「グラフと組み合わせ」課題 3 (解答例)

2011/4/25

1　数学的帰納法 1

自然数nに対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

解答例

1. $n=1$の場合、左辺は$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$であり、右辺は$\frac{1}{6} 1 \times 2 \times 3 = 1$であり、公式が成り立つ。
2. あるnで成り立つと仮定する。$n+1$の場合を考える。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\{n(2n+1)+6(n+1)\} \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)\{2(n+1)+1\}\end{aligned}$$

従って、公式が成り立つ。

2　数学的帰納法 2

自然数nに対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

解答例

1. $n=1$の場合、左辺は$2-1=1$であり、右辺は$1^2=1$であり、公式が成り立つ。
2. あるnで成り立つと仮定する。$n+1$の場合を考えると、以下のように成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2(n+1)-1$$
$$=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

3 グラフの記述

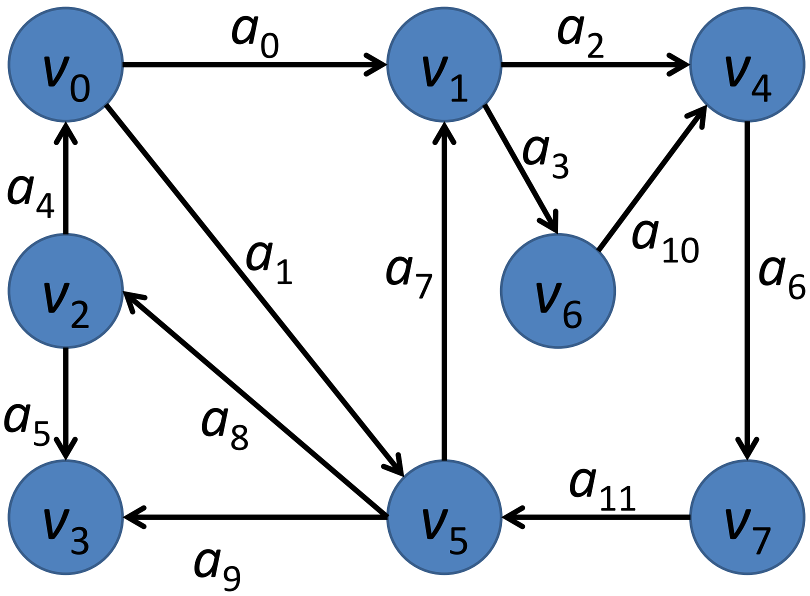
次のグラフを幾何学的に、つまり図形として表記しなさい。

$$V=\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$$

$$A=\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11}\}$$

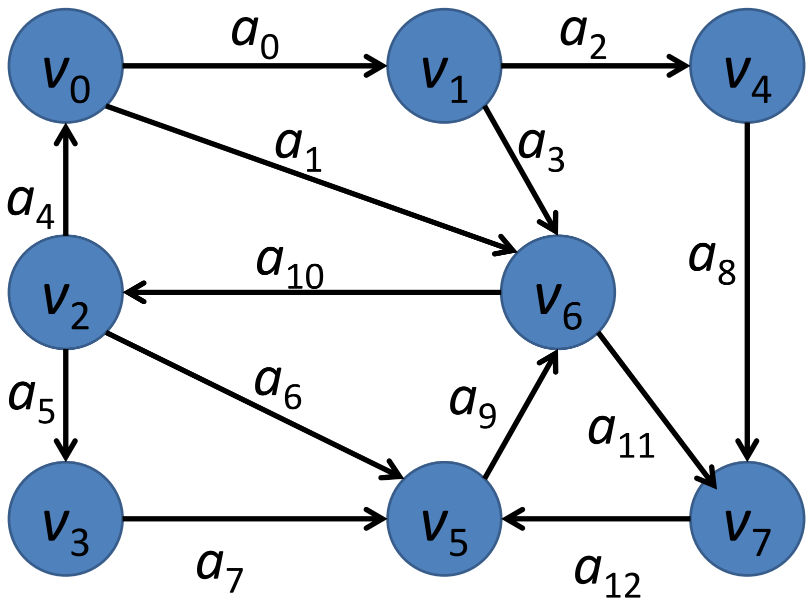
$$\begin{array}{llll}
\partial^+ a_0 = v_0 & \partial^- a_0 = v_1 & \partial^+ a_1 = v_0 & \partial^- a_1 = v_5 \\
\partial^+ a_2 = v_1 & \partial^- a_2 = v_4 & \partial^+ a_3 = v_1 & \partial^- a_3 = v_6 \\
\partial^+ a_4 = v_2 & \partial^- a_4 = v_0 & \partial^+ a_5 = v_2 & \partial^- a_5 = v_3 \\
\partial^+ a_6 = v_4 & \partial^- a_6 = v_7 & \partial^+ a_7 = v_5 & \partial^- a_7 = v_1 \\
\partial^+ a_8 = v_5 & \partial^- a_8 = v_2 & \partial^+ a_9 = v_5 & \partial^- a_9 = v_3 \\
\partial^+ a_{10} = v_6 & \partial^- a_{10} = v_4 & \partial^+ a_{11} = v_7 & \partial^- a_{11} = v_5
\end{array}$$

解答例



4　グラフの記述(幾何学表現から記号表現へ)

次のグラフを記号で表現しなさい。



解答例

$$V=\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$$

$$A=\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12}\}$$

$$
\begin{array}{llll}
\partial^+ a_0 = v_0 & \partial^- a_0 = v_1 & \partial^+ a_1 = v_0 & \partial^- a_1 = v_6 \\
\partial^+ a_2 = v_1 & \partial^- a_2 = v_4 & \partial^+ a_3 = v_1 & \partial^- a_3 = v_6 \\
\partial^+ a_4 = v_2 & \partial^- a_4 = v_0 & \partial^+ a_5 = v_2 & \partial^- a_5 = v_3 \\
\partial^+ a_6 = v_2 & \partial^- a_6 = v_5 & \partial^+ a_7 = v_3 & \partial^- a_7 = v_5 \\
\partial^+ a_8 = v_4 & \partial^- a_8 = v_7 & \partial^+ a_9 = v_5 & \partial^- a_9 = v_6 \\
\partial^+ a_{10} = v_6 & \partial^- a_{10} = v_2 & \partial^+ a_{11} = v_6 & \partial^- a_{11} = v_7 \\
\partial^+ a_{12} = v_7 & \partial^- a_{12} = v_5 & &
\end{array}
$$