}
}
```

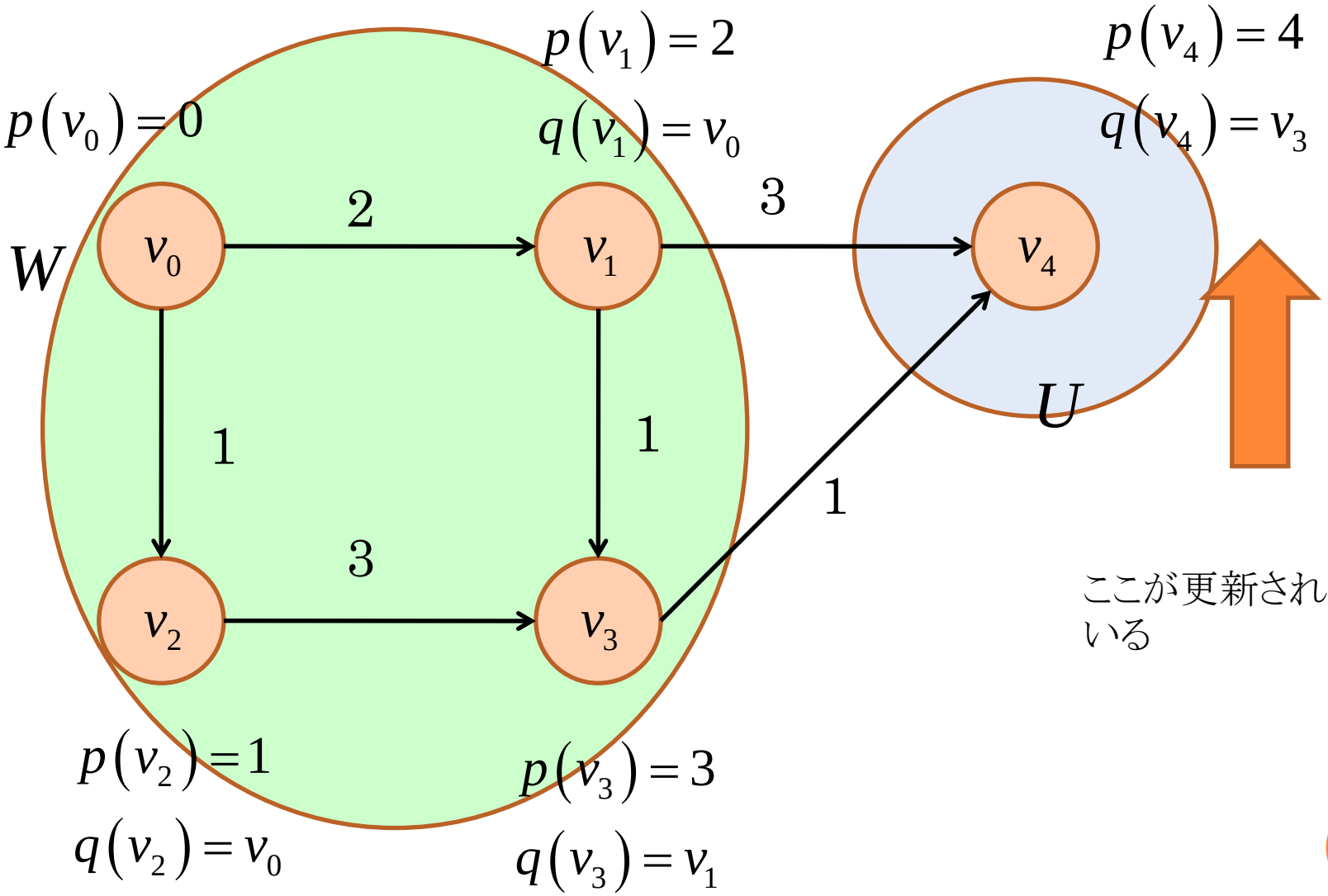

$p(v_0) = 0$
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
2
3
1
1
3
1


$p(v_1) = 2$
$q(v_1) = v_0$
$p(v_0) = 0$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
3
v_2
v_3
U
$p(v_2) = 1$
$q(v_2) = v_0$


$p(v_1) = 2$
$p(v_0) = 0$
$q(v_1) = v_0$
2
3
W
v_0
v_1
v_4
1
U
1
1
3
v_2
v_3
$p(v_2) = 1$
$p(v_3) = 4$
$q(v_2) = v_0$
$q(v_3) = v_2$

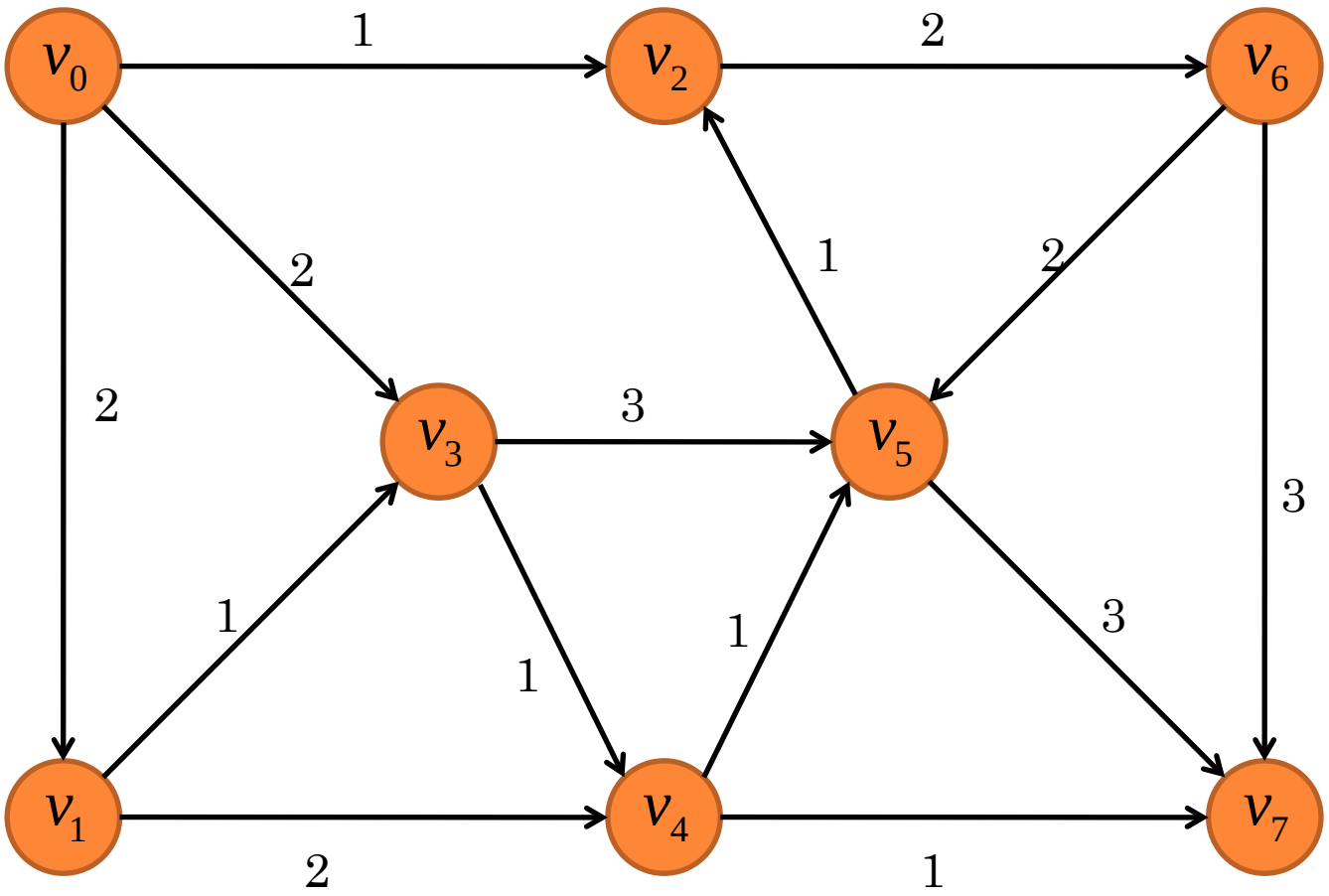

$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=5$
$q(v_4)=v_1$
W
v_0
v_1
v_4
v_2
v_3
2
3
1
1
1
3
U
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$

ここが更新されている


$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=4$
$q(v_4)=v_3$
W
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
2
3
1
1
3
1
U
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$

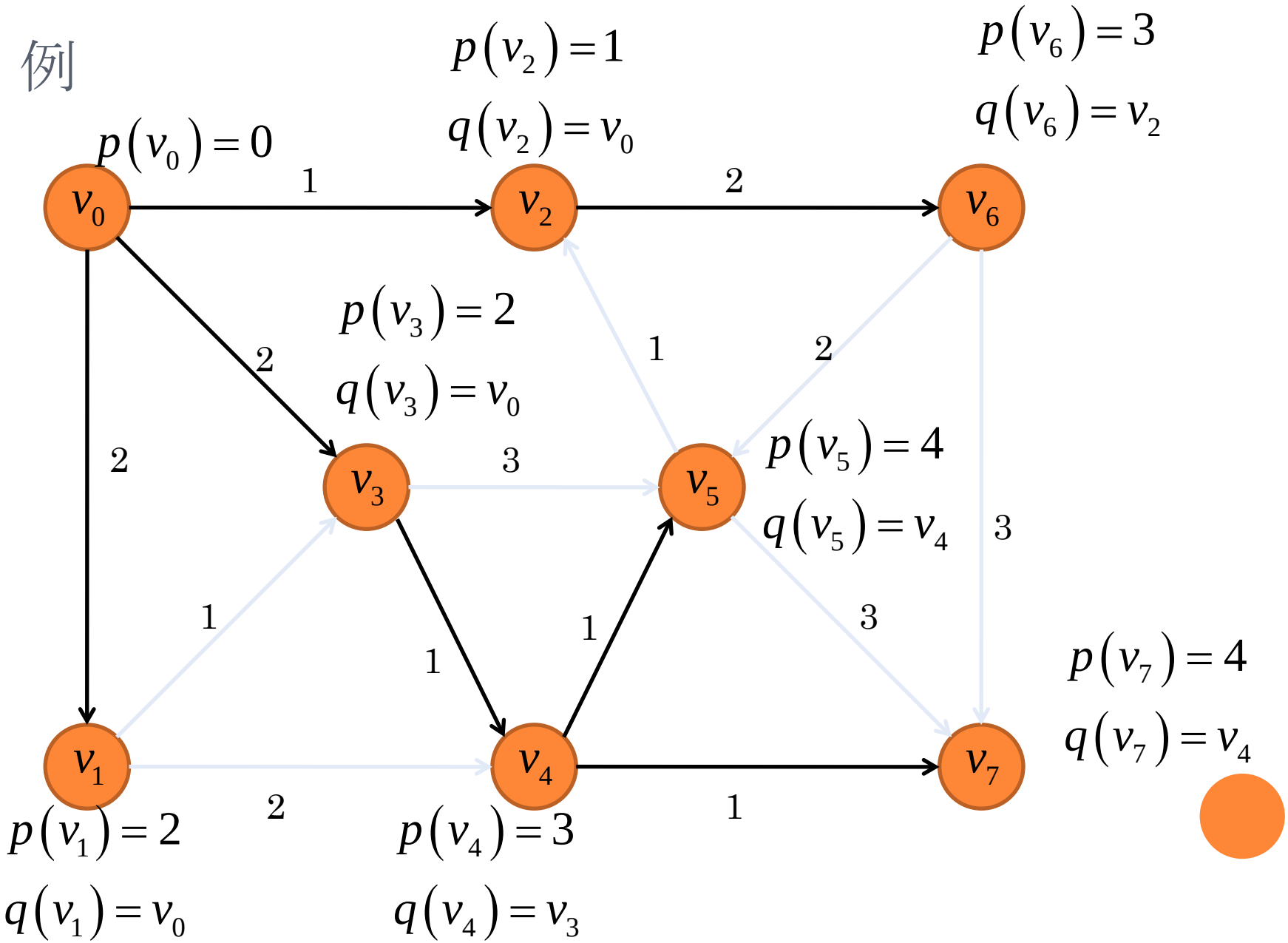
ここが更新されている

例



	注目している頂点	W	U	p	q	更新を受けた手順
0		$\varnothing$	$\{v_0\}$	$p(v_0)=0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1,v_2,v_3\}$	$p(v_1)=2$	$q(v_1)=v_0$	
				$p(v_2)=1$	$q(v_2)=v_0$	
				$p(v_3)=2$	$q(v_3)=v_0$	
2	v_2	$\{v_0,v_2\}$	$\{v_1,v_3,v_6\}$	$p(v_6)=3$	$q(v_6)=v_1$	
3	v_1	$\{v_0,v_1,v_2\}$	$\{v_3,v_4,v_6\}$	$p(v_4)=4$	$q(v_4)=v_1$	4
4	v_3	$\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$	$\{v_4,v_5,v_6\}$	$p(v_4)=3$	$q(v_4)=v_3$	
				$p(v_5)=5$	$q(v_5)=v_3$	5
5	v_4	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4\}$	$\{v_5,v_6,v_7\}$	$p(v_5)=4$	$q(v_5)=v_4$	
				$p(v_7)=4$	$q(v_7)=v_4$	
6	v_6	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_6\}$	$\{v_5,v_7\}$			
7	v_7	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_7\}$	$\{v_5\}$			
8	v_5	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$	$\varnothing$			

例


$p(v_0)=0$
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_6)=3$
$q(v_6)=v_2$
$p(v_3)=2$
$q(v_3)=v_0$
$p(v_5)=4$
$q(v_5)=v_4$
$p(v_7)=4$
$q(v_7)=v_4$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=3$
$q(v_4)=v_3$
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
3
1
2
1
1
3
3
2
1

Dijkstra法の妥当性：補題1

Dijkstra 法の実行に伴って、頂点が $v_0, v_1, v_2, \ldots$ の順に W に登録されるとする。このとき、以下の関係が成り立つ。

$$0 \le p(v_0) \le p(v_1) \le p(v_2) \le \ldots \le p(v_i) \le p(v_{i+1}) \le \ldots$$

つまり、W には、距離の小さい順に追加されていく。

補題1証明

Dijkstra 法の実行中に、以下が成り立つことを示せばよい。

$$\max\left\{p(u)\middle|u\in W\right\}\le\min\left\{p(u)\middle|u\in V\setminus W\right\}$$

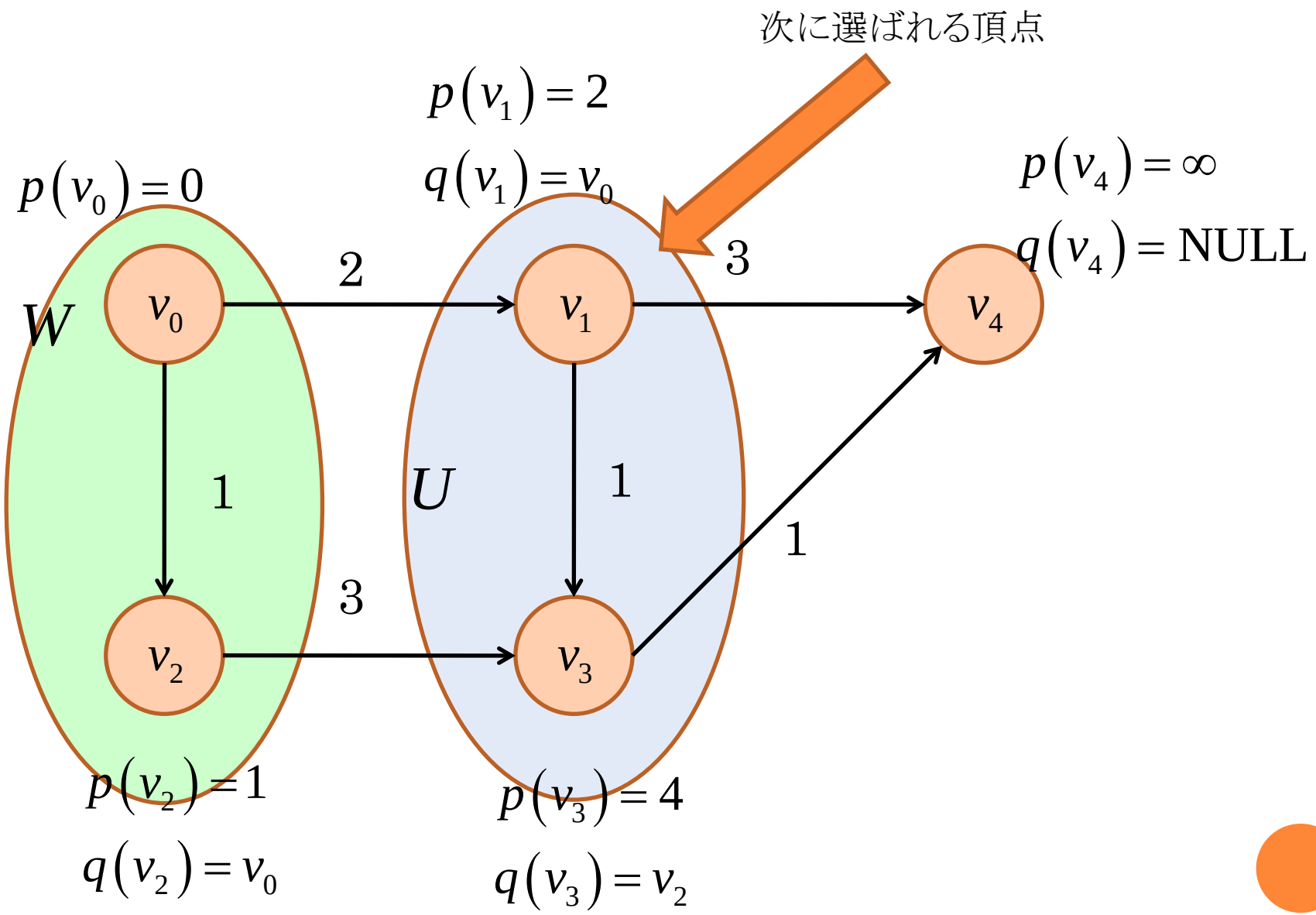
補題1証明

- 一回目のループ実行後：自明
  - $W = \{v_0\}, p(v_0) = 0$
- あるステップで成り立つと仮定する。
  - 次に選ばれる頂点を $w \in U \subseteq V \setminus W$ とする。
  - p の更新前

$$\max\{p(u) | u \in W\} \leq p(w) \leq \min\{p(u) | u \in V \setminus (W \cup \{w\})\}$$

  - p の更新後

$$\max\{p(u) | u \in W\} \leq \min\{p(u) | u \in V \setminus W\}$$


次に選ばれる頂点
$p(v_1) = 2$
$q(v_1) = v_0$
$p(v_0) = 0$
$p(v_4) = \infty$
$q(v_4) = \mathrm{NULL}$
2
3
W
v_0
v_1
v_4
1
U
1
1
3
v_2
v_3
$p(v_2) = 1$
$q(v_2) = v_0$
$p(v_3) = 4$
$q(v_3) = v_2$

DIJKSTRA法の妥当性：補題2

1. W に始点を持つ G の弧の集合 δ^+W を考える。

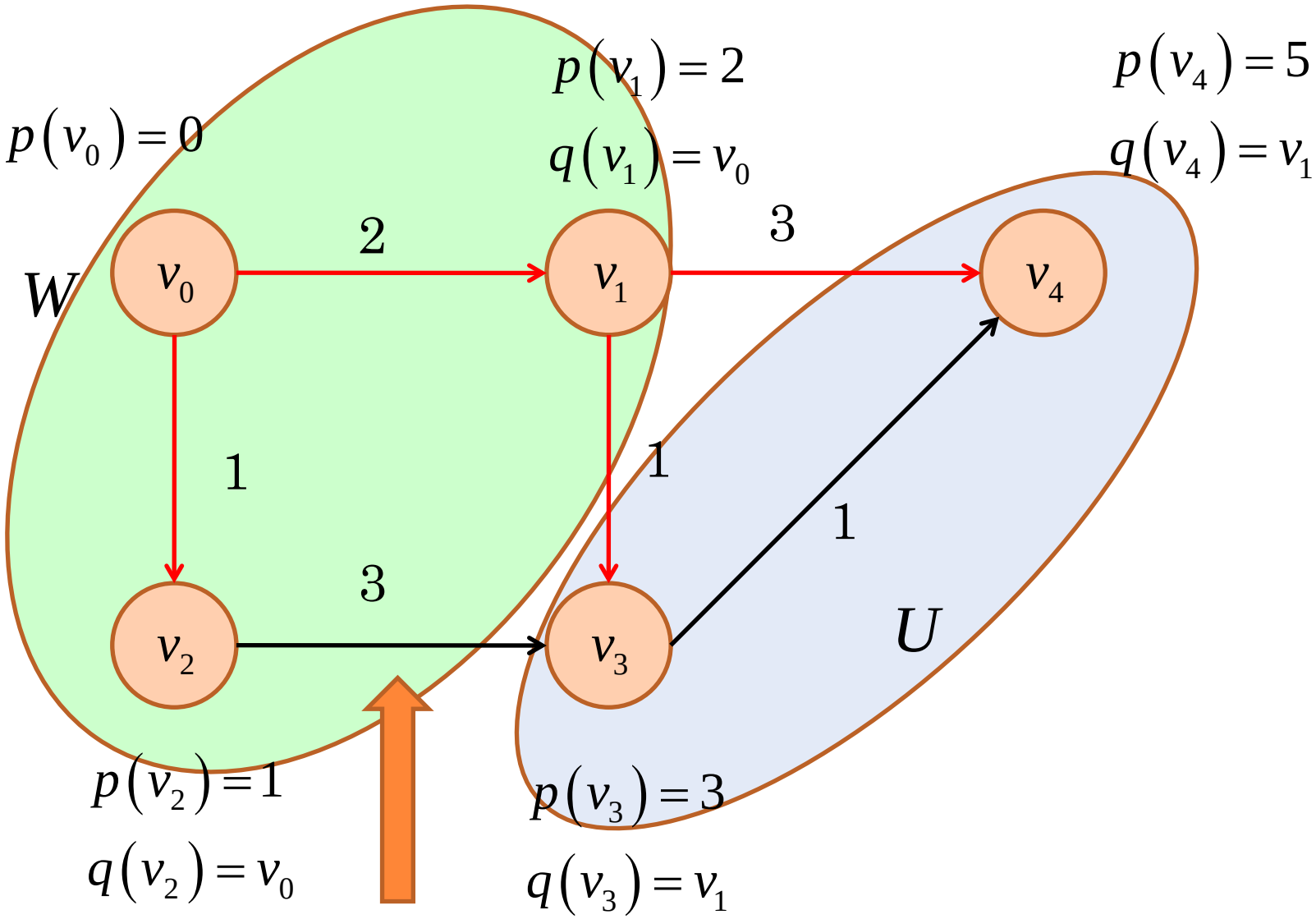
   $G_W = \left(W \cup U, \delta^+W\right)$ において

   $l_p(a) \geq 0 \left(\forall a \in \delta^+W\right)$

   $l_p\left(q(u), u\right) = 0 \left(\forall u \in \left(W \cup U\right) \setminus \left\{v_0\right\}\right)$

   がなりたつ。

2. $\forall u \in \left(U \cup W\right) \setminus \left\{v_0\right\}$ に対して定まる弧 $\left(q(u), u\right)$ の全体は、v_0 を根とする有向木である。



$$l_p(v2,v3)=l(v_2,v_3)+p(v_2)-p(v_3)=3+1-3=1>0$$

補題2証明

Dijkstra 法の手順から、$a \in \delta^{+}W$ に対して、

$$p\left(\partial^{-}a\right) \leq p\left(\partial^{+}a\right) + l(a)$$

が成り立っている。従って

$$l_p(a) = l(a) + p\left(\partial^{+}a\right) - p\left(\partial^{-}a\right) \geq 0$$

さらに、$\forall u \in U$ に対しては

$$p(u) = p\left(q(u)\right) + l\left(q(u), u\right)$$

であり、

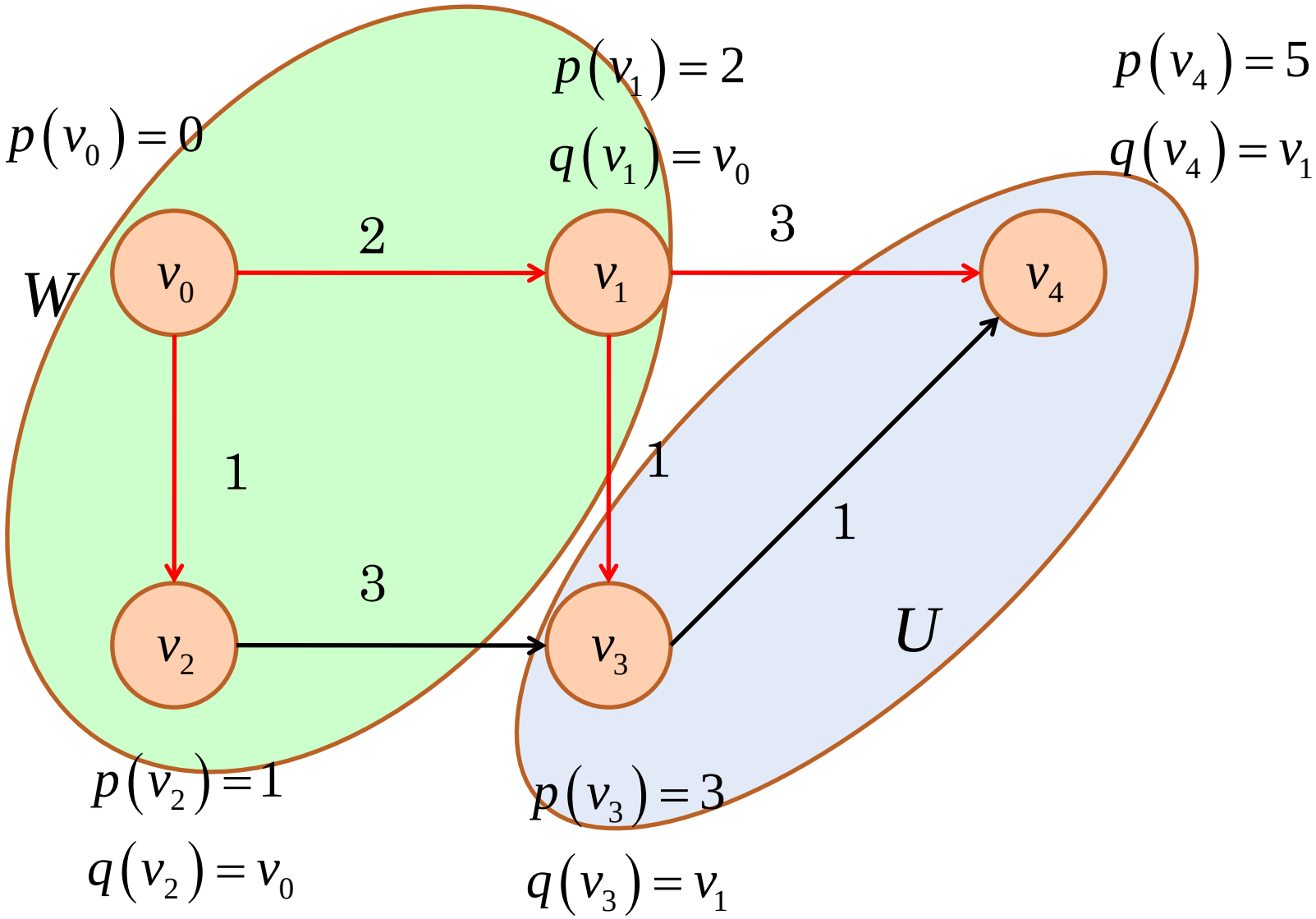
$$l_p\left(q(u), u\right) = l\left(q(u), u\right) + p\left(q(u)\right) - p(u) = 0$$

補題2証明

補題１より、W の要素は順序付けられている。

- $\forall v_i \in W$ に対して、$q(v_i) = v_j$ ならば、$j < i$ と順序付けられている。つまり、v_i に対して一意に親の頂点が定まる。
- $\forall v \in U$ に対して、$q(v) = w \in W$ によって、一意に親の頂点が定まる。

従って、v_0 を根とする有向木となる。


$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
$q(v_1) = v_0$
$p(v_4) = 5$
$q(v_4) = v_1$
W
v_0
v_1
v_4
v_2
v_3
2
3
1
1
1
3
U
$p(v_2) = 1$
$q(v_2) = v_0$
$p(v_3) = 3$
$q(v_3) = v_1$