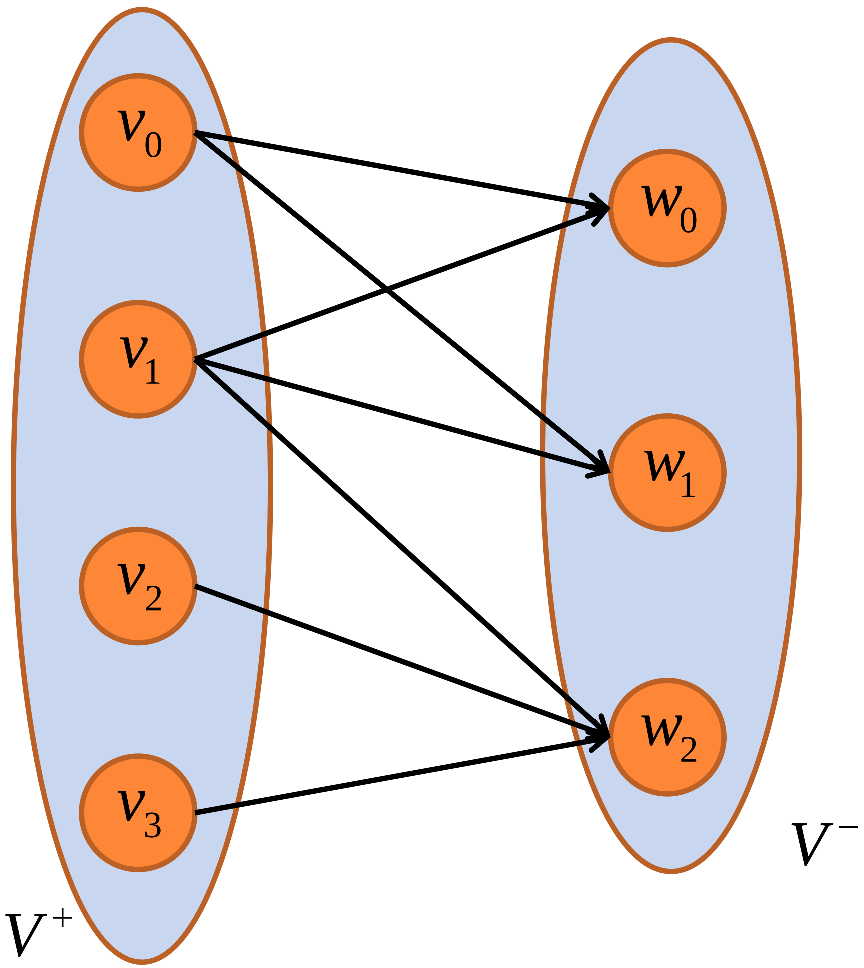
マッチングと被覆
Matching and Cover

何を考えるか

- 人と仕事の割り当て
  - 何通りの割り当てが可能か
  - 抜けが無いか
- 二部グラフで考える

二部グラフ(Bipartite Graphs)



$$G = \left(V^+, V^-, A\right)$$

マッチング(MATCHING)　$M \subseteq A$

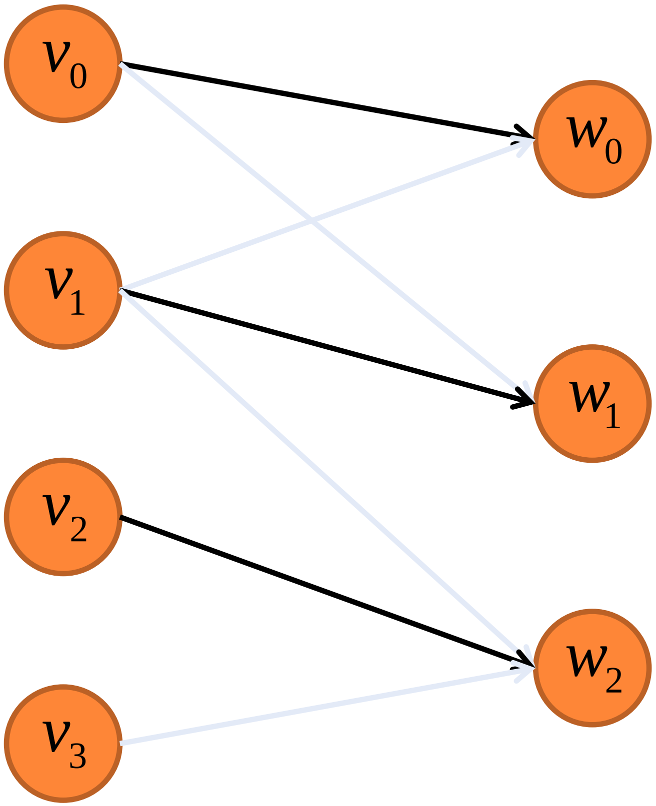
$M \subseteq A$ が以下の性質を満たすとき、マッチングと呼ぶ

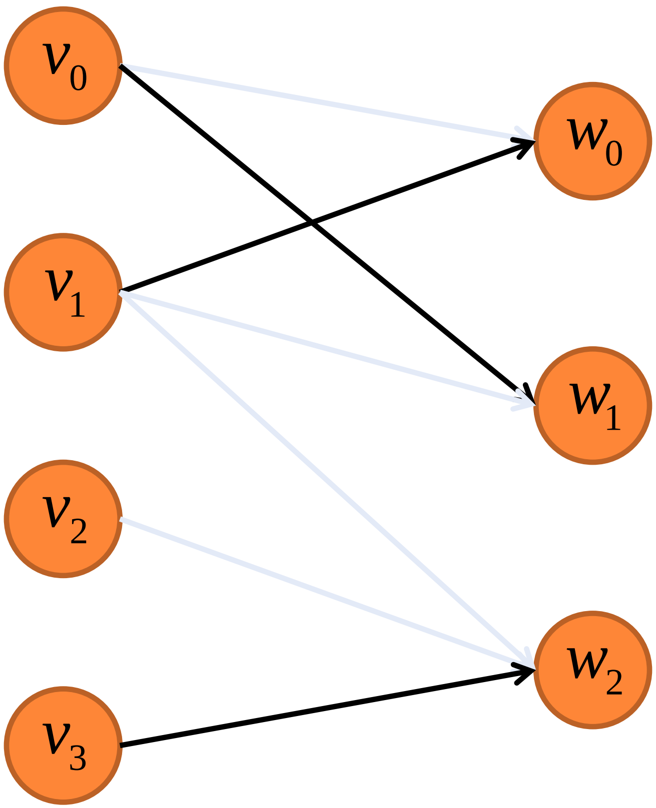
任意の相異なる 2 つの弧 $a_1, a_2 \in M$ に対して、

$$\left(\partial^+ a_1 \neq \partial^+ a_2\right) \wedge \left(\partial^- a_1 \neq \partial^- a_2\right)$$

が成り立つ。

マッチングの例





被覆(Cover)

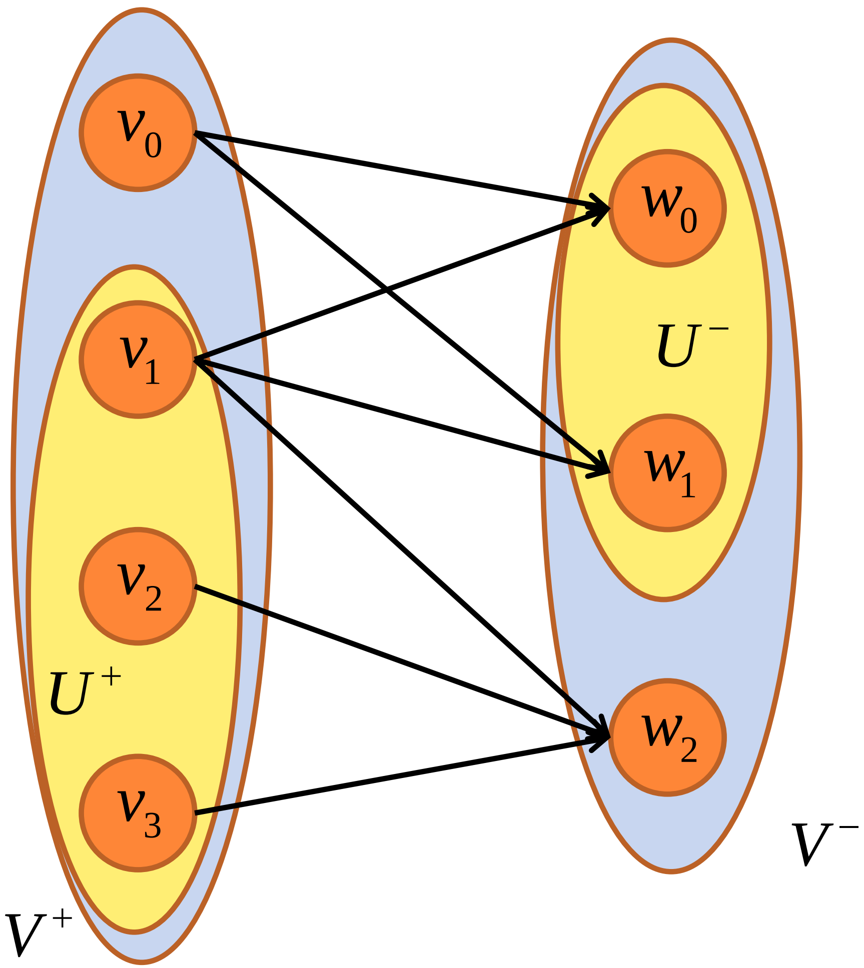
$$\left(U^{+}, U^{-}\right)$$

二つの集合$U^{+} \subseteq V^{+}$及び$U^{-} \subseteq V^{-}$の順序対$\left(U^{+}, U^{-}\right)$が以下の性質を満たす時、被覆と呼ぶ。

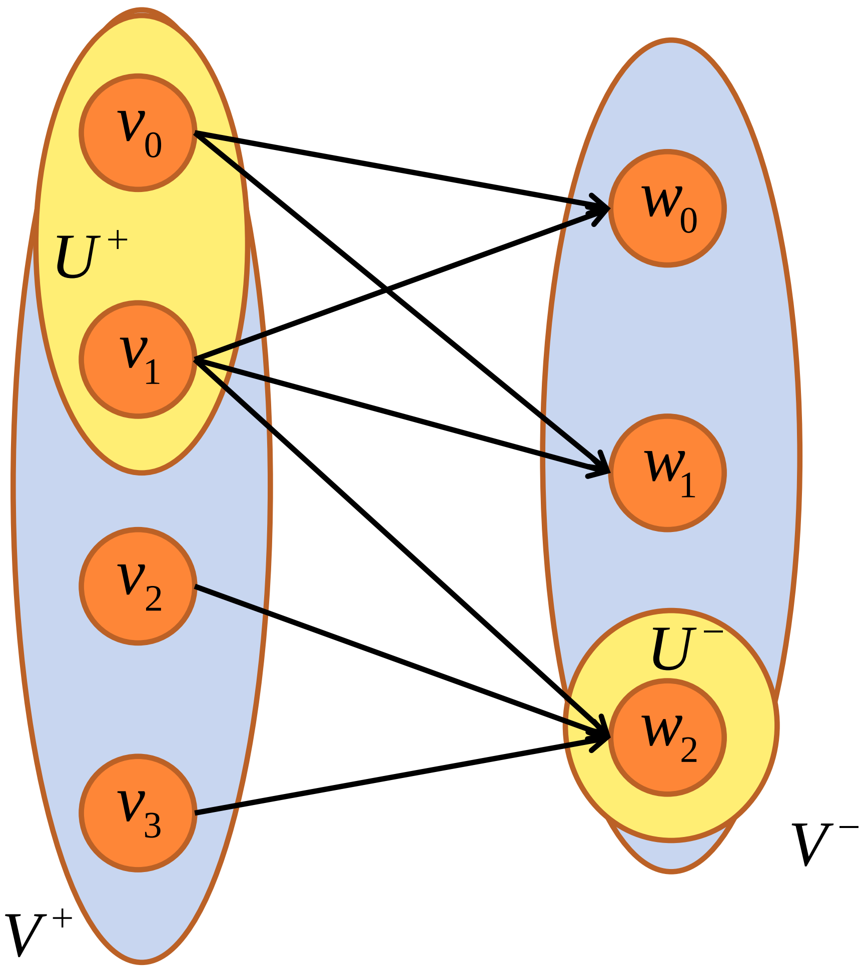
$$\forall a \in A, \left(\partial^{+} a \in U^{+}\right) \vee \left(\partial^{-} a \in U^{-}\right)$$

つまり、全ての弧の始点または終点を覆うような頂点集合の順序対である。

唯一でないことに注意



v_0
v_1
v_2
v_3
U^+
V^+
w_0
w_1
w_2
U^-
V^-


v_0
v_1
v_2
v_3
U^+
V^+
w_0
w_1
w_2
U^-
V^-

最大マッチングと最小被覆

- 明らかに次式が成り立つ。

$$|M| \leq |U^+| + |U^-|$$

  - なぜなら

$$|M| \leq |A| \leq |U^+| + |U^-|$$

最大マッチングと最小被覆

- つまり、以下が成り立っている。

$$\max|M| \le \min\left(|U^{+}| + |U^{-}|\right)$$

- 更に、等号が成り立つことを示すことができる。

対応する二端子フローネットワークを構成

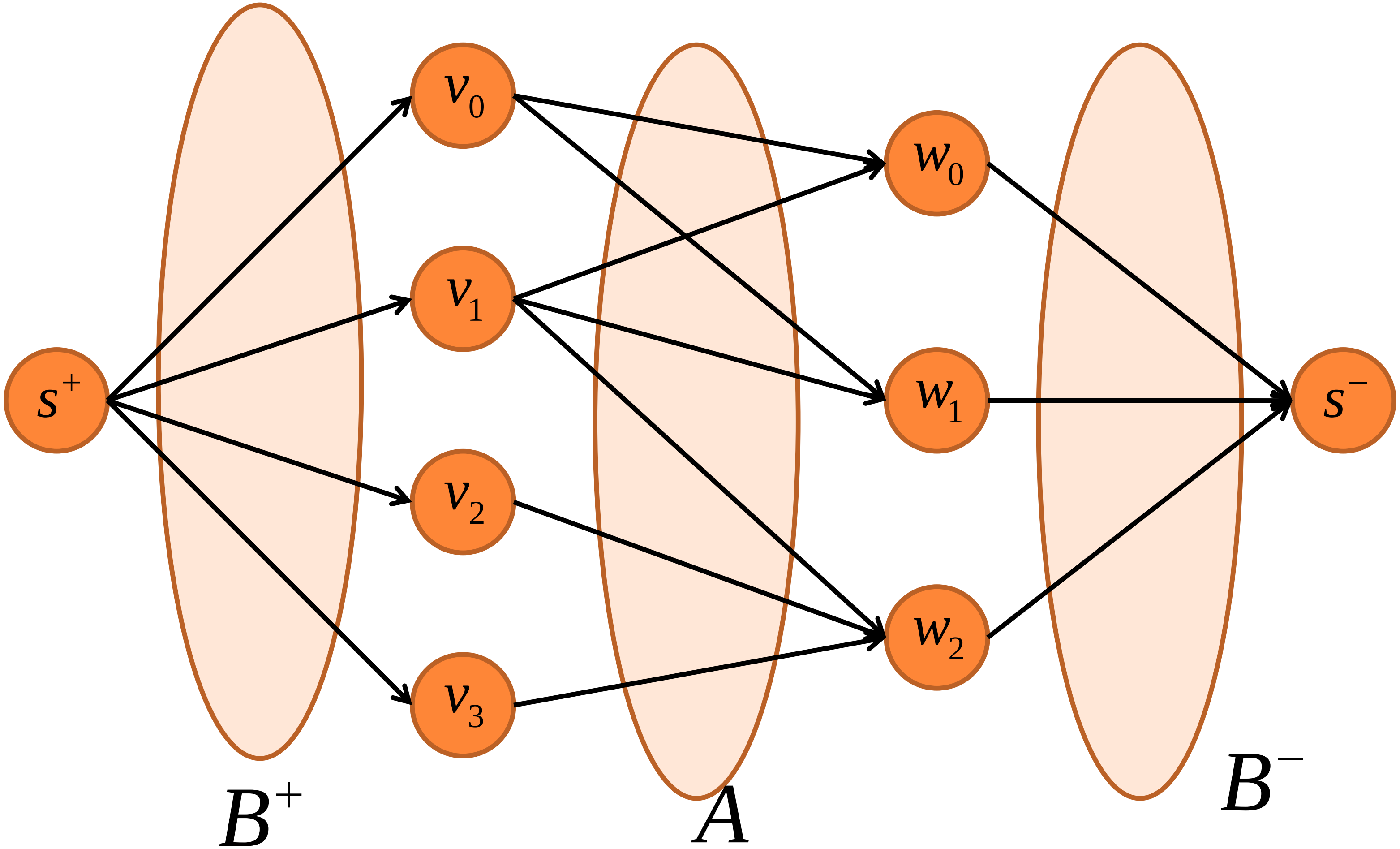
$$N_G = \left(\hat{G} = \left(\hat{V}, \hat{A}\right), s^+, s^-, c\right)$$

$$\hat{V} = V^+ \cup V^- \cup \left\{s^+, s^-\right\}$$

$$\hat{A} = A \cup B^+ \cup B^-$$

$$B^\pm = \left\{\left(s^\pm, v\pm\right) \middle| v^\pm \in V^\pm\right\}$$

$$c(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in B^\pm \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$



s^+
v_0
v_1
v_2
v_3
w_0
w_1
w_2
s^-
B^+
A
B^-

マッチングと整数フロー

- $\forall v^{\pm} \in V^{\pm}$ に流れ込むフローは 1 または 0 である。
- $\varphi\left(\delta^{-}v^{+}\right)=1$ となる頂点 v^{+} から、一つの枝にだけ

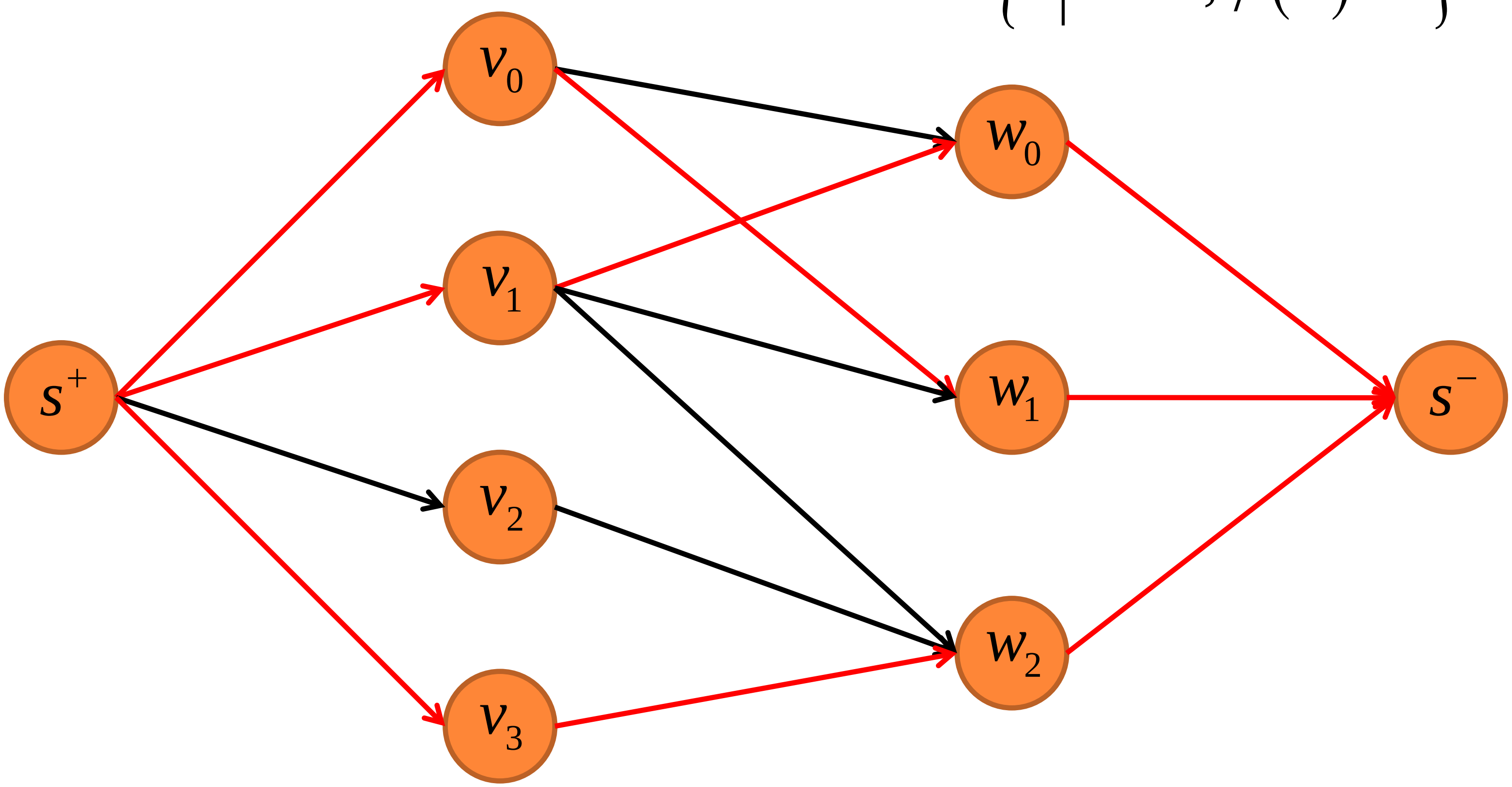
  $\varphi\left(\delta^{+}v^{+}\right)=1$が流れる。

- $\varphi\left(\delta^{+}v^{-}\right)=1$ となる頂点 v^{-} には、一つの枝からだけ

  $\varphi\left(\delta^{-}v^{-}\right)=1$が流れる。

- マッチングと整数フローが一対一対応になっている。

$$M = \left\{ a \,\middle|\, a \in A, \varphi(a) = 1 \right\}$$



$\phi(a)=1$である弧

被覆とカット

N_G の有限な容量を持つカット W に対して

$$U^+ = V^+ \setminus W$$

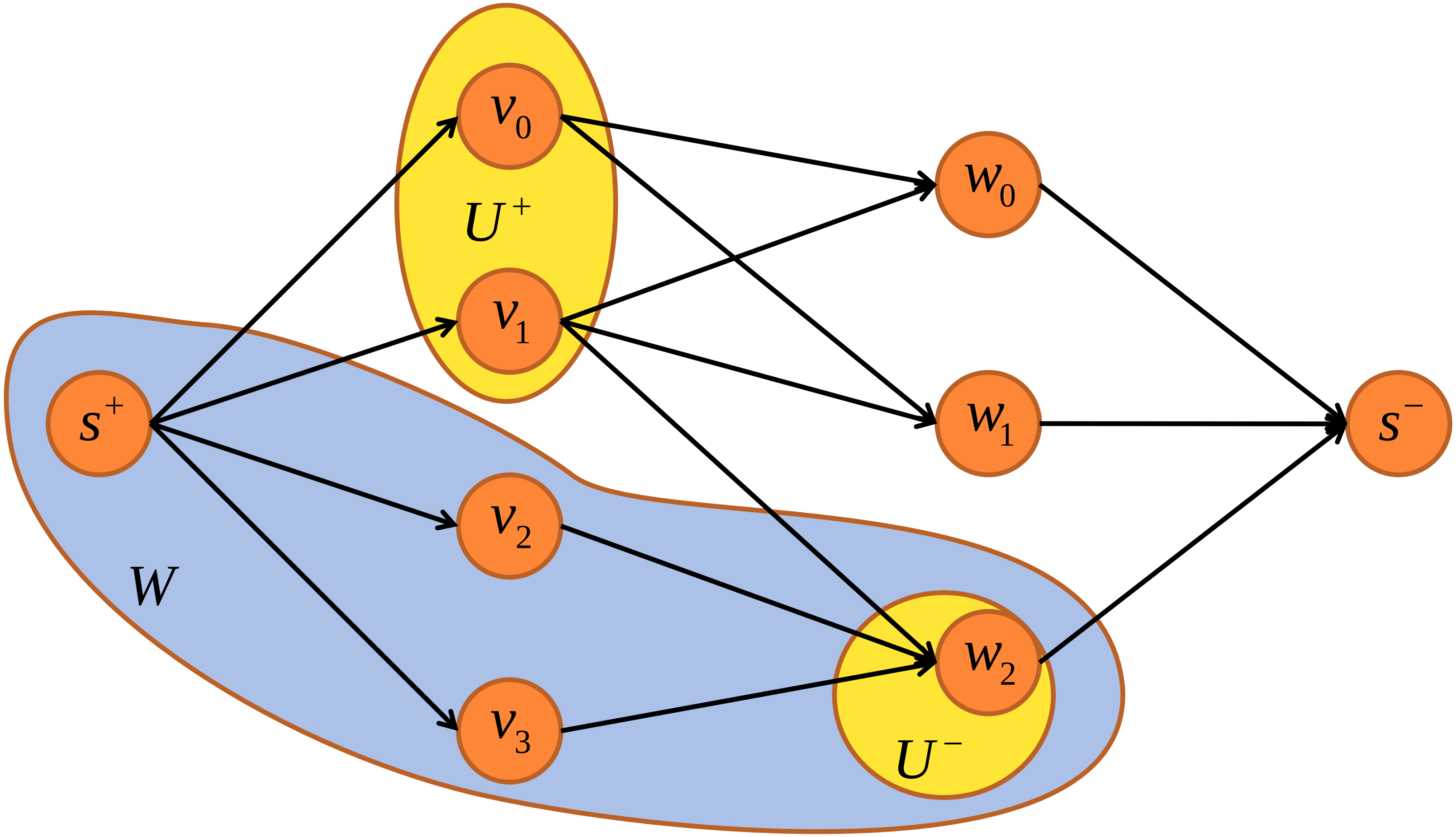
$$U^- = V^- \cap W$$

とおくと、(U^+, U^-) は被覆である。

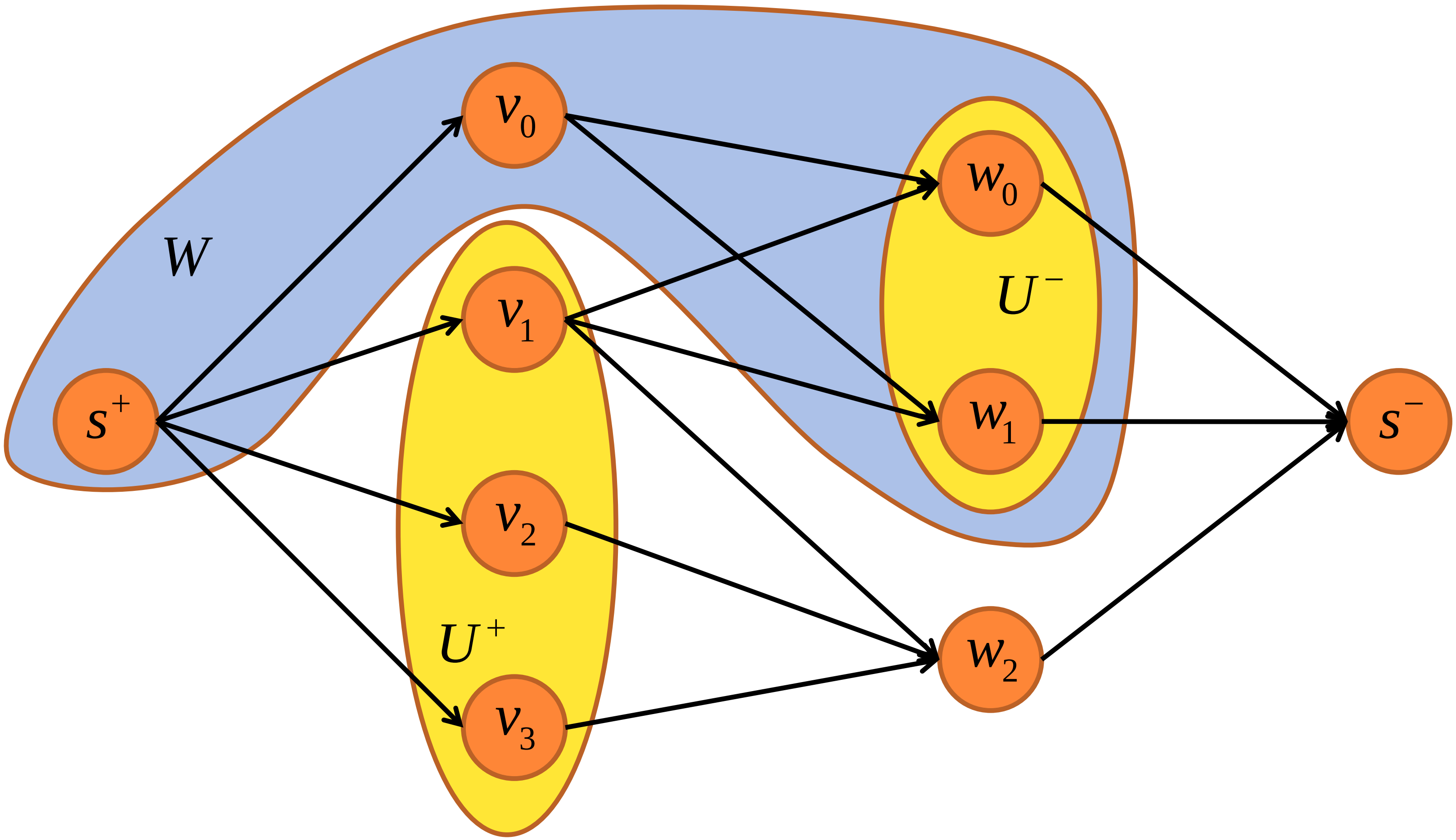
なぜなら、両端点が (U^+, U^-) に属さない弧 a が存在した

とすると、a はカット W から出る弧であり、$c(a) = +\infty$ と

なり、W が有限な容量を持つことと矛盾する。



v_0
U^+
v_1
w_0
w_1
s^+
s^-
v_2
W
w_2
v_3
U^-



W
v_0
v_1
v_2
v_3
U^+
w_0
w_1
w_2
U^-
s^+
s^-

逆に、G の任意の被覆$\left(U^+, U^-\right)$に対して

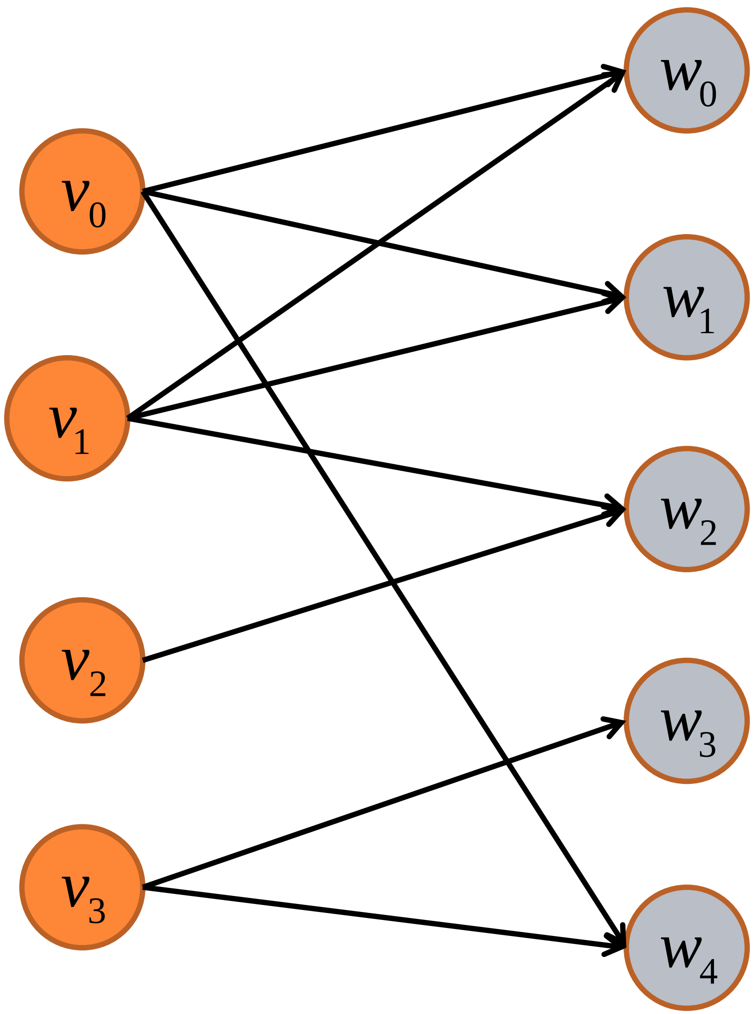
$$W = \left\{s^+\right\} \cup \left(V^+ \setminus U^+\right) \cup U^-$$

とすると、W は N_G の有限な容量を持つカットとなる。

最大マッチング＝最小被覆

$$
\begin{aligned}
&\max\left\{|M| \,\middle|\, M : G\text{のマッチング}\right\}\\
&=\max\left\{Q(\varphi) \,\middle|\, \varphi : N_G\text{中の整数値フロー}\right\}\\
&=\min\left\{\kappa_C(W) \,\middle|\, W : N_G\text{のカット}\right\}\\
&=\min\left\{|U^+|+|U^-| \,\middle|\, (U^+,U^-) : G\text{の被覆}\right\}
\end{aligned}
$$

応用例:枝彩色 (Edge Coloring)



$G(V^+, V^-; A)$

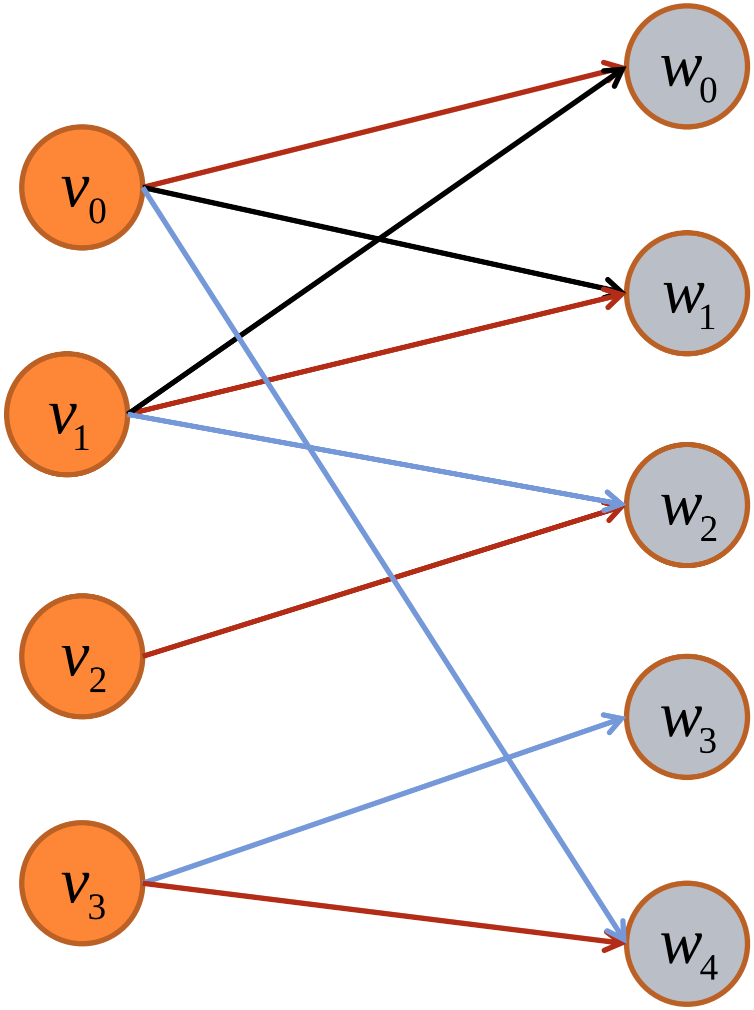
$V^+ = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$:ジョブの集まり

$V^- = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$: 機械の集まり

- 同時並行で処理できるジョブは?
- その組合せは?

- 一つの頂点に来る弧に異なる色を付ける
- 最小の色の数は?

- 最小マッチングと同じ問題

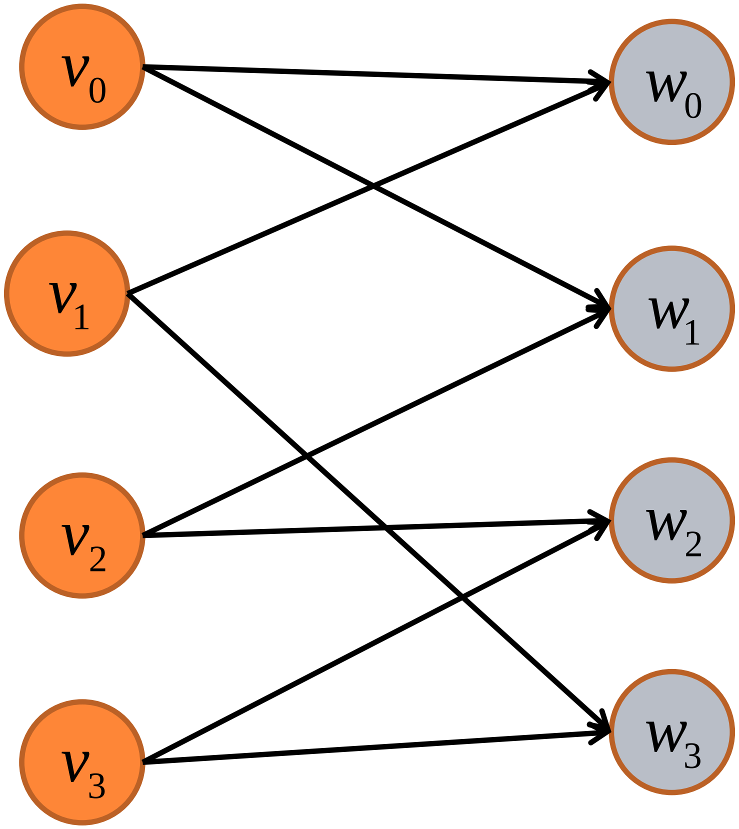


3色必要

正則2部グラフ(Regular Bipartite)

- 正則2部グラフ
  - 全ての頂点の次数が等しい2部グラフ
- k-正則な2部グラフ
  - 全ての頂点の次数がkである正則2部グラフ

例：2-正則2部グラフ



2色必要

k-正則2部グラフの枝彩色にはk色必要