最短経路問題
Shortest Path Problem

最短経路問題とは

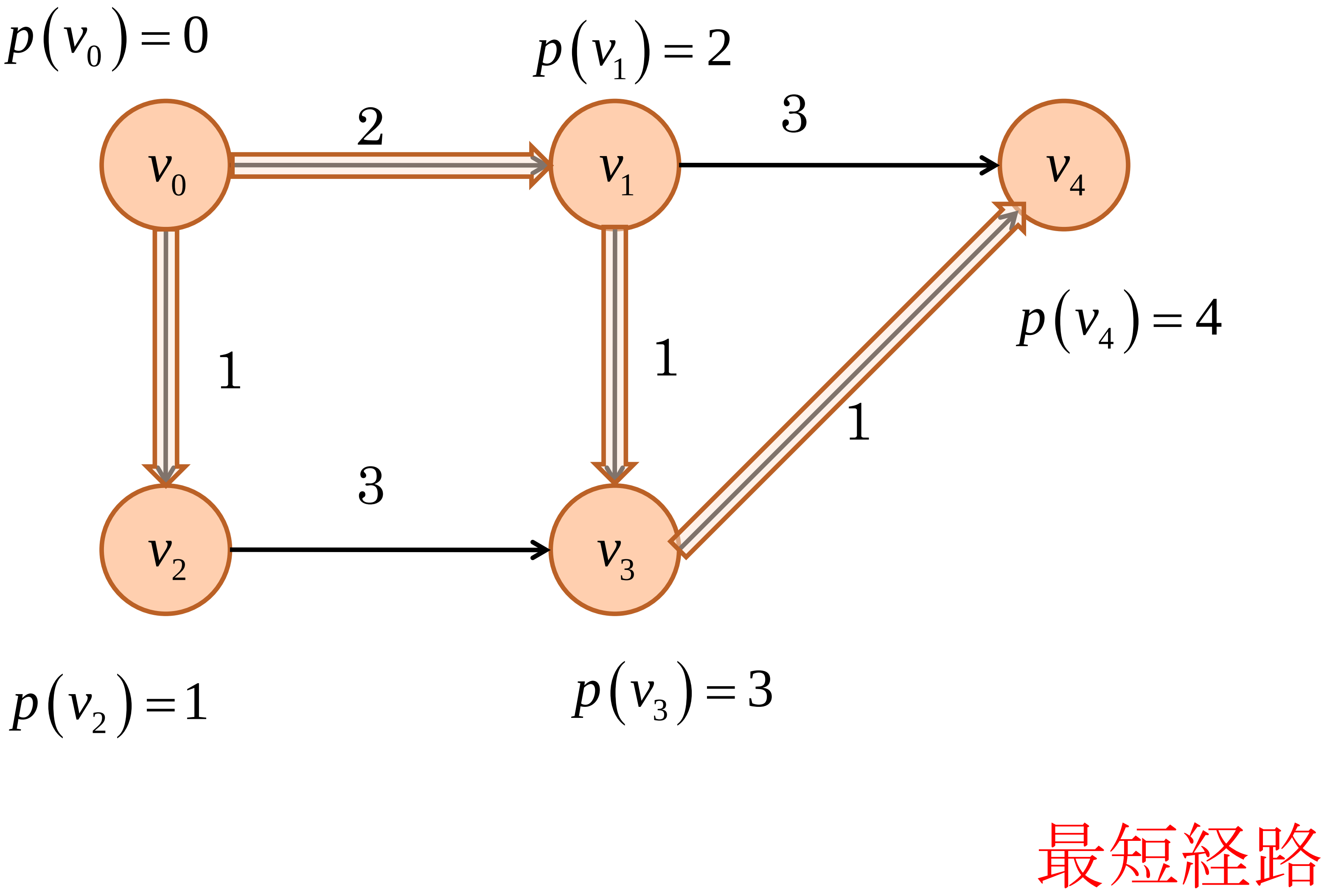
- 有向ネットワーク
  - 各弧に距離やコスト(正の実数)が定義されている
- 始点から終点までの最短有向道を見つける
- 距離・コストの最適化問題

準備：ポテンシャル $P: V \rightarrow R$

- 一般には、各頂点に定義された実数値
- 始点からの「高さ」(距離)をイメージする
- 経路のよらずに定まるはず
  - 最短の経路に沿った距離に対応するはず

- ポテンシャル(potential)→位置エネルギー
  - 経路(どうやってそこまで持ち上げたか)に依らない

ポテンシャルの例

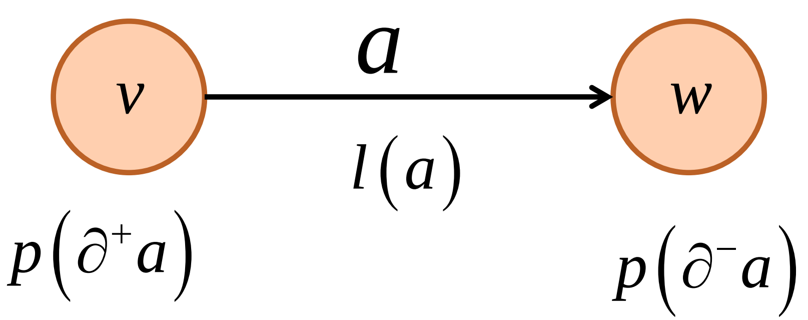


関数　$l_p : A \to R$

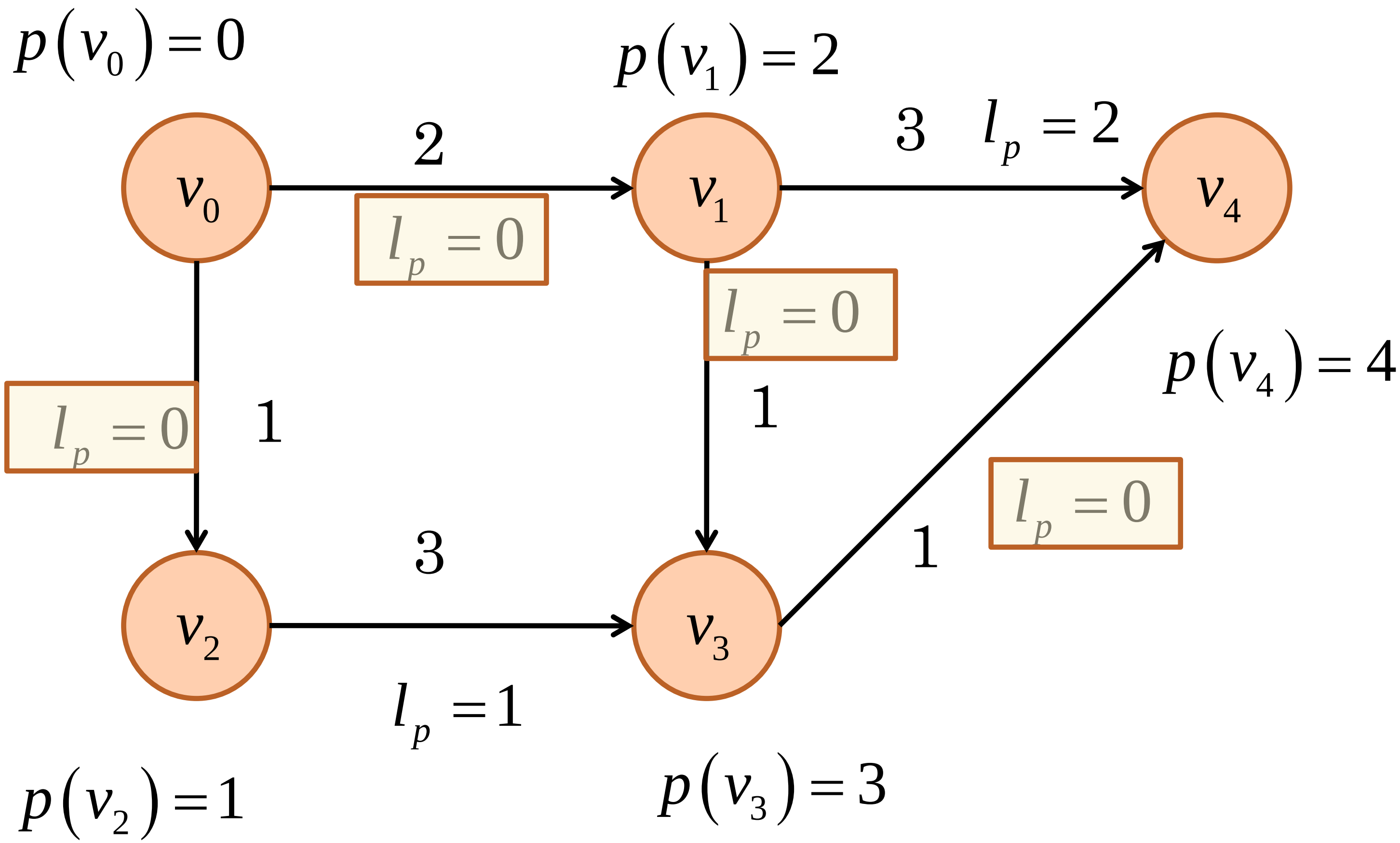
- 弧aの長さ(距離)　$l(a)$
- 弧の始点(終点)のポテンシャル　$p(\partial^{\pm} a)$

$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^{+} a) - p(\partial^{-} a)$$

- ポテンシャルの差と$l(a)$とのずれ



例



最短経路に沿って $l_p=0$

有向道に沿って拡張

- 頂点u から 頂点v へ向かう有向道 P に対して以下が成り立つ

$$l_p(P) = l(P) + p(u) - p(v)$$

$$l_p(P) \equiv \sum_{a \in P} l_p(a)$$

$$l(P) \equiv \sum_{a \in P} l(a)$$

有向道に沿った例

$$P = \{u = v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k = v\}$$

$$\begin{aligned}
l_p(P) &= \sum_{a \in P} l_p(a) = \sum_{i=1}^{k} l_p(a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left[l(a_i) + p(v_{i-1}) - p(v_i) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} l(a_i) + p(u) - p(v) \\
&= l(P) + p(u) - p(v)
\end{aligned}$$

- 関数$l_p : A \rightarrow R$が非負関数であり、道P上の各弧aにおいて

  $l_p(a) = 0$のとき、Pはuからvへの最短経路となる。

- 最短経路でない弧に対しては$l_p(a) > 0$

- 任意の道 P に対して、その経路の長さの下限は、$p(v)-p(u)$ である。

$$l(P)=p(v)-p(u)+l_p(P)\geq p(v)-p(u)$$

- このようなポテンシャル（可能な道のうち最小値を与える）を構成することが、課題となる。

ダイクストラ(Dijkstra)法

- $l(a) \geq 0$ の場合を考える
- グラフ G は単純(並列弧が無い)と仮定する

- $U \subseteq V$ ：始点 v_0 からの有向道が見つかっているが、距離が確定していない頂点の集合
- $W \subseteq V$ ：始点 v_0 からの有向道が見つかり、距離が確定した頂点の集合
- $p(v) \in R$ ：始点 v_0 から頂点 v への距離
- $q(v) \in V$ ：最短経路を頂点 v から逆にたどる際の頂点 v の直前の頂点

DIJKSTRA法：初期化

$$U = \{v_0\}$$

$$W = \varnothing$$

$$p(v_0) = 0$$

$$p(u) = +\infty \left(\forall u \in V \setminus \{v_0\}\right)$$

$$q(v) = \mathrm{NULL}\left(\forall v \in V\right)$$

Uを$p(w)$によるヒープとして
実装すると効率的

while ($U \neq \varnothing$) {

$w = U.poll()$: $p(w)$ が最小である $w \in U$ を取り出す

forall ($a \in \delta^+ w$) {

$x = \partial^- a$

if ($x \notin W$) {

if ($p(x) > p(w) + l(a)$) {

$q(x) \leftarrow w$

$p(x) \leftarrow p(w) + l(a)$

if ($x \in U$){

$U.reduceValue(x)$ ：ヒープ中の x の変更

} else {

$U.add(x)$ ：ヒープに x を追加

}

}

}

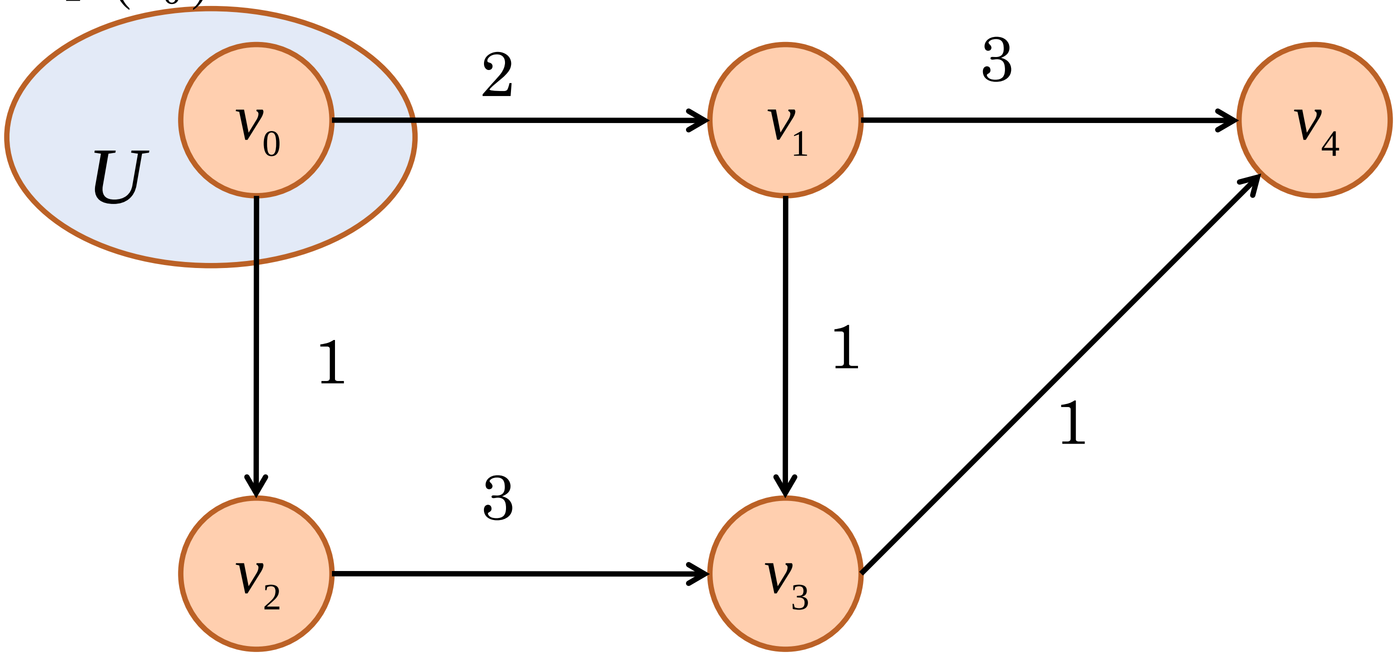
}

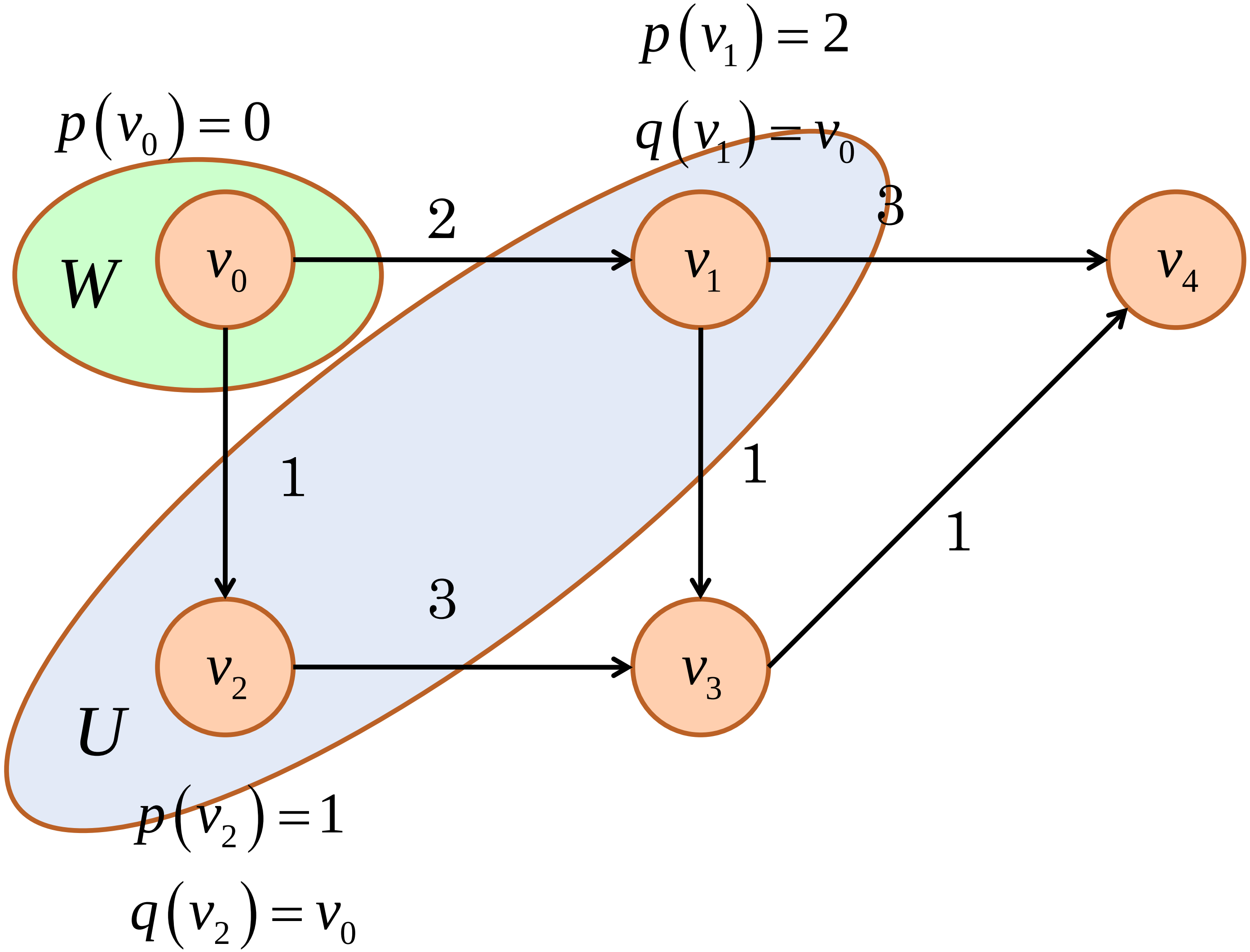
$W \leftarrow W \cup \{w\}$

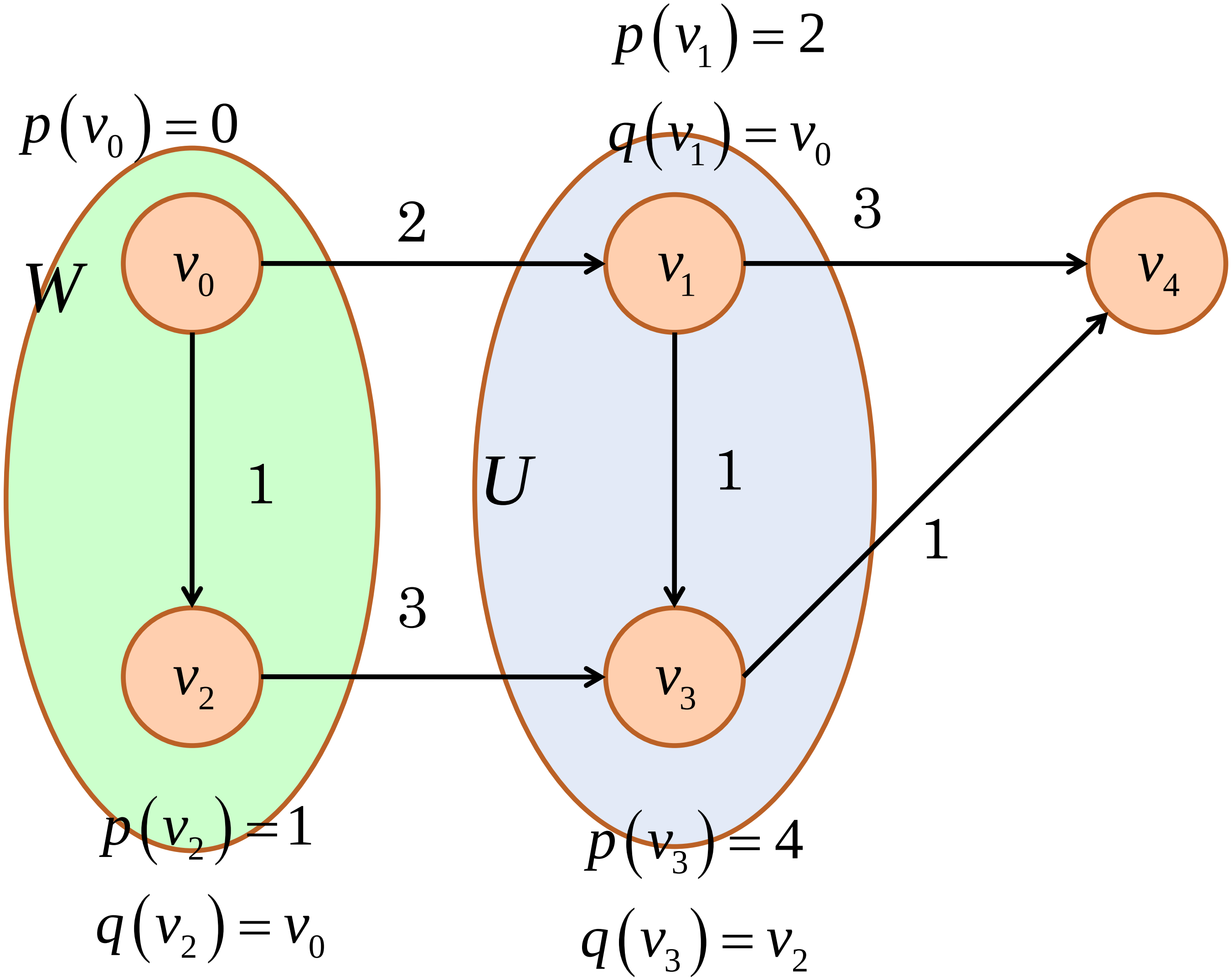
}

ヒープ中の$p(x)$の値が
減ることがあることに注意

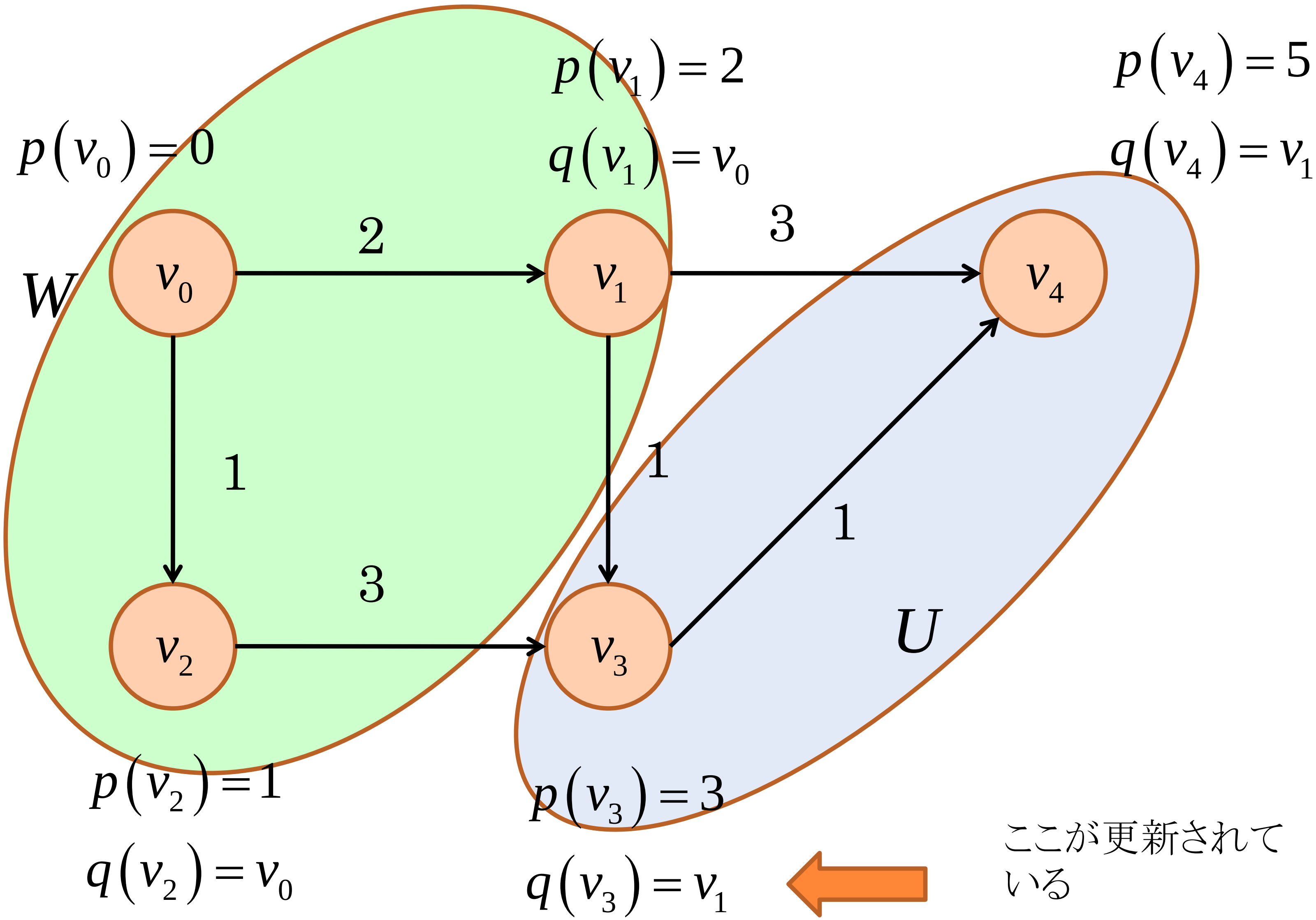
$p(v_0)=0$



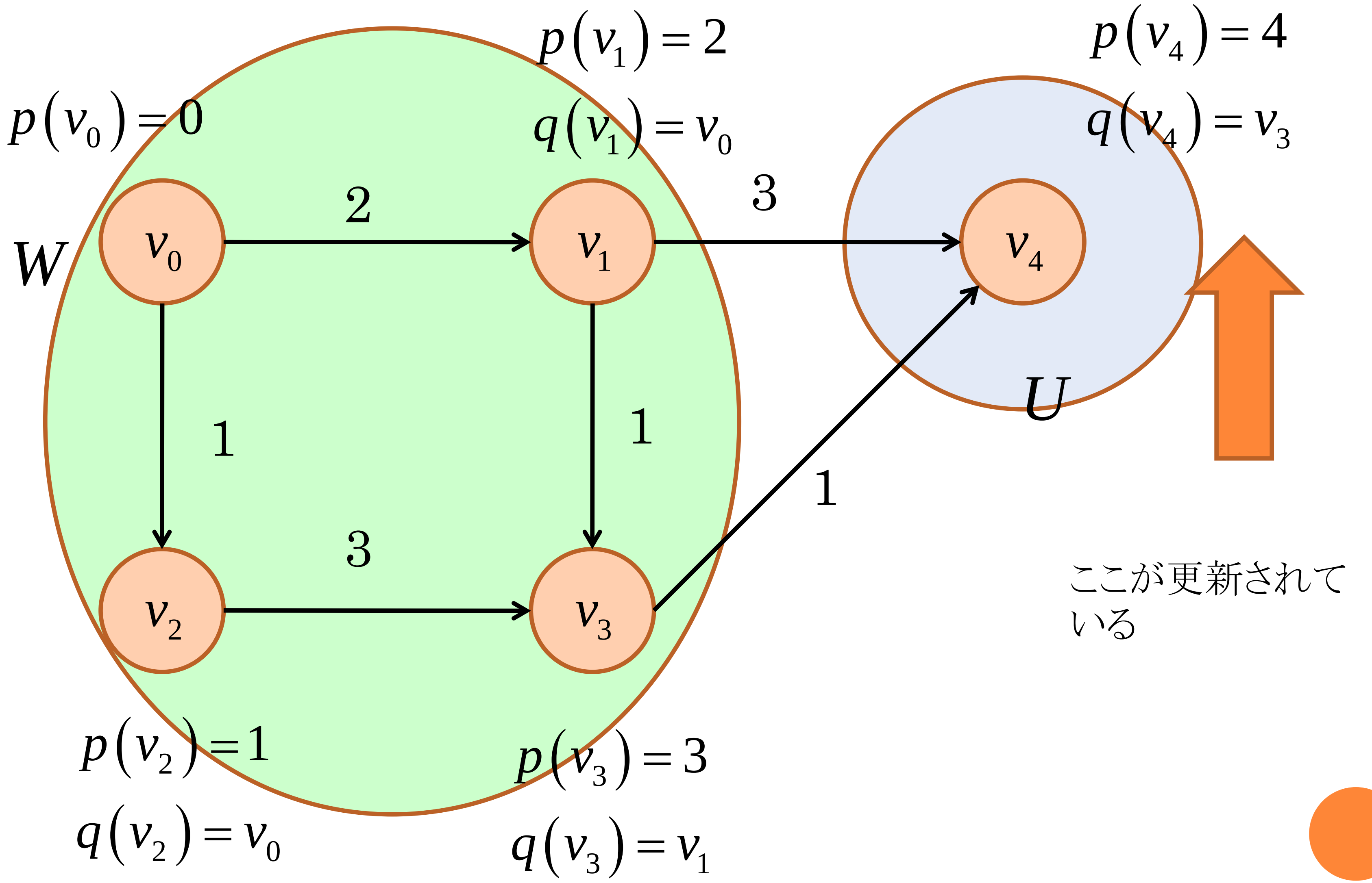

$p(v_1) = 2$
$q(v_1) = v_0$
$p(v_0) = 0$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
3
v_2
v_3
U
$p(v_2) = 1$
$q(v_2) = v_0$



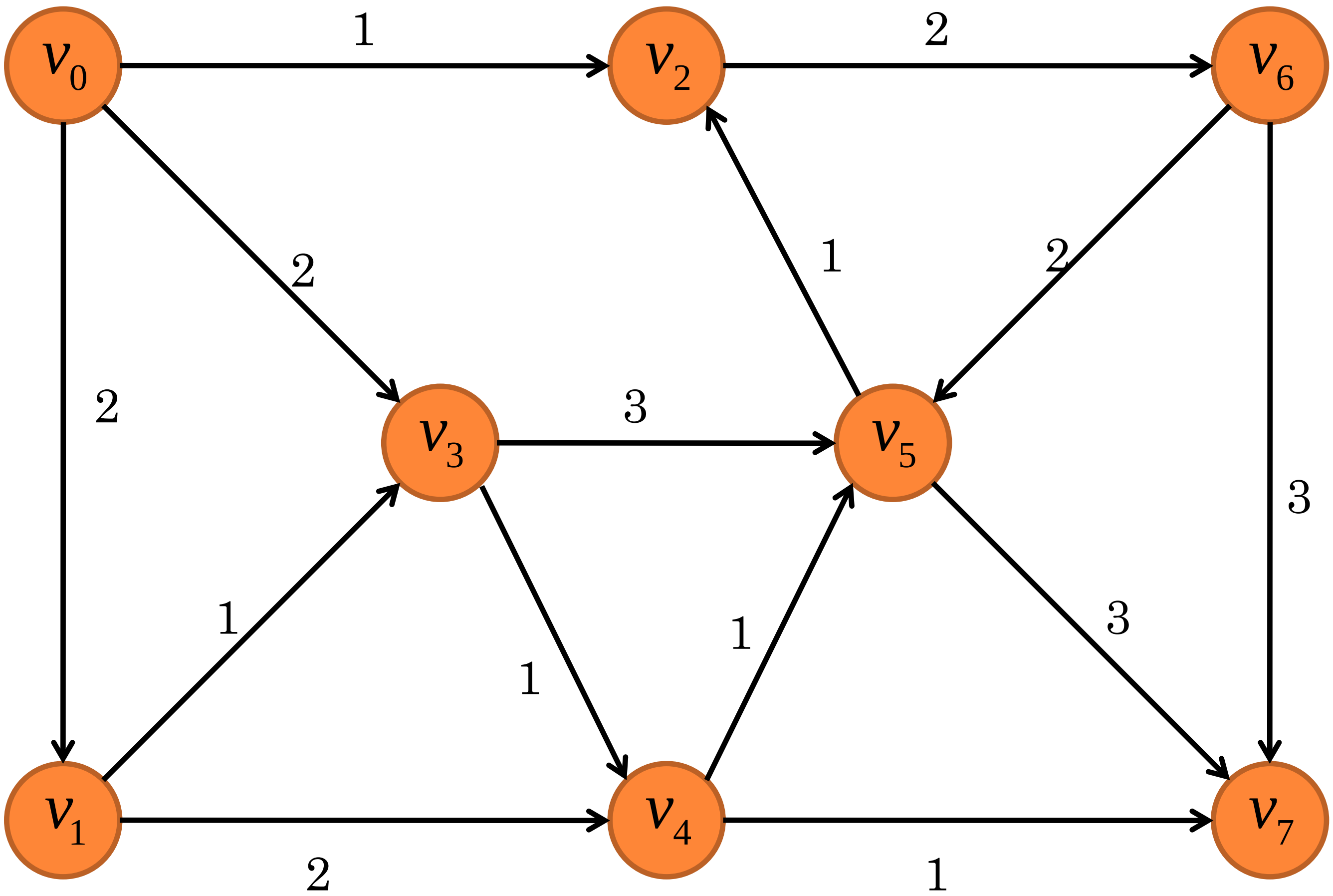
$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
2
3
1
1
1
3
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=4$
$q(v_3)=v_2$


$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=5$
$q(v_4)=v_1$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
3
v_2
v_3
U
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$

ここが更新されている

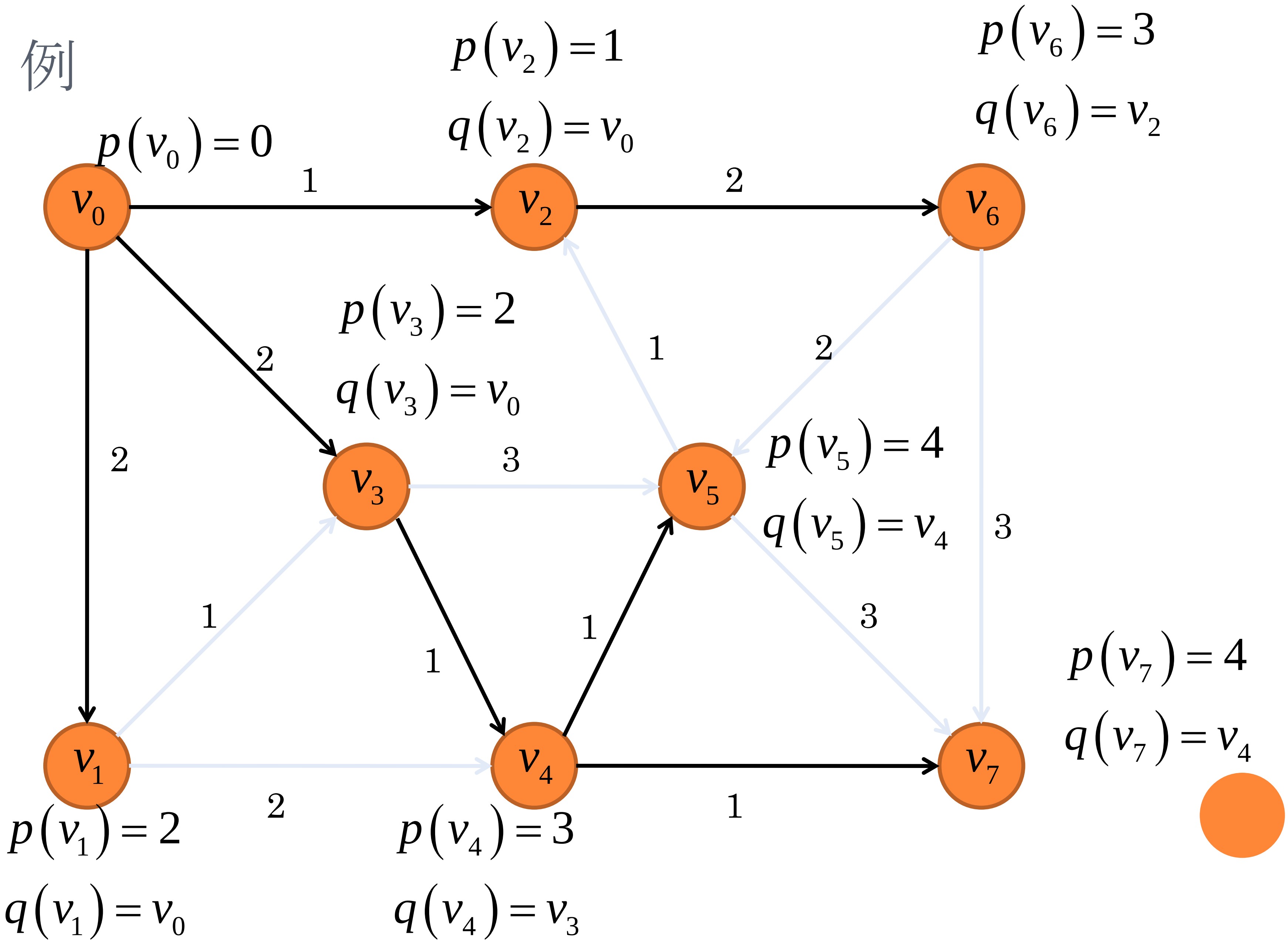

$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=4$
$q(v_4)=v_3$
W
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
2
3
1
1
3
1
U
ここが更新されている
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$

例



	注目している頂点	W	U	p	q	更新を受けた手順
0		$\varnothing$	$\{v_0\}$	$p(v_0)=0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$	$p(v_1)=2$	$q(v_1)=v_0$	
				$p(v_2)=1$	$q(v_2)=v_0$	
				$p(v_3)=2$	$q(v_3)=v_0$	
2	v_2	$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3, v_6\}$	$p(v_6)=3$	$q(v_6)=v_1$	
3	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4, v_6\}$	$p(v_4)=4$	$q(v_4)=v_1$	4
4	v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4, v_5, v_6\}$	$p(v_4)=3$	$q(v_4)=v_3$	
				$p(v_5)=5$	$q(v_5)=v_3$	5
5	v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{v_5, v_6, v_7\}$	$p(v_5)=4$	$q(v_5)=v_4$	
				$p(v_7)=4$	$q(v_7)=v_4$	
6	v_6	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$	$\{v_5, v_7\}$			
7	v_7	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}$	$\{v_5\}$			
8	v_5	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$	$\varnothing$			

例



$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_6)=3$
$q(v_6)=v_2$
$p(v_0)=0$
v_0
v_2
v_6
1
2
$p(v_3)=2$
$q(v_3)=v_0$
2
1
2
2
v_3
3
v_5
$p(v_5)=4$
$q(v_5)=v_4$
3
1
1
1
3
1
$p(v_7)=4$
$q(v_7)=v_4$
v_1
v_4
v_7
2
1
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=3$
$q(v_4)=v_3$

Dijkstra法の妥当性:補題1

Dijkstra 法の実行に伴って、頂点が $v_0, v_1, v_2, \ldots$ の順に W に登録されるとする。このとき、以下の関係が成り立つ。

$$0 \leq p(v_0) \leq p(v_1) \leq p(v_2) \leq \ldots \leq p(v_i) \leq p(v_{i+1}) \leq \ldots$$

つまり、W には、距離の小さい順に追加されていく。

補題1証明

Dijkstra 法の実行中に、以下が成り立つことを示せばよい。

$$\max\left\{p(u)\middle| u\in W\right\}\le\min\left\{p(u)\middle| u\in V\setminus W\right\}$$

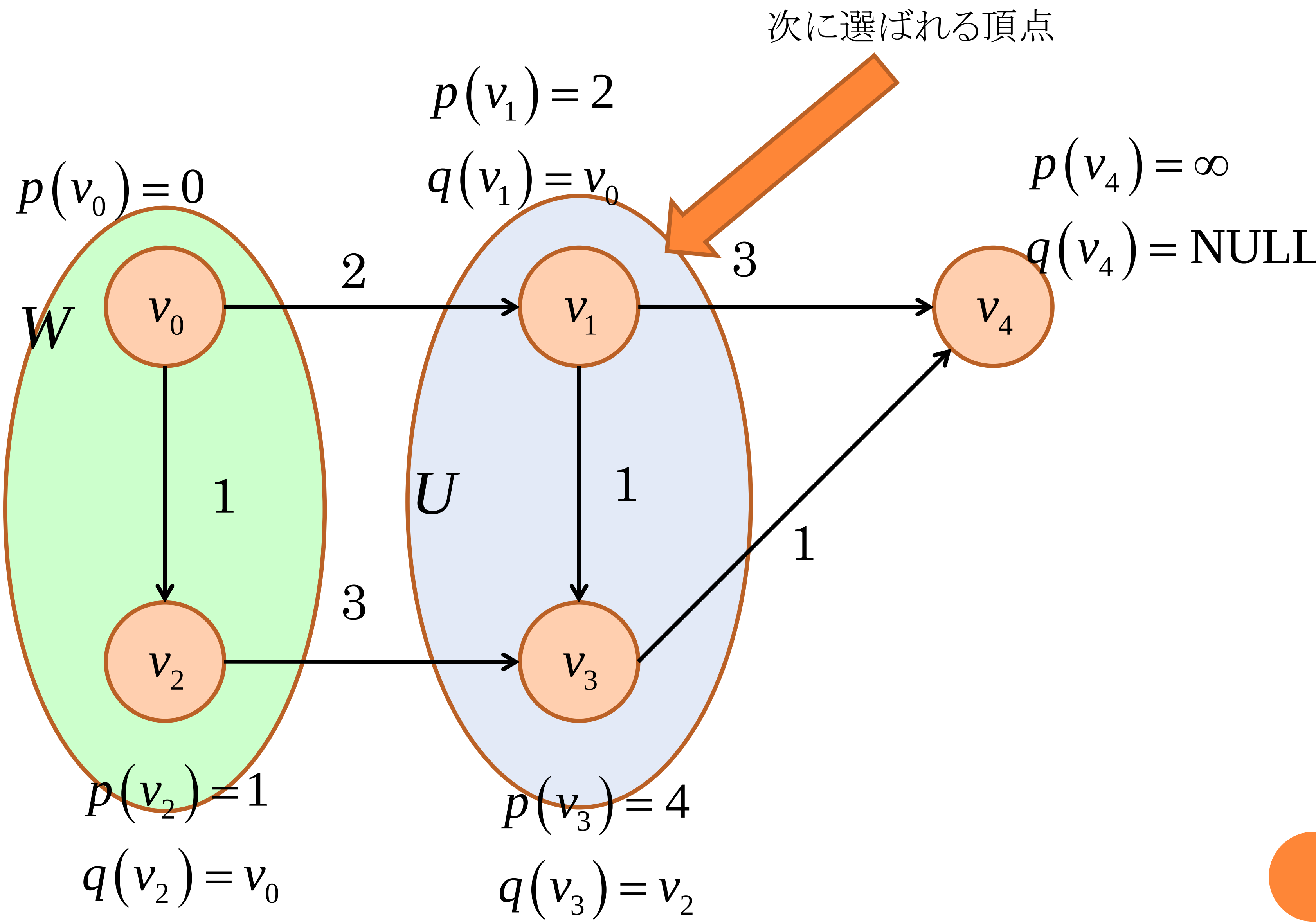
補題1証明

- 一回目のループ実行後：自明
  - $W = \{v_0\}, p(v_0) = 0$
- あるステップで成り立つと仮定する。
  - 次に選ばれる頂点を $w \in U \subseteq V \setminus W$ とする。
  - p の更新前

$$\max\left\{ p(u) \middle| u \in W \right\} \le p(w) \le \min\left\{ p(u) \middle| u \in V \setminus \left(W \cup \{w\}\right) \right\}$$

  - p の更新後

$$\max\left\{ p(u) \middle| u \in W \right\} \le \min\left\{ p(u) \middle| u \in V \setminus W \right\}$$


次に選ばれる頂点
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_0)=0$
$p(v_4)=\infty$
$q(v_4)=\mathrm{NULL}$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
2
3
1
1
1
3
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=4$
$q(v_3)=v_2$

Dijkstra法の妥当性:補題2

1. W に始点を持つ G の弧の集合 $\delta^+ W$ を考える。

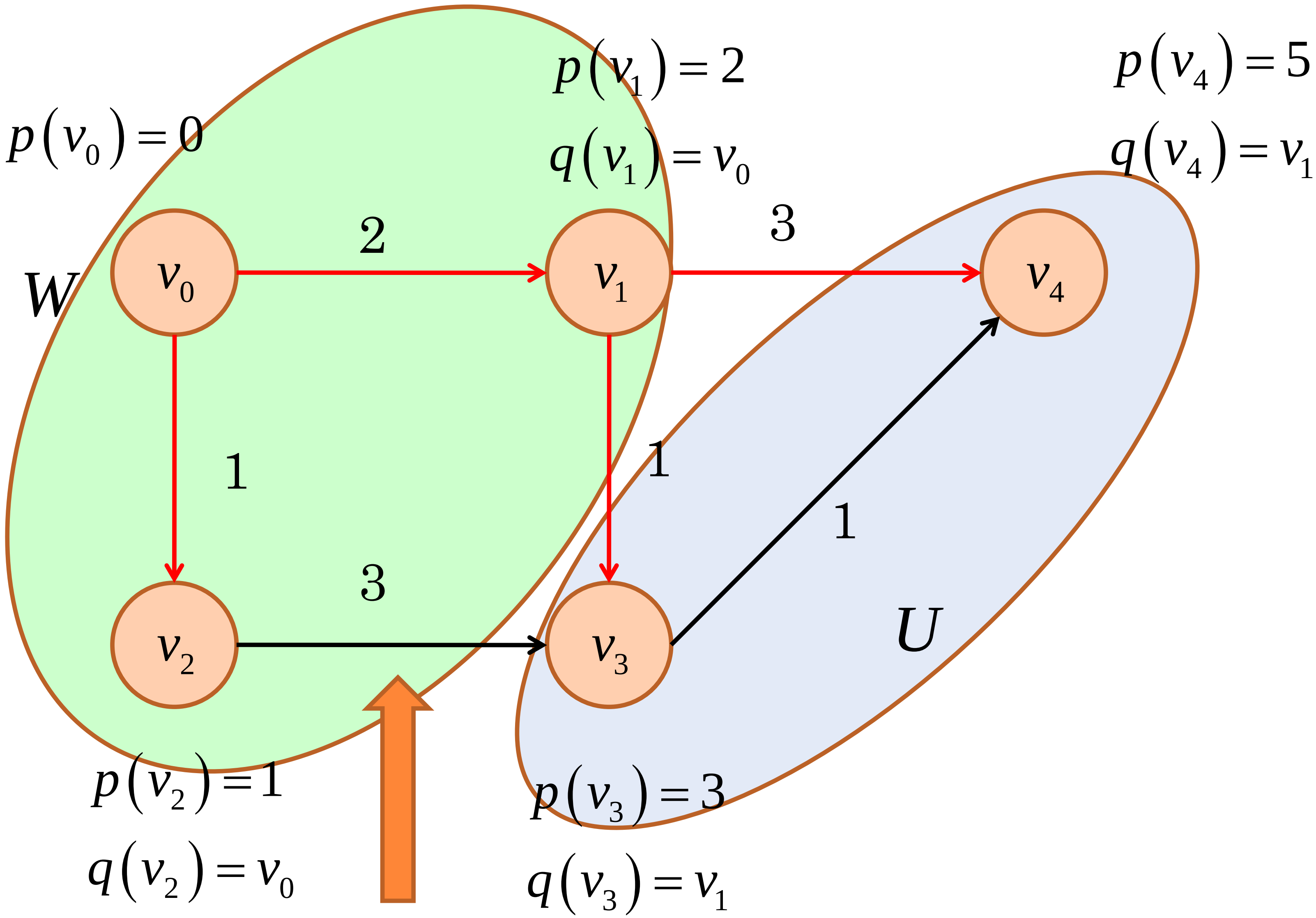
   $G_W = \left(W \cup U, \delta^+ W\right)$ において

   $l_p\left(a\right) \geq 0 \left(\forall a \in \delta^+ W\right)$

   $l_p\left(q\left(u\right), u\right) = 0 \ \left(\forall u \in \left(W \cup U\right) \setminus \left\{v_0\right\}\right)$ （経路が分かっている場合）

   がなりたつ。

2. $\forall u \in \left(U \cup W\right) \setminus \left\{v_0\right\}$ に対して定まる弧 $\left(q\left(u\right), u\right)$ の全体は、v_0 を根とする有向木である。



$$l_p(v2,v3)=l(v_2,v_3)+p(v_2)-p(v_3)=3+1-3=1>0$$

補題2証明

Dijkstra 法の手順から、$a \in \delta^{+}W$ に対して、

$$p\left(\partial^{-}a\right) \leq p\left(\partial^{+}a\right) + l(a)$$

が成り立っている。従って

$$l_{p}(a) = l(a) + p\left(\partial^{+}a\right) - p\left(\partial^{-}a\right) \geq 0$$

さらに、$\forall u \in U$ に対しては

$$p(u) = p\left(q(u)\right) + l\left(q(u), u\right)$$

であり、

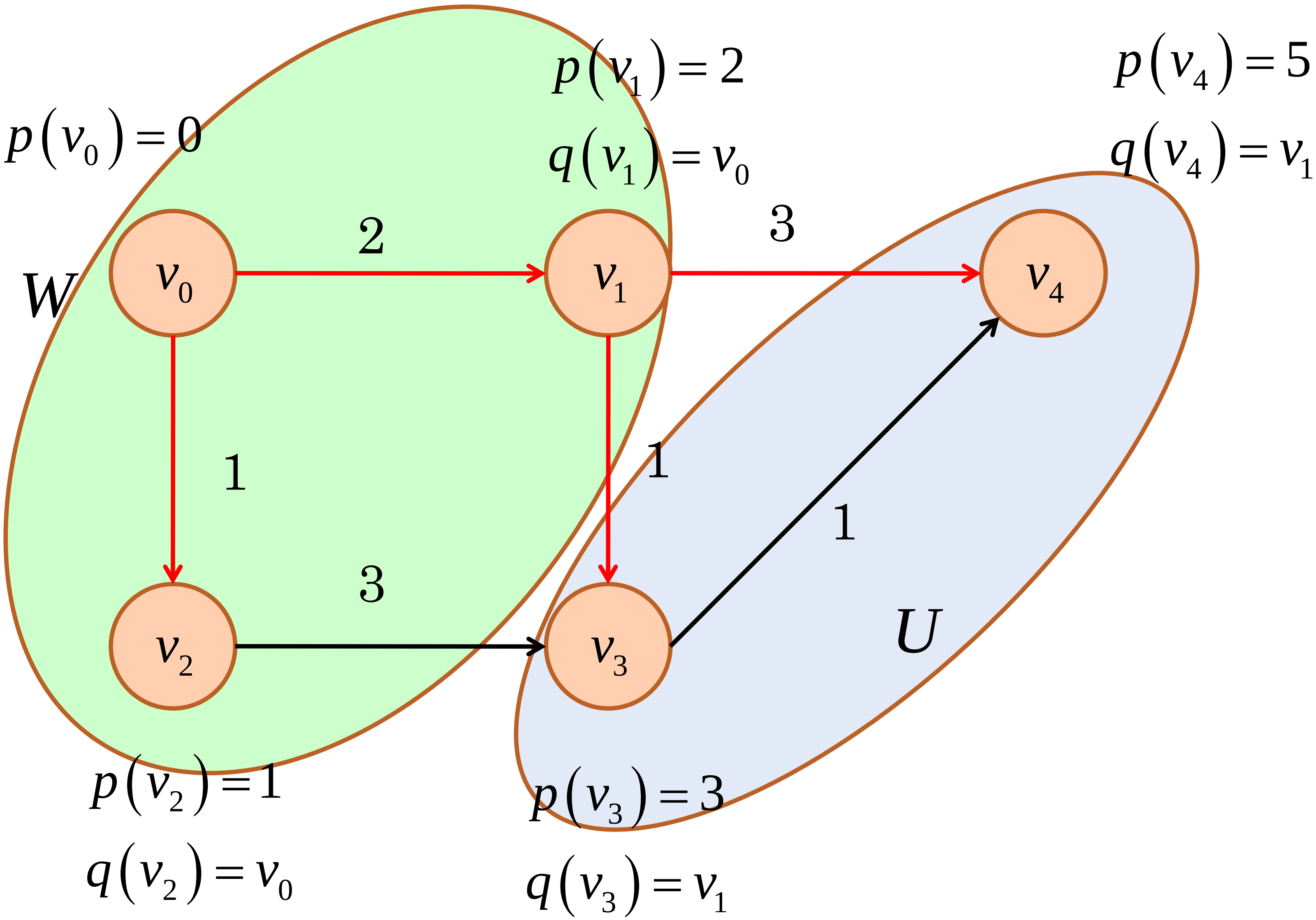
$$l_{p}\left(q(u), u\right) = l\left(q(u), u\right) + p\left(q(u)\right) - p(u) = 0$$

補題2証明

補題１より、W の要素は順序付けられている。

- $\forall v_i \in W$ に対して、$q(v_i)=v_j$ ならば、$j<i$ と順序付けられている。つまり、v_i に対して一意に親の頂点が定まる。
- $\forall v \in U$ に対して、$q(v)=w \in W$ によって、一意に親の頂点が定まる。

従って、v_0 を根とする有向木となる。



$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=5$
$q(v_4)=v_1$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
v_2
3
v_3
U
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$

DIJKSTRA法で最短経路が求まるのは

- 始点vから各頂点wへの経路$P(u,v)$が定まる
- その経路に沿って、$l_p(P(u,v))=0$となる

$$l\left(P\left(u,v\right)\right)=p(v)-p(u)$$

  - これが最短経路に対応する
- 他の経路$P'(u,v)$に対しては、この経路長が長い

$$l\left(P'\left(u,v\right)\right)=p(v)-p(u)+l_p\left(P'\left(u,v\right)\right)\geq p(v)-p(u)$$