

「グラフと組み合わせ」課題 7 (解答例)

2011/6/6

1 列挙

n 個の文字の集合

$$S = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$$

の全てからなる文字列、つまり同じ文字を含まない、長さ n の文字列を列挙する方法を考える。

1. 何通りの文字列があるかを答えなさい。また、そのことが正しいことを数学的帰納法で示しなさい。
2. 文字列を列挙する再帰的アルゴリズムを構築しなさい。
3. $n=4$ の場合に、上記のアルゴリズムに従って文字列を列挙しなさい。列挙する途中の過程についても示しなさい。

解答例

1. n 個の文字から構成され、同じ文字を含まない文字列の総数は $n!$ である。このことを数学的帰納法で証明する。
 - $n=1$ の場合、明らか。
 - ある文字数 n の時、文字列の総数が $n!$ であると仮定する。各文字列に対して、新しい文字 α を加えた文字列を生成することを考える。文字の間が $n-1$ 箇所、それに先頭と末尾を加え、文字 α を加えて長さ $n+1$ の文字列を作る方法は $n+1$ 通りである。各文字列の同じ数の場合があるので、
 $(n+1) \times n! = (n+1)!$ 通りの文字列が生成される。
2. アルゴリズムを `enumString(L)` とする。ここで、 L は、文字列作成に既に使用した文字のリストとする。つまり、生成された文字列となる。

```

enumString(L){
  if (|L| == |S|) {Lを印刷}
  else {
    forall (s ∈ S) {
      if (s ∉ L){
        L ← L ∪ {s}
        enumString(L)
        L ← L \ {s}
      }
    }
  }
}

```

3. $S = \{a, b, c, d\}$ の場合の動作例を示す。再帰関数を f とする。

$f\{\{\}\}$	$f\{[a]\}$	$f\{[a,b]\}$	$f\{[a,b,c]\}$	$f\{[a,b,c,d]\}$
			$f\{[a,b,d]\}$	$f\{[a,b,d,c]\}$
		$f\{[a,c]\}$	$f\{[a,c,b]\}$	$f\{[a,c,b,d]\}$
			$f\{[a,c,d]\}$	$f\{[a,c,d,b]\}$
		$f\{[a,d]\}$	$f\{[a,d,b]\}$	$f\{[a,d,b,c]\}$
			$f\{[a,d,c]\}$	$f\{[a,d,c,b]\}$
	$f\{[b]\}$	$f\{[b,a]\}$	$f\{[b,a,c]\}$	$f\{[b,a,c,d]\}$
			$f\{[b,a,d]\}$	$f\{[b,a,d,c]\}$
		$f\{[b,c]\}$	$f\{[b,c,a]\}$	$f\{[b,c,a,d]\}$

			$f\{[b,c,d]\}$	$f\{[b,c,d,a]\}$
		$f\{[b,d]\}$	$f\{[b,d,a]\}$	$f\{[b,d,a,c]\}$
			$f\{[b,d,c]\}$	$f\{[b,d,c,a]\}$
	$f\{[c]\}$	$f\{[c,a]\}$	$f\{[c,a,b]\}$	$f\{[c,a,b,d]\}$
			$f\{[c,a,d]\}$	$f\{[c,a,d,b]\}$
		$f\{[c,b]\}$	$f\{[c,b,a]\}$	$f\{[c,b,a,d]\}$
			$f\{[c,b,d]\}$	$f\{[c,b,d,a]\}$
		$f\{[c,d]\}$	$f\{[c,d,a]\}$	$f\{[c,d,a,b]\}$
			$f\{[c,d,b]\}$	$f\{[c,d,b,a]\}$
	$f\{[d]\}$	$f\{[d,a]\}$	$f\{[d,a,b]\}$	$f\{[d,a,b,c]\}$
			$f\{[d,a,c]\}$	$f\{[d,a,c,b]\}$
		$f\{[d,b]\}$	$f\{[d,b,a]\}$	$f\{[d,b,a,c]\}$
			$f\{[d,b,c]\}$	$f\{[d,b,c,a]\}$
		$f\{[d,c]\}$	$f\{[d,c,a]\}$	$f\{[d,c,a,b]\}$
			$f\{[d,c,b]\}$	$f\{[d,c,b,a]\}$

2 実装

前問で作成した再帰的アルゴリズムをプログラムとして実装し、動作を確認しなさい。

解答例

プログラムは別紙に示す。実行結果を以下に示す。各行の最後が列挙すべき長さ 4 の文字列である。

```
a ab abc abcd
abd abdc
ac acb acbd
acd acdb
ad adb adbc
adc adcb
b ba bac bacd
bad badc
bc bca beca
bcd bcda
bd bda bdac
bdc bdca
c ca cab cabd
cad cadb
cb cba cbad
cbd cbda
cd cda cdab
cdb cdba
d da dab dabc
dac dacb
db dba dbac
dbc dbca
dc dca dcab
dcb dcba
24 strings are found.
```

EnumString.java

```
package EnumerateString;

import java.util.Collections;
import java.util.HashSet;
import java.util.Set;

/**
 * 文字列の列挙
 * @author tadaki
 */
public class EnumString {
    /** set of characters */

    /** 使用する文字の集合 */
    private Set<Character> stringSet = null;
    /** 生成された文字列の数 */
    private int n;
    /** デバッグの可否 */
    private final boolean debug = true;

    /** Creates a new instance of EnumString */
    public EnumString(char chars[]) {
        /** stringSetに使用する文字を保存 */
        stringSet = createCharacterSet();
        for (int i = 0; i < chars.length; i++) {
            stringSet.add(Character.valueOf(chars[i]));
        }
        /** 空の文字列に対応した文字集合 */
        Set<Character> string = createCharacterSet();
        n = 0;
        enumerate(string);
        System.out.println(String.valueOf(n) + " strings are found.");
    }

    /**
     * 空の文字集合の生成
     * @return 生成された集合
     */
    static private Set<Character> createCharacterSet() {
        return Collections.synchronizedSet(new HashSet<Character>());
    }

    /**
     * 文字列の列挙

```

EnumString.java

```
* @param str 構成された文字列
*/
private void enumerate(Set<Character> str) {
    if (debug) { //デバッグの際に文字列を出力
        printString(str, false);
    }
    //全ての文字を使用した場合
    if (str.size() == stringSet.size()) {
        printString(str, true);
        n++;
    } else {
        //stringSetの全ての要素について実行
        for (Character c : stringSet) {
            if (!str.contains(c)) {
                str.add(c);
                enumerate(str); //再帰呼び出し
                str.remove(c);
            }
        }
    }
}

/**
 * 文字列の印刷
 * @param str 構成された文字列
 * @param n 文字列の番
 * @param b 真ならば最終出力
 */
private void printString(Set<Character> str, boolean b) {
    if (!b && str.size() != stringSet.size() && !str.isEmpty()) {
        System.out.print(" ");
        for (Character c : str) {
            System.out.print(c);
        }
    }
    if (b) {
        System.out.print(" ");
        for (Character c : str) {
            System.out.print(c);
        }
        System.out.println();
    }
}
```

EnumString.java

```
/**
 * @param args the command line arguments
 */
public static void main(String[] args) {
    char chars[] = {'a', 'b', 'c', 'd'};
    new EnumString(chars);
}
}
```