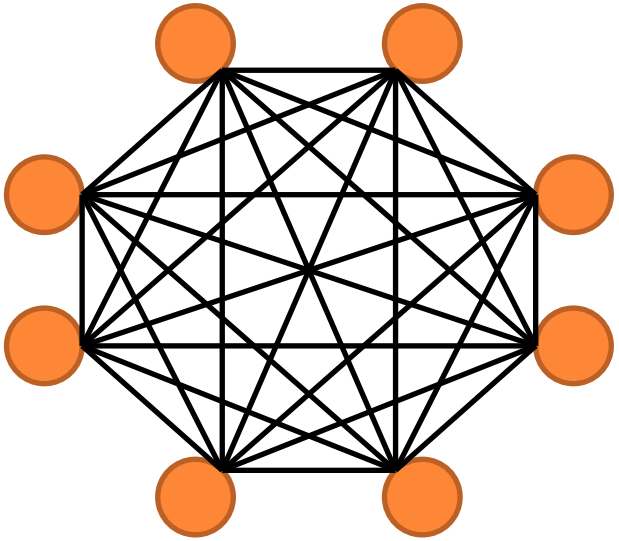
# 特殊なグラフ

# 今回の目的

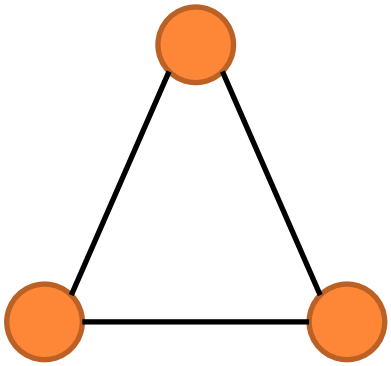
- 特別な構造のグラフの導入
  - 完全グラフ (complete graphs)
  - 二部グラフ (bipartite graphs)
  - 道 (paths)
  - 閉路 (circles)
  - 木 (trees)
  - 平面グラフ (planer graphs)
  - 双対グラフ (dual graphs)

# 完全グラフ (Complete Graphs)

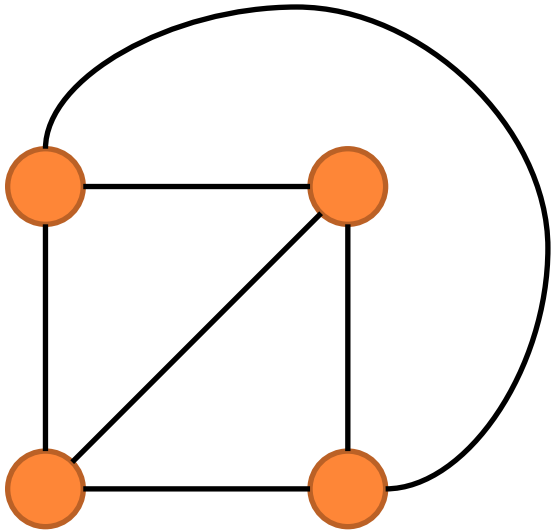
- 任意の相異なる頂点の組に必ず一つの弧が存在する無向グラフ



$K_8$



$K_3$



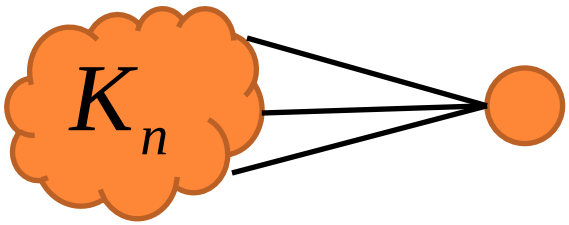
$K_4$

# 完全グラフの弧の数

- $K_n$の弧の数

$$N_a(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

- 数学的帰納法による証明
  - $n$=3の場合：明らか
  - ある$n$で正しいと仮定する。頂点を一つ追加することは、弧を$n$本追加することに対応する




$$N_a(n+1) = N_a(n) + n$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{1}{2}\left[n(n-1+2n)\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

# 二部グラフ (Bipartite Graphs)

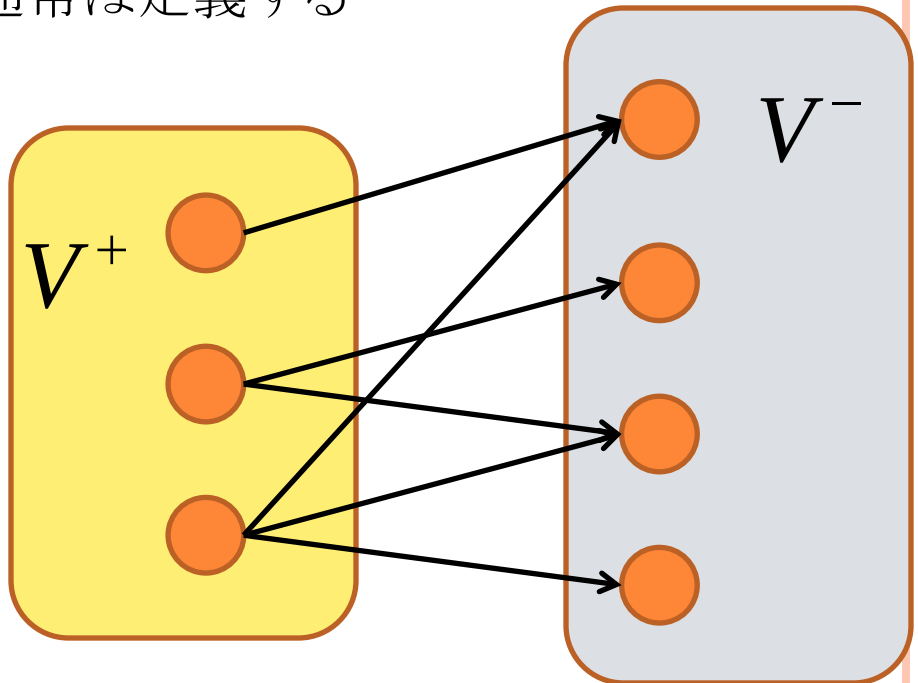
- グラフの頂点集合が二つに分割されている

$$V = V^+ \cup V^-,\ V^+ \cap V^- = \varnothing$$

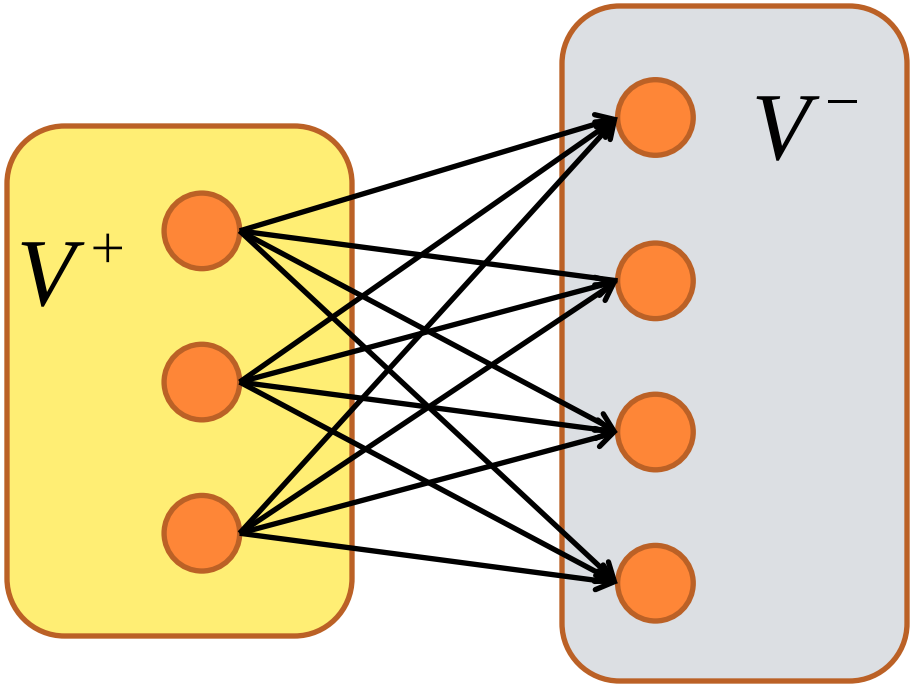
- 各弧がその二つの集合の頂点を結ぶ
  - 弧の向きは$V^+$から$V^-$へと、通常は定義する

$$\forall a \in A$$

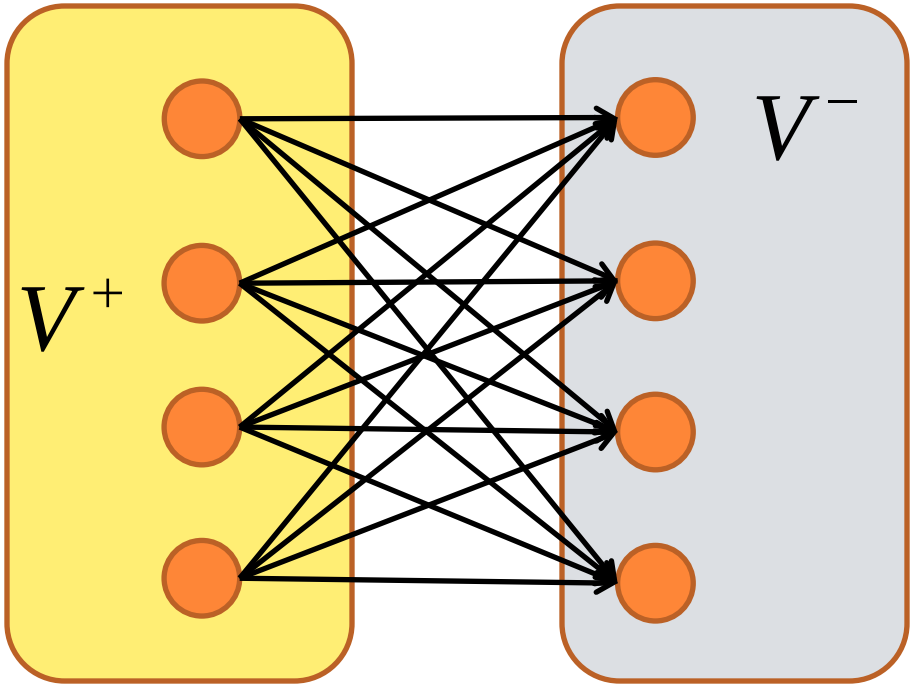
$$\partial^+ a \in V^+ \wedge \partial^- a \in V^-$$



# 完全二部グラフ (Complete Bipartite Graphs)



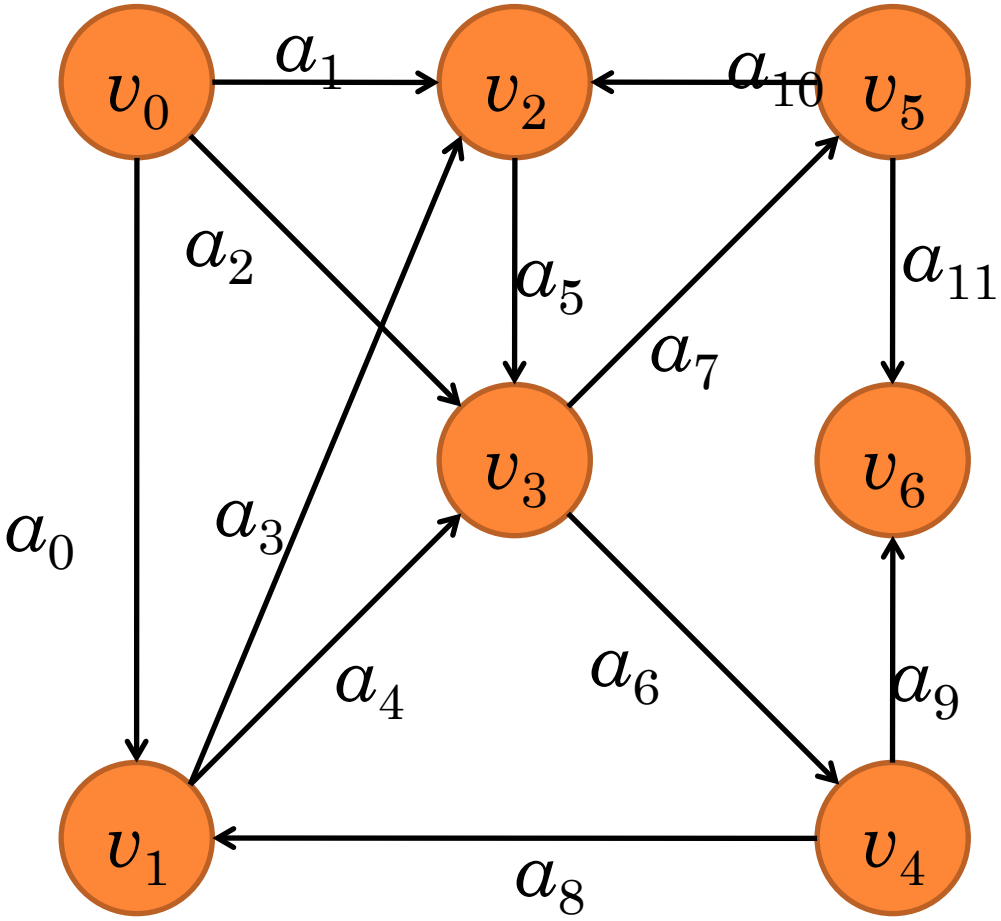

$K_{3,4}$




$K_{4,4}$

# 道 (PATHS)

- 始点から終点までの経路を「道」と言う




$v_0$から$v_6$への道

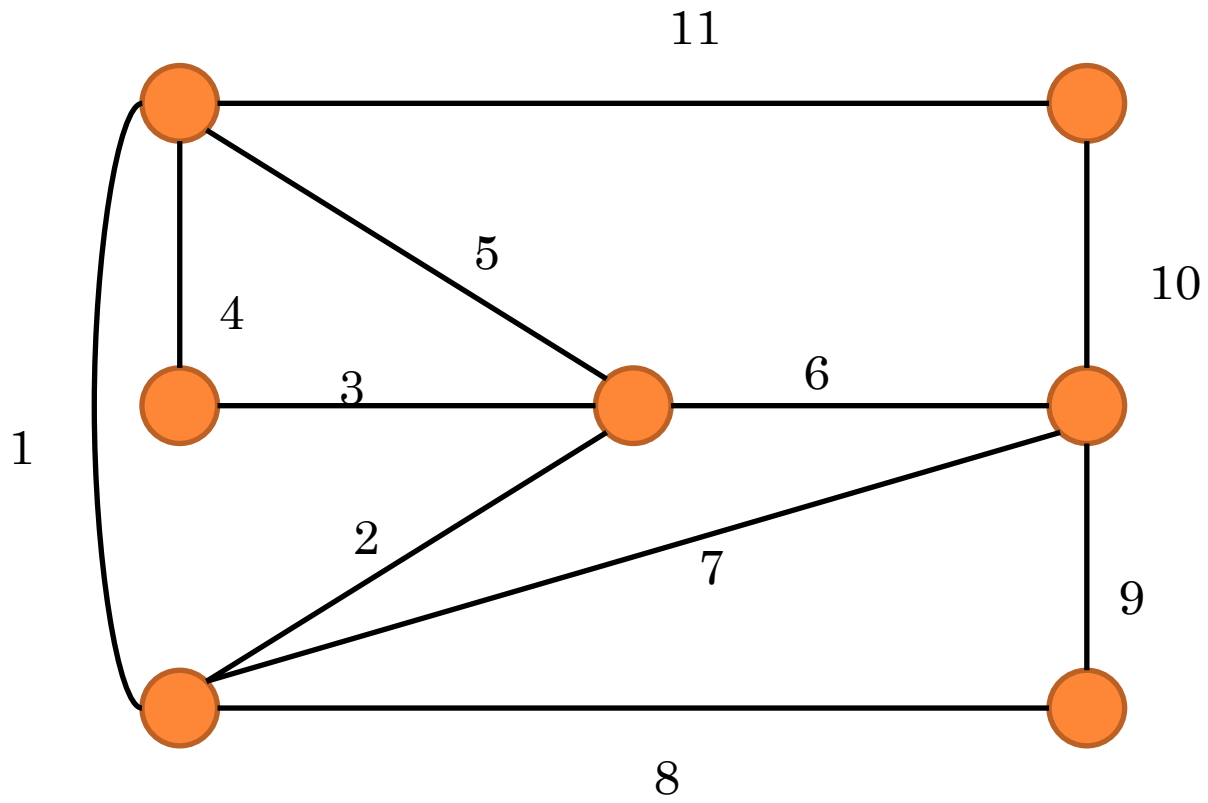
$a_1a_5a_7a_{11}$

- 通常、道は弧の向きを無視して考える
- 弧の向きが揃っている場合
  - 有向道 (directed path)
- 同じ弧を一度しか通らない道
  - 単純な道 (simple path)
- 同じ頂点を一度しか通らない道
  - 初等的な道 (elementary path)
- 始点と終点が同じ道
  - 閉路 (closed path)

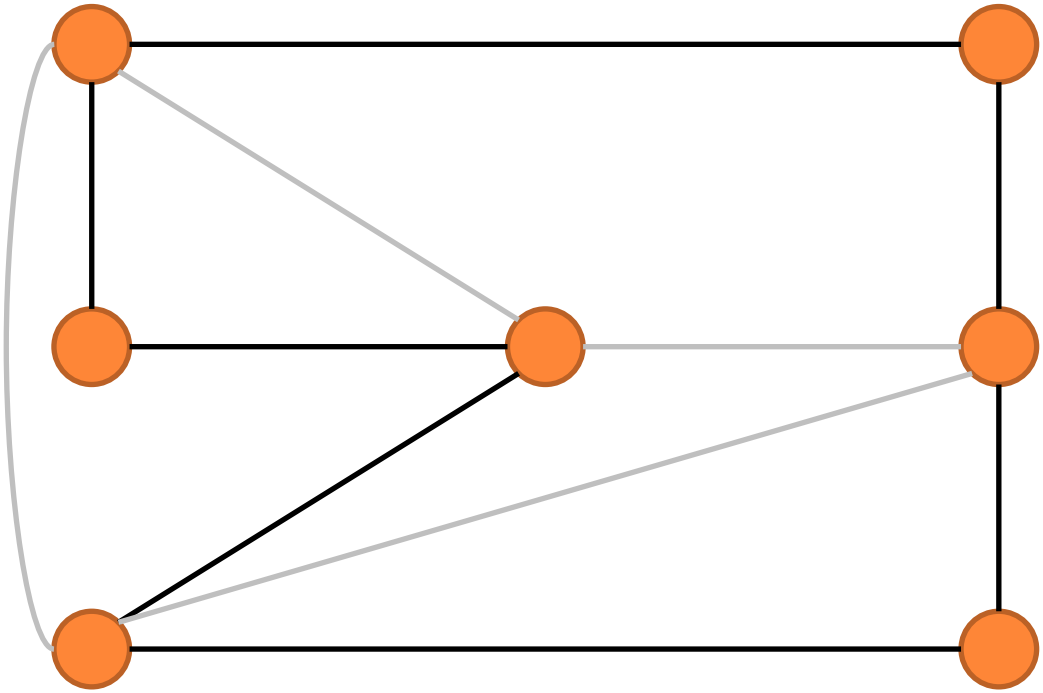
# 閉路 (Closed path, Circles)

- 始点と終点が同じ道を「閉路」と呼ぶ
- Euler閉路
  - 全ての弧を一度ずつ経由する閉路
  - 一筆書き
- Hamilton閉路
  - 全ての頂点を一度ずつ経由する閉路

# EULER閉路

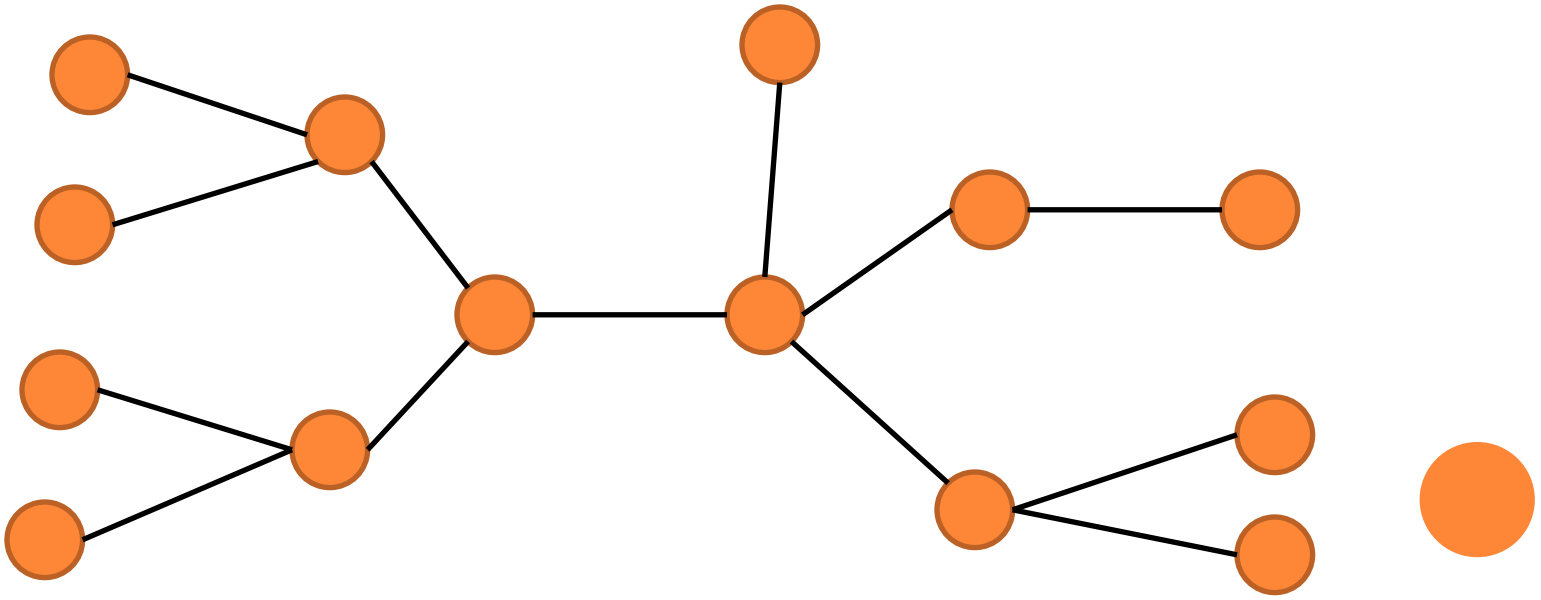


# HAMILTON閉路



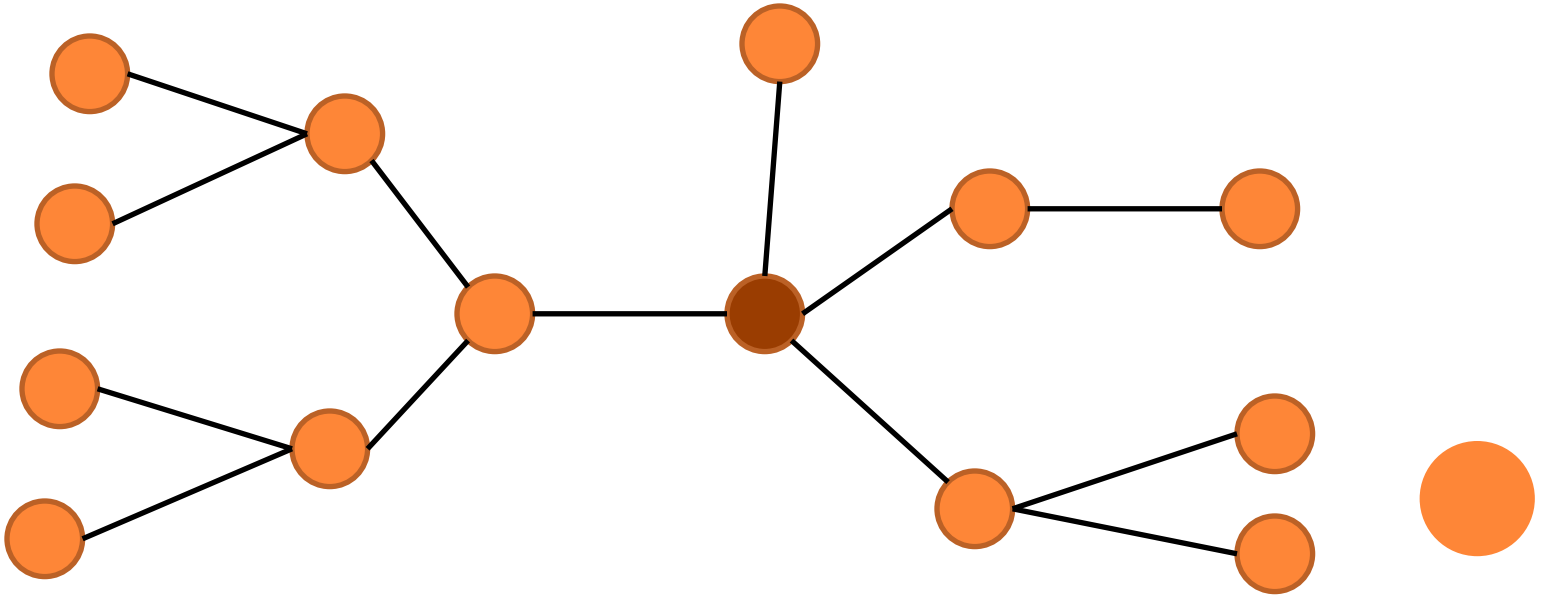
# 木 (Tree)

- 閉路を含まない連結なグラフ
  - 「木」の形
  - 通常は無向グラフ
  - 葉 (leaf) : 次数が1である点

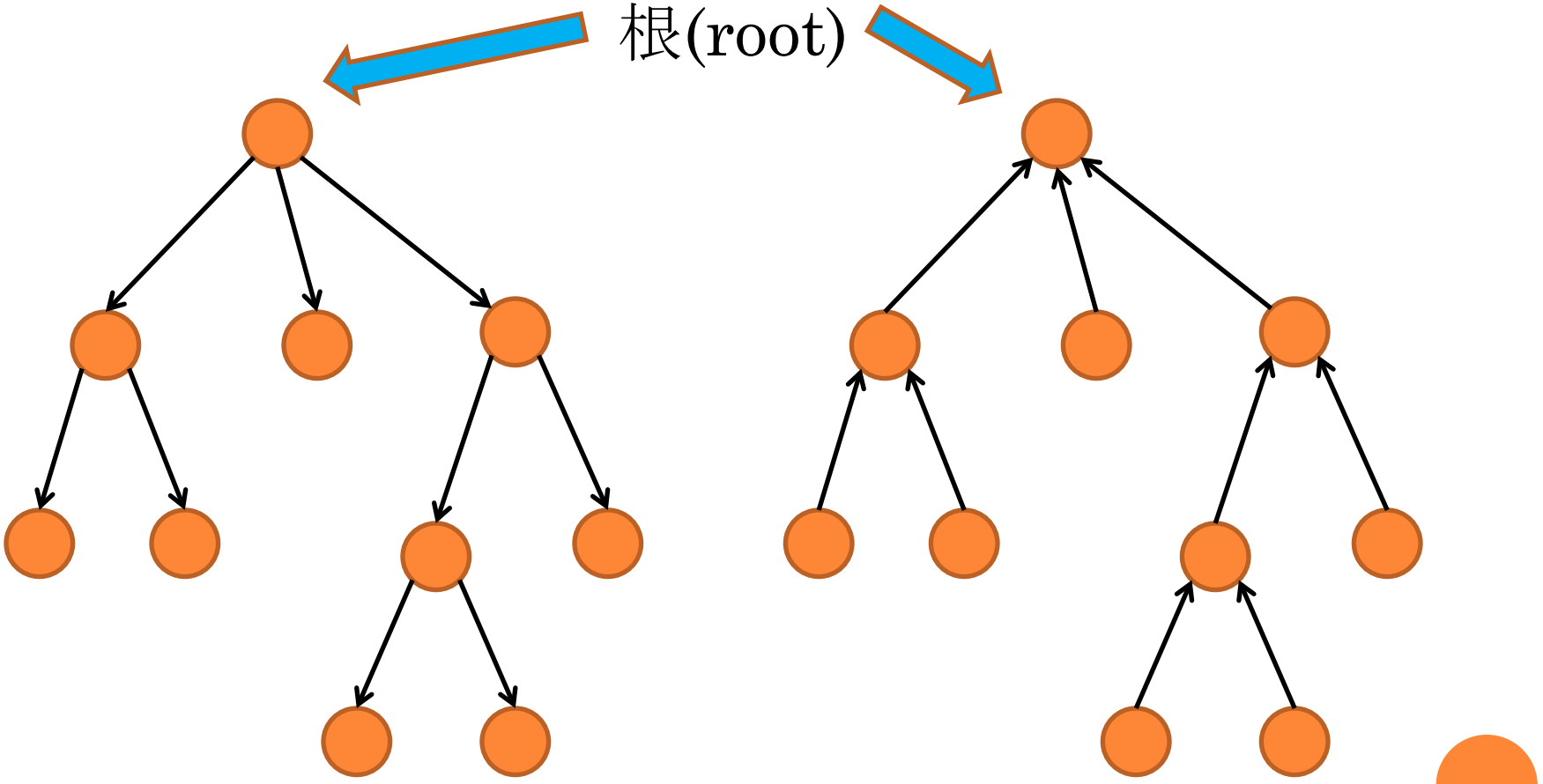


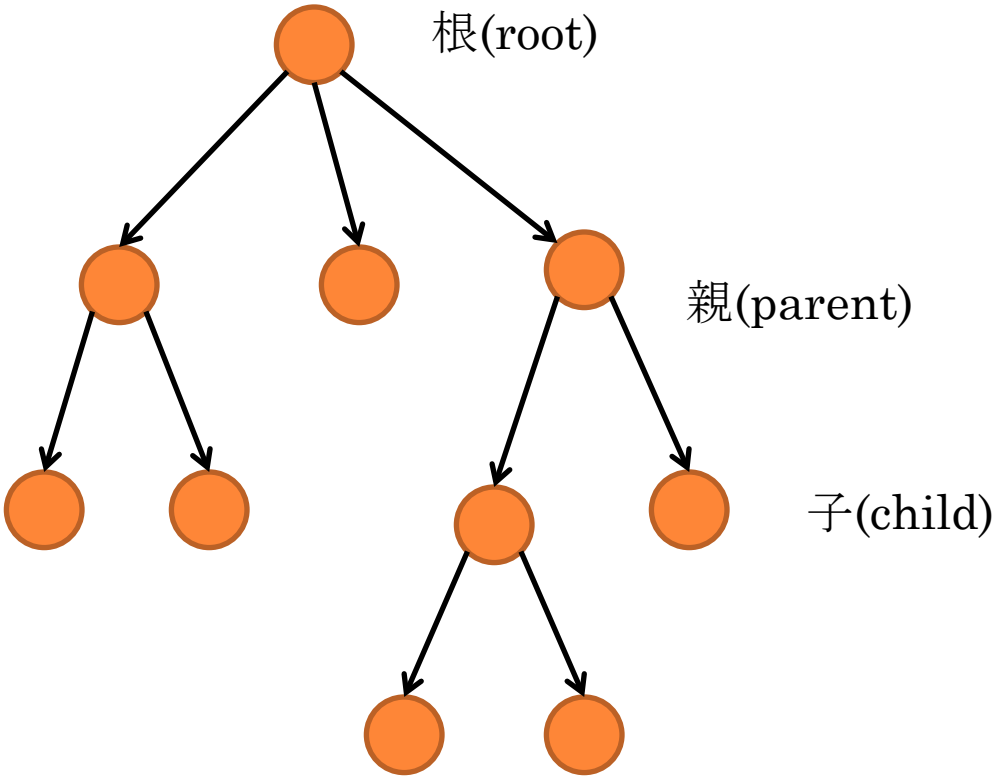
# 木 (Tree)

- 無向木では、任意の点を選んで根(root)とできる



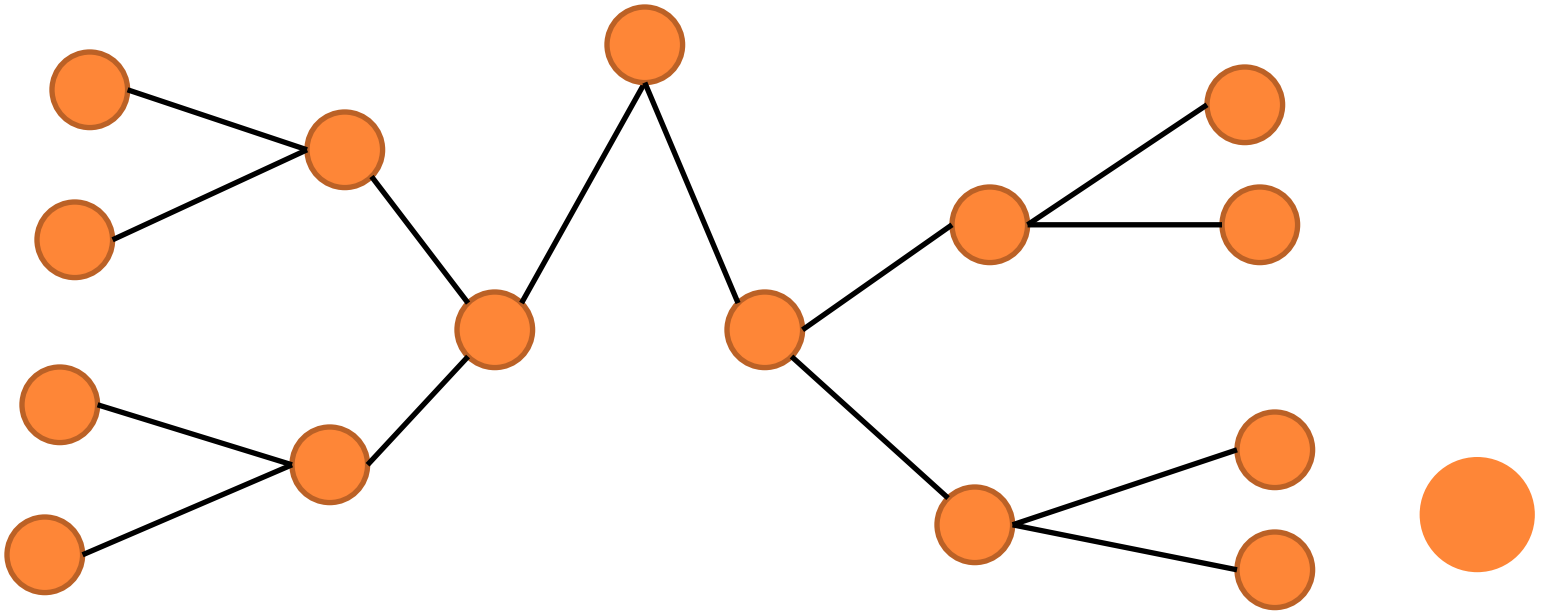
# 有向木(Directed Tree)




根(root)
親(parent)
子(child)

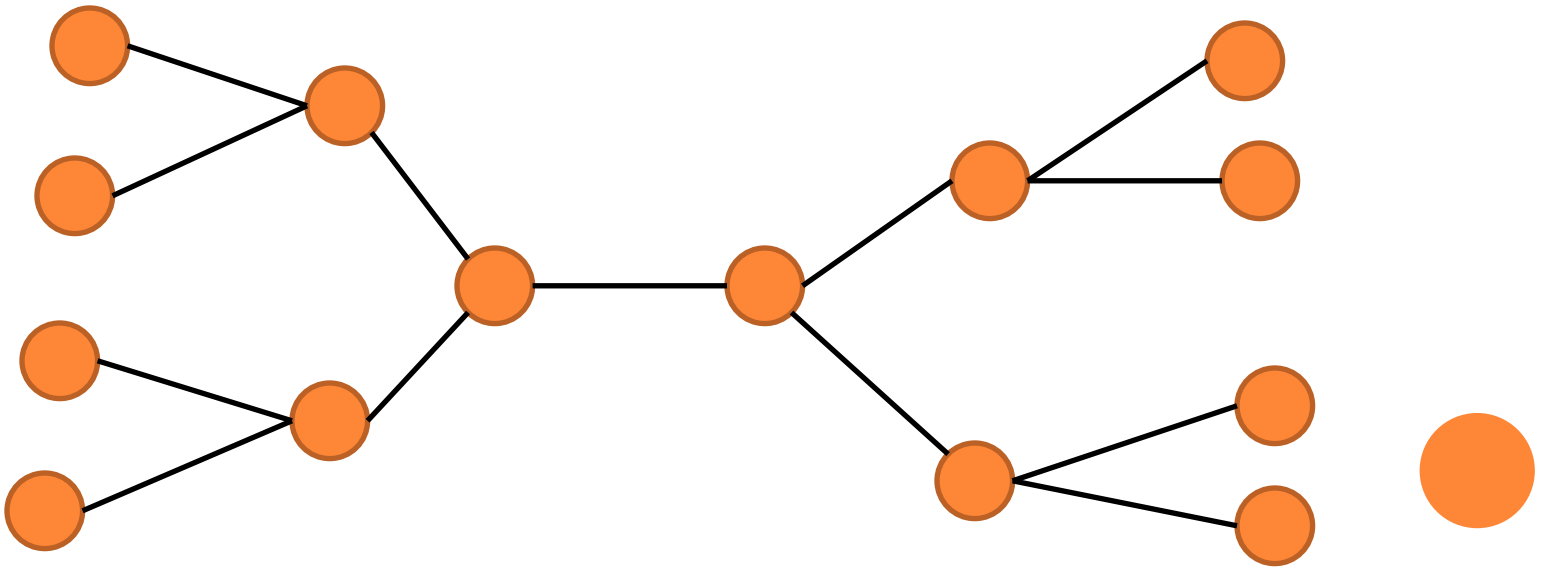
# 二分木(Binary Tree)

- 葉以外の点が、二個の子を持つ木



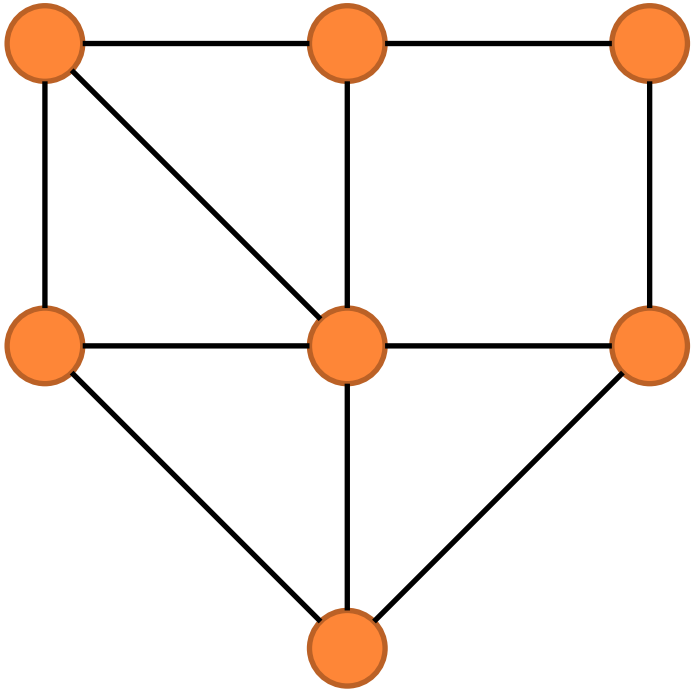
# ケーリー木(Cayley tree)

- 葉以外の点の次数が等しい木



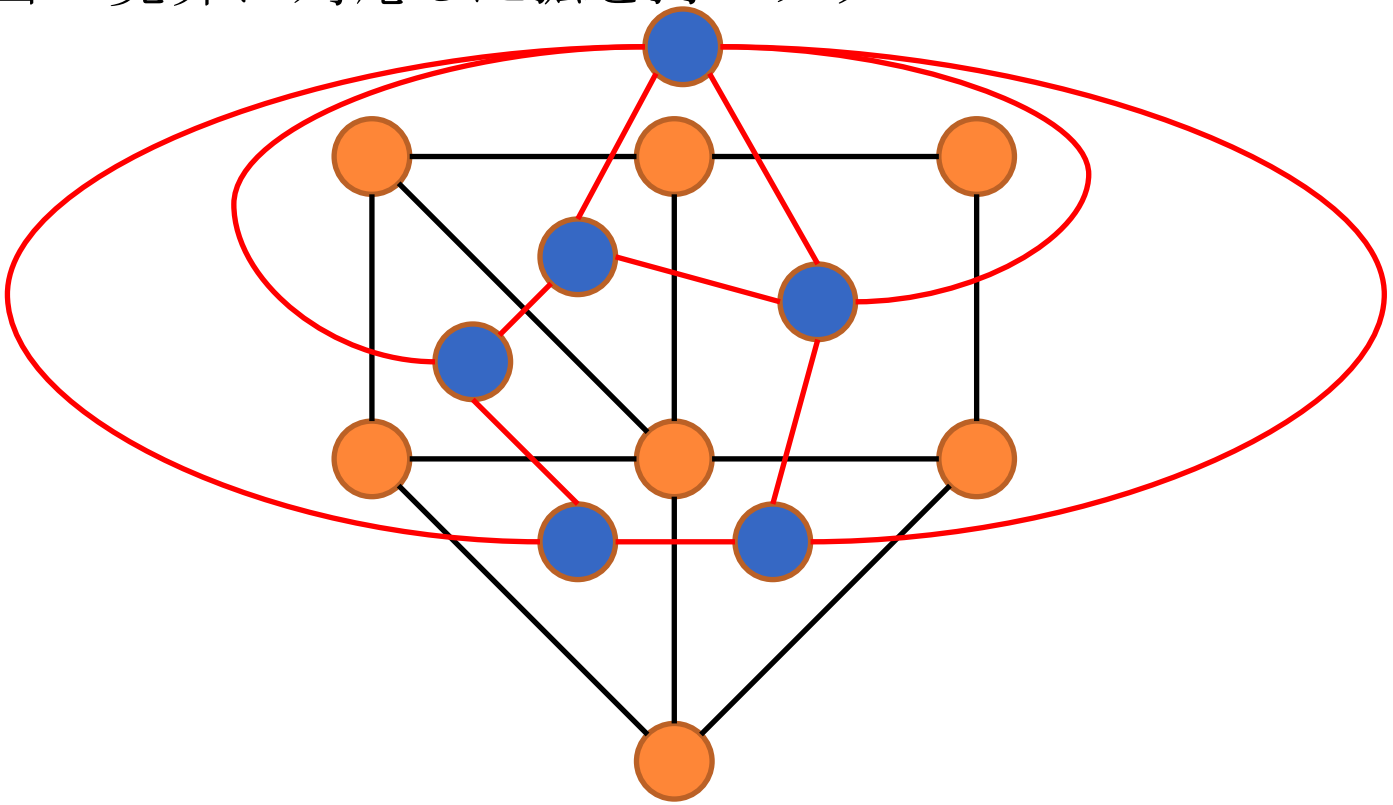
# 平面グラフ(Planer Graph)

- 頂点の配置によって、弧が交差しないように描くことができるグラフ



# 平面グラフの双対グラフ(Dual Graph)

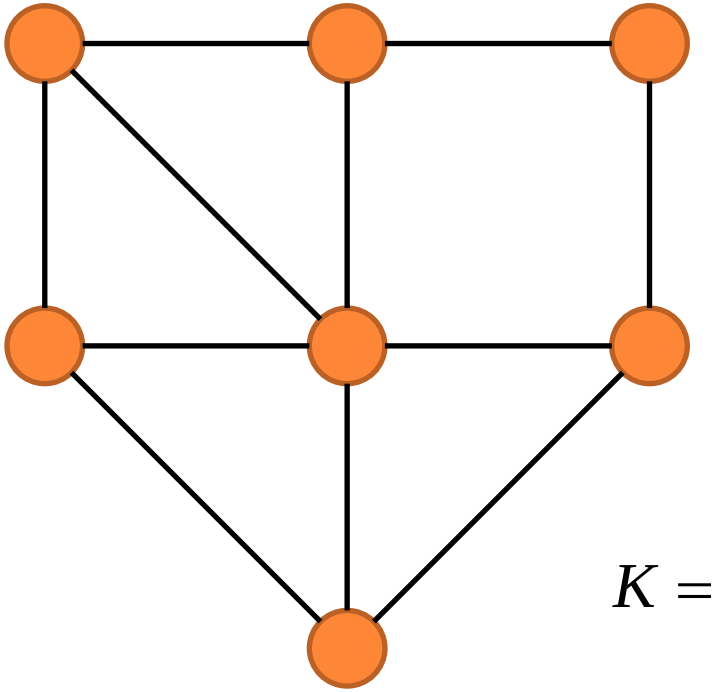
- 平面グラフの弧で囲まれた面ごとに、一つの頂点を置き、面の境界に対応した弧を持つグラフ

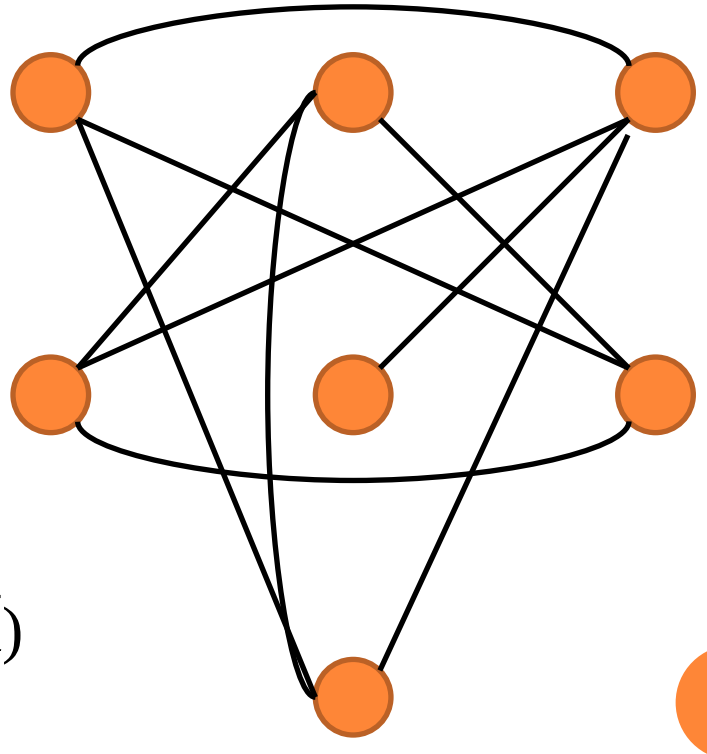


# 補グラフ(COMPLEMENT)

$G = (V, A)$

$\overline{G} = (V, \overline{A})$





$K = (V, A \cup \overline{A})$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$