「グラフと組み合わせ」課題 1 (解答例)

2011/4/11

1　集合の演算

二つの集合

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$Y = \{0, 2, 4, 7\}$$

について、以下の集合を求め、要素を列挙することで答えなさい。

1. $X \cup Y$
2. $X \cap Y$
3. $X \setminus Y$

解答例

1. $X \cup Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   二つの集合 X と Y の要素を合わせた集合
2. $X \cap Y = \{0, 2, 4\}$
   二つの集合 X と Y の共通要素からなる集合
3. $X \setminus Y = \{1, 3, 5, 6\}$
   集合 X の要素のうち、集合 Y に含まれないものの集合

2　数学的帰納法

自然数 n に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{1}{(1-a)^2}\left[a - (n+1)a^{n+1} + na^{n+2}\right]$$

解答例

- $n = 0$ の場合、両辺は 0 となり、成り立つ
- ある n に対して成り立つ、つまりある n に対して、

$$\sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{1}{(1-a)^2}\left[a - (n+1)a^{n+1} + na^{n+2}\right]$$

が成り立つと仮定する。すると、以下のように$n+1$でも成り立つ。

$$\sum_{k=0}^{n+1} ka^k = \sum_{k=0}^{n} ka^k + (n+1)a^{n+1}$$

ここで、nに対する表式を代入する。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} ka^k &= \frac{1}{(1-a)^2}\left[a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}\right]+(n+1)a^{n+1}\\ &= \frac{1}{(1-a)^2}\left[a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}+(n+1)a^{n+1}-2(n+1)a^{n+2}+(n+1)a^{n+3}\right]\\ &= \frac{1}{(1-a)^2}\left[a-(n+2)a^{n+2}+(n+1)a^{n+3}\right]\end{aligned}$$

以上より、ある自然数nに対して成り立つならば、$n+1$に対しても成り立つことが示される。数学的帰納法より、任意の自然数nに対して成り立つ。

参考

　数学的帰納法ではないが、以下のように公式を導出することができる。既知の公式

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

の両辺をaについて微分する。$k=0$の項が無いことに注意する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} &= \frac{1-a^{n+1}}{(1-a)^2}-\frac{(n+1)a^n}{1-a}\\ &= \frac{1}{(1-a)^2}\left[1-a^{n+1}-(n+1)(1-a)a^n\right]\\ &= \frac{1}{(1-a)^2}\left[1-(n+1)a^n+na^{n+1}\right]\end{aligned}$$

両辺にaを掛ける。左辺の$k=0$ の項に注意に必要する。

$$\begin{aligned}a\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} &= 0a^0+\sum_{k=1}^{n} ka^k\\ &= \sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{1}{(1-a)^2}\left[a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}\right]\end{aligned}$$

以上より、公式を得る。