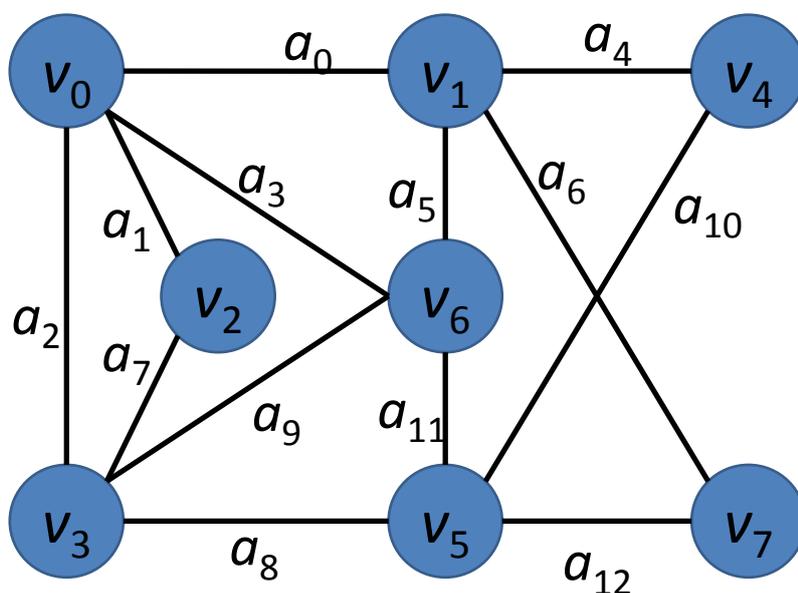


「グラフと組み合わせ」課題 3 (解答例)

2011/5/2

1 Euler閉路

次のグラフ中の Euler 閉路 (一筆描き) を見つけなさい。



解答例

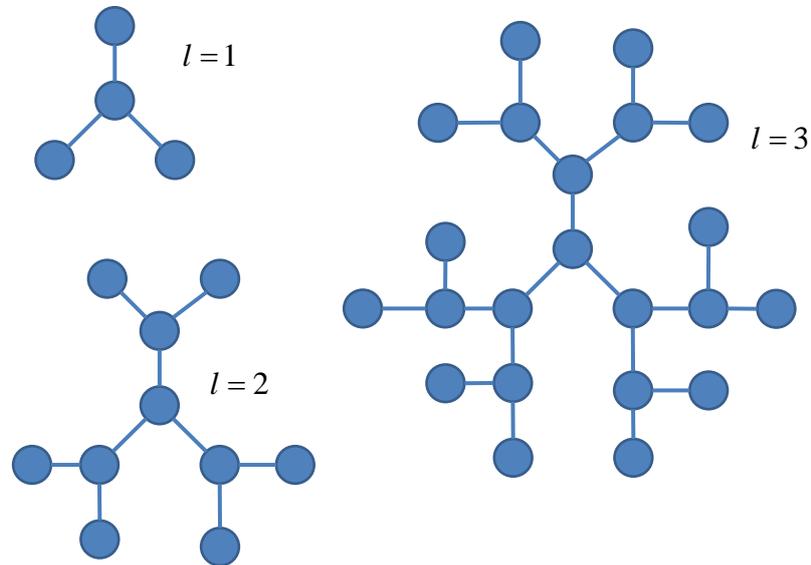
一つの例だけを示す

$$a_0 a_5 a_3 a_1 a_7 a_9 a_{11} a_{10} a_4 a_6 a_{12} a_8 a_2$$

2 Cayley木内の点間の距離

次数 $k > 2$ の Cayley 木を以下の手順で構成することにする。下の図は $k = 3$ の場合である。

1. 頂点の数が $k+1$ の Cayley 木を作る (図中の $l=1$ の場合)。
2. 外側の k 個のそれぞれの頂点から、新たに $k-1$ 本の弧を伸ばして新しい頂点を接続する (図中の $l=2$ の場合)。
3. 上記ステップを $l=L$ まで繰り返す。



このとき頂点の数 N を L で表しなさい。

解答例

$l=1$ の場合、頂点数は $n=k+1$ である。 $l=2$ の場合、外側の k 個の頂点から、それぞれ $k-1$ 本の弧が伸びる。従って、総頂点数は

$$n=1+k+k(k-1)$$

となる。 $l=3$ の場合は、外側の頂点の数は $k(k-1)$ であり、総頂点数は、同様に以下のようなになる。

$$n=1+k+k(k-1)+k(k-1)^2$$

上記を繰り返すことで、次式を得る。

$$N=1+k\sum_{i=0}^{L-1}(k-1)^i=1+k\frac{1-(k-1)^L}{1-(k-1)}=\frac{2-k(k-1)^L}{2-k}$$