

特殊なグラフ

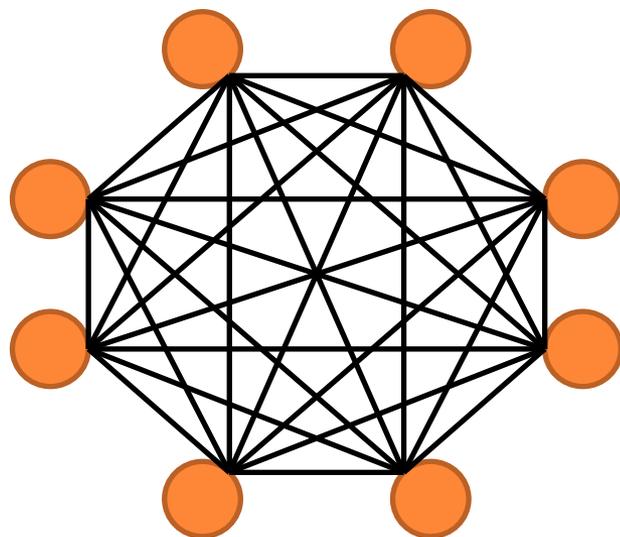
今回の目的

- 特別な構造のグラフの導入
 - 完全グラフ (complete graphs)
 - 二部グラフ (bipartite graphs)
 - 道 (paths)
 - 閉路 (circles)
 - 木 (trees)
 - 平面グラフ (planer graphs)
 - 双対グラフ (dual graphs)



完全グラフ (COMPLETE GRAPHS)

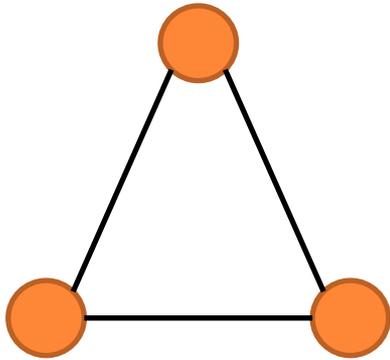
- 任意の相異なる頂点の組に必ず一つの弧が存在する
無向グラフ



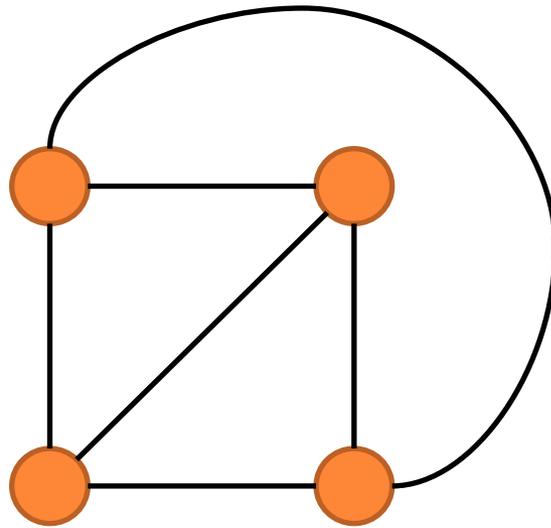
K_8

Komplett
ドイツ語: 完全な





K_3



K_4

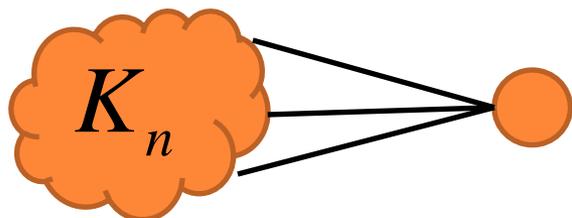


完全グラフの弧の数

○ K_n の弧の数 $N_a(n) = \frac{n(n-1)}{2}$

○ 数学的帰納法による証明

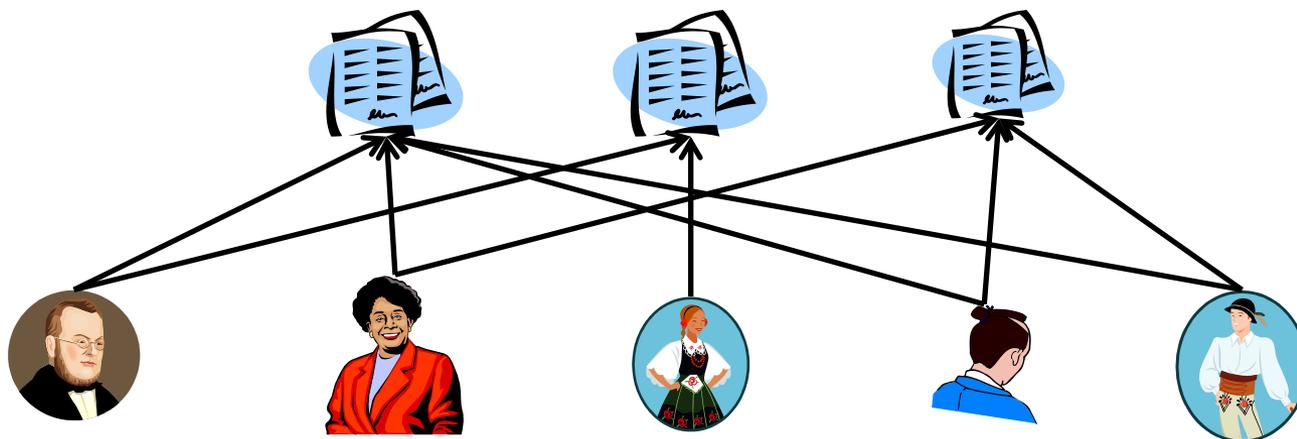
- $n=3$ の場合: 明らか
- ある n で正しいと仮定する。頂点を一つ追加することは、その頂点から既存の頂点群に向かって、弧を n 本追加することに対応する



$$\begin{aligned} N_a(n+1) &= N_a(n) + n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{1}{2} [n(n-1) + 2n] \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$


二部グラフ (BIPARTITE GRAPHS)

- 二種類のものとの関係を表す
 - 俳優→映画
 - 研究者→論文
- ここから、以下のような関係を得る
 - 俳優間の共演関係
 - 研究者間の共同研究の関係



例: 共演関係のグラフ

- ケビン・ベーコンゲーム
 - 俳優の「距離」を測る
 - <http://oracleofbacon.org>
 - 映画俳優のデータベース
 - <http://www.imdb.com>
- グラフの可視化
 - <http://www.math.ucsd.edu/~fan/complex/>
- 参考書
 - 増田直紀「私たちはどうつながっているのかーネットワークの科学を応用する」(中公新書、2007)
 - 安田雪「『つながり』を突き止める」(光文社新書、2010)



二部グラフ (BIPARTITE GRAPHS)

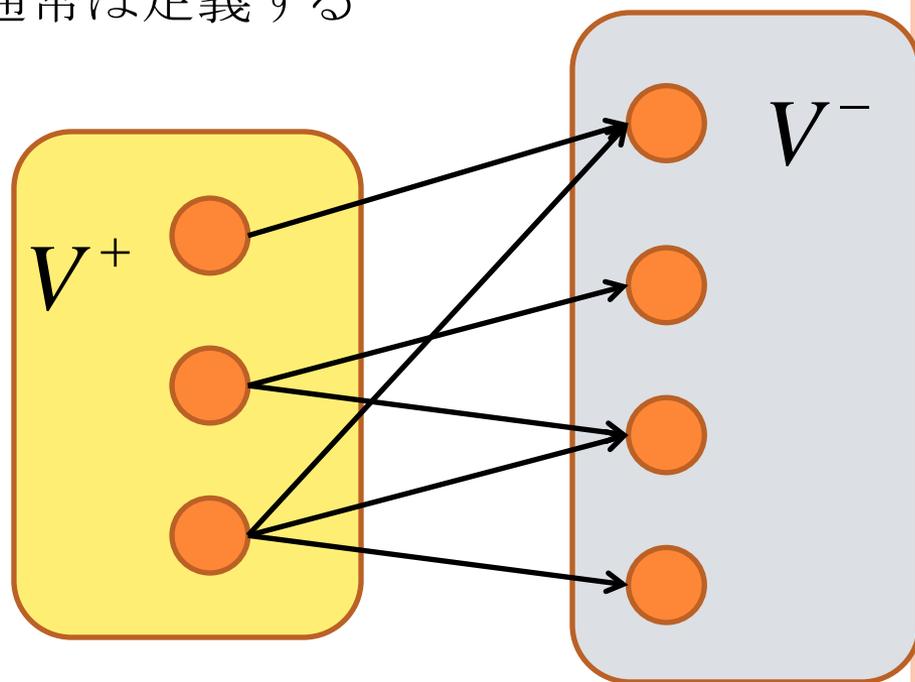
- グラフの頂点集合が二つに分割されている

$$V = V^+ \cup V^-, \quad V^+ \cap V^- = \emptyset$$

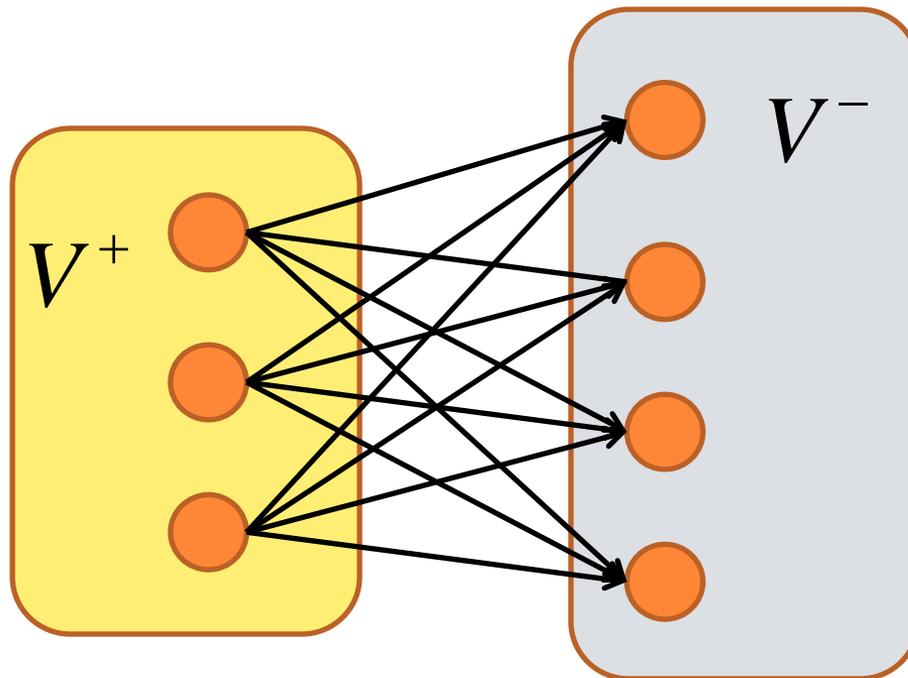
- 各弧がその二つの集合の頂点を結ぶ
 - 弧の向きは V^+ から V^- へと、通常は定義する

$$\forall a \in A$$

$$\partial^+ a \in V^+ \wedge \partial^- a \in V^-$$

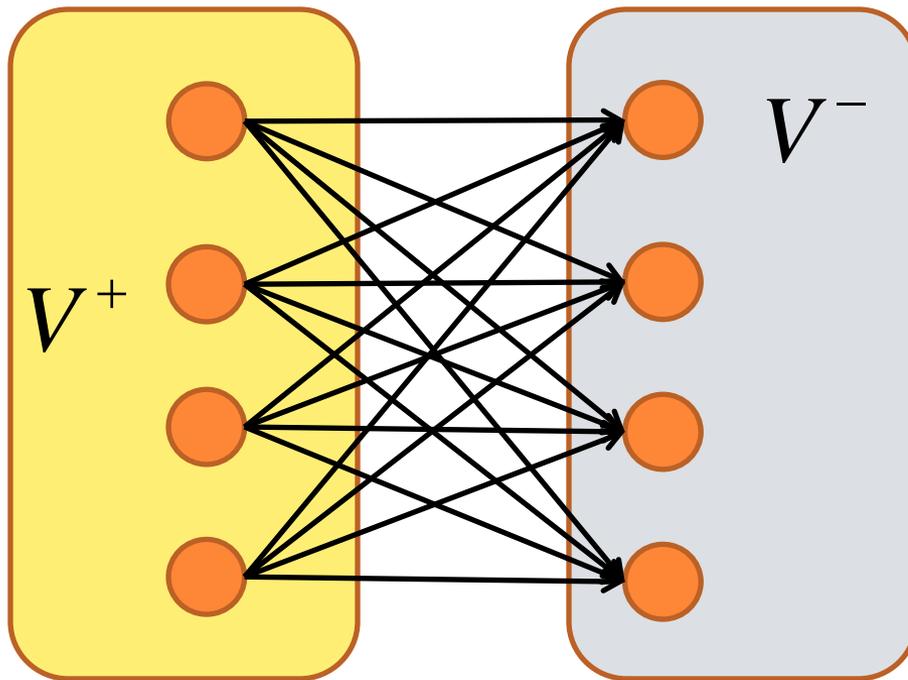


完全二部グラフ (COMPLETE BIPARTITE GRAPHS)



$K_{3,4}$



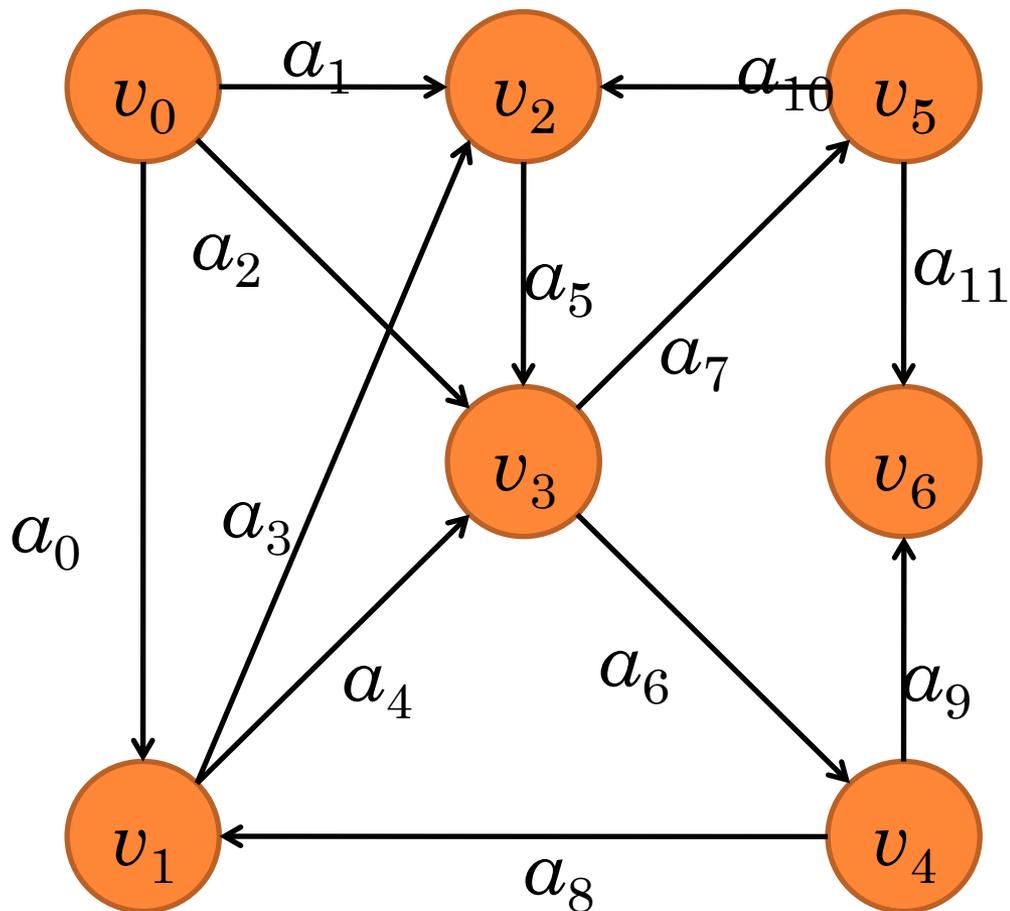


$K_{4,4}$



道 (PATHS)

- 始点から終点までの経路を「道」と言う



v_0 から v_6 への道

$a_1 a_5 a_7 a_{11}$



- 通常、道は弧の向きを無視して考える
- 弧の向きが揃っている場合
 - 有向道 (directed path)
- 同じ弧を一度しか通らない道
 - 単純な道 (simple path)
- 同じ頂点を一度しか通らない道
 - 初等的な道 (elementary path)
- 始点と終点が同じ道
 - 閉路 (closed path)

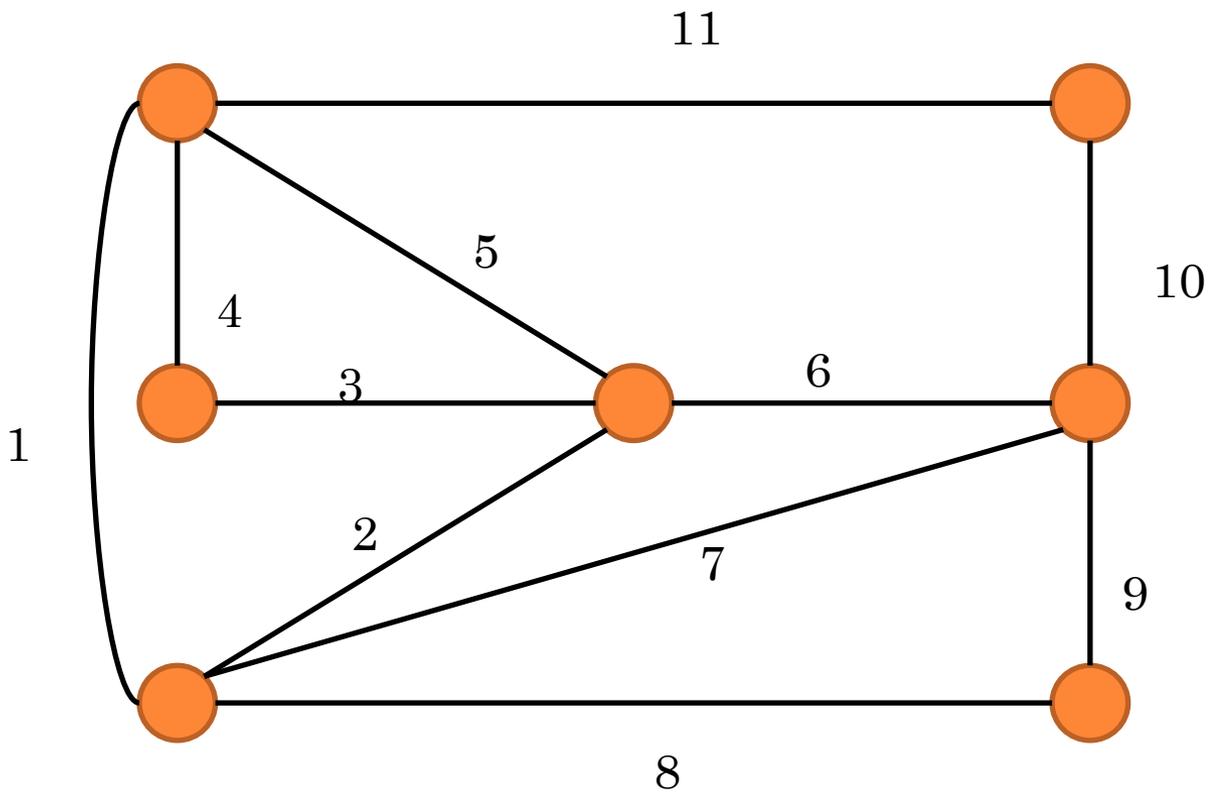


閉路 (CLOSED PATH, CIRCLES)

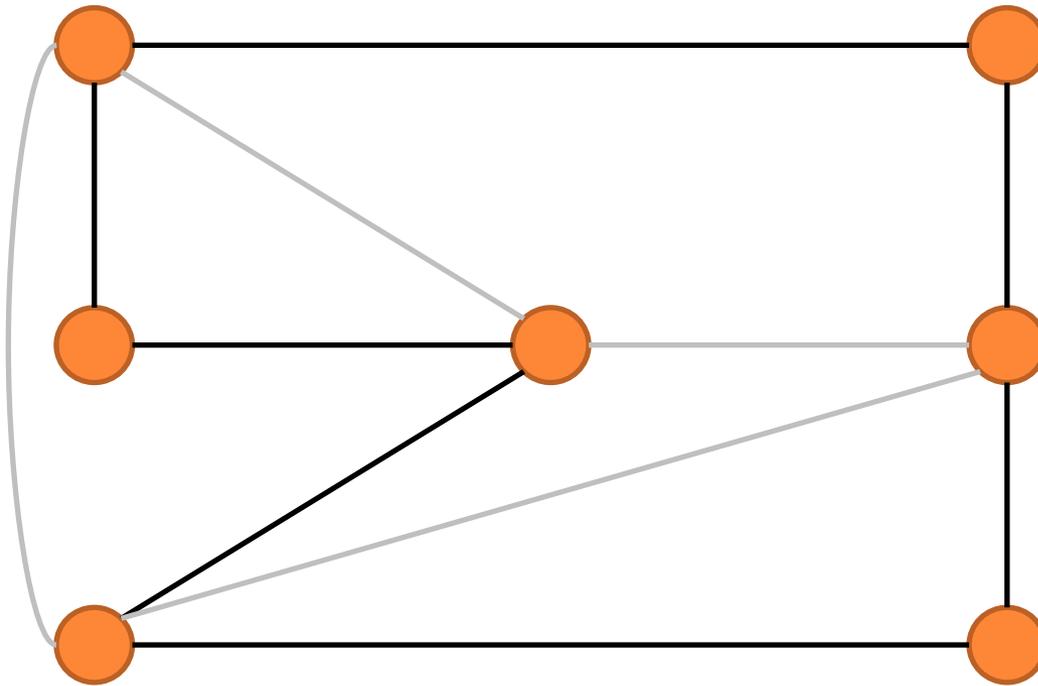
- 始点と終点と同じ道を「閉路」と呼ぶ
- Euler閉路
 - 全ての弧を一度ずつ経由する閉路
 - 一筆書き
- Hamilton閉路
 - 全ての頂点を一度ずつ経由する閉路
- 無閉路グラフ(acyclic graphs)
 - 閉路を含まないグラフ



EULER閉路

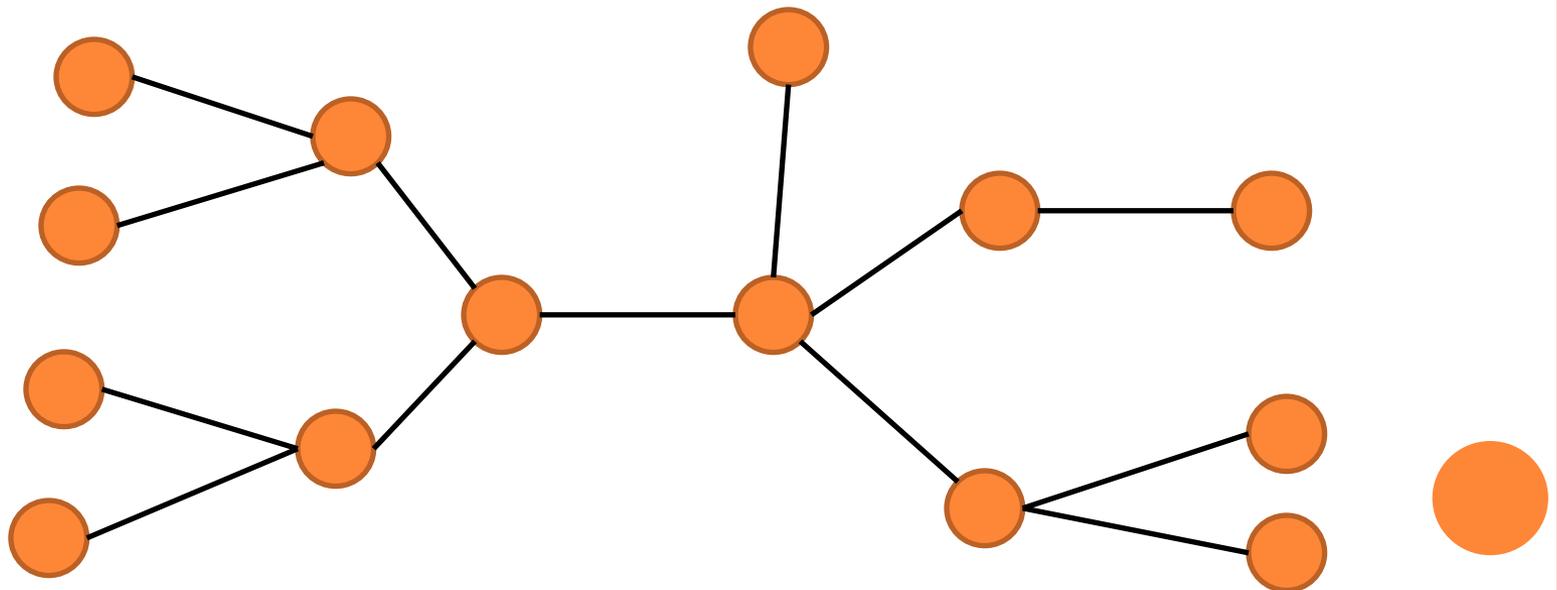


HAMILTON閉路



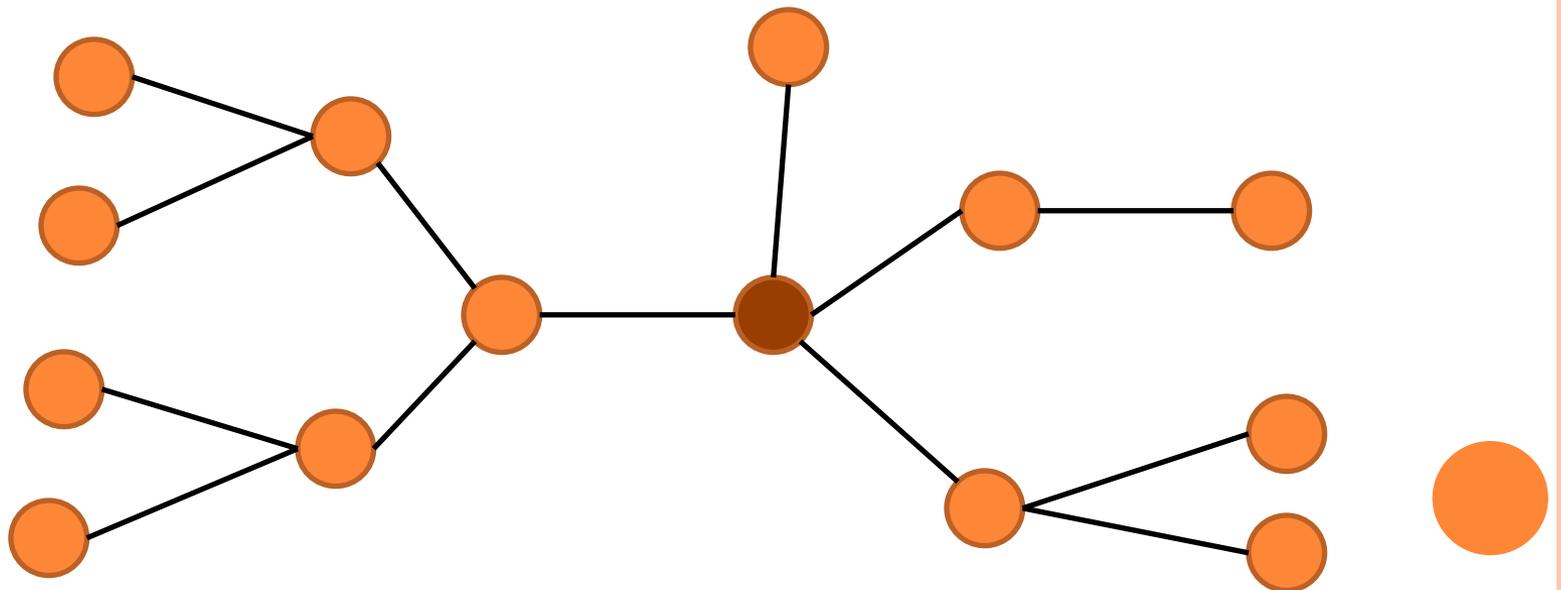
木 (TREE)

- 閉路を含まない連結なグラフ
 - 「木」の形
 - 通常は無向グラフ
 - 葉 (leaf) : 次数が1である点

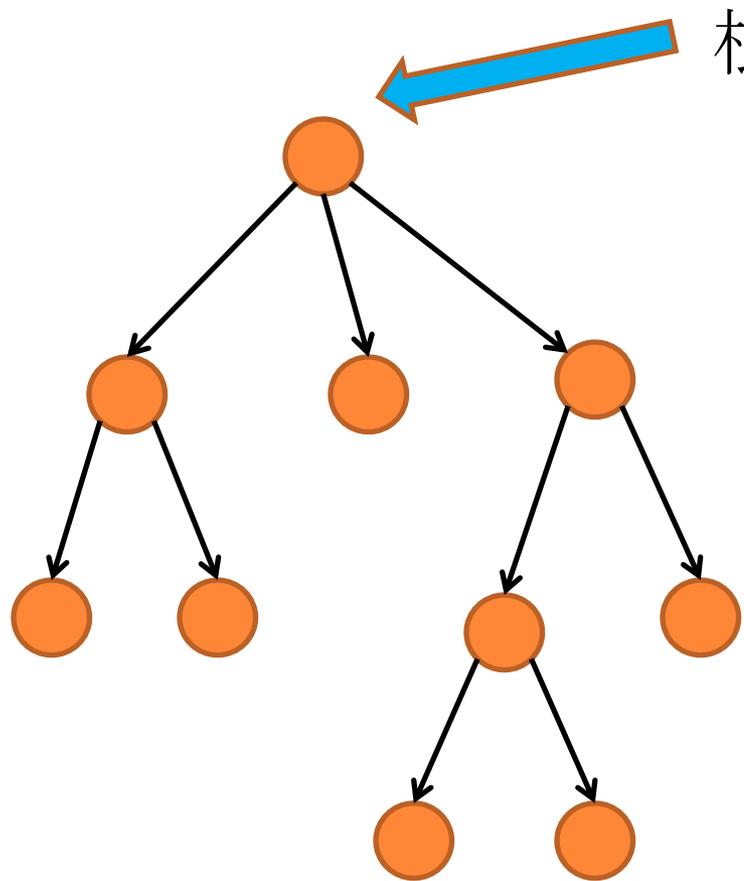


木 (TREE)

- 無向木では、任意の点を選んで根(root)とできる

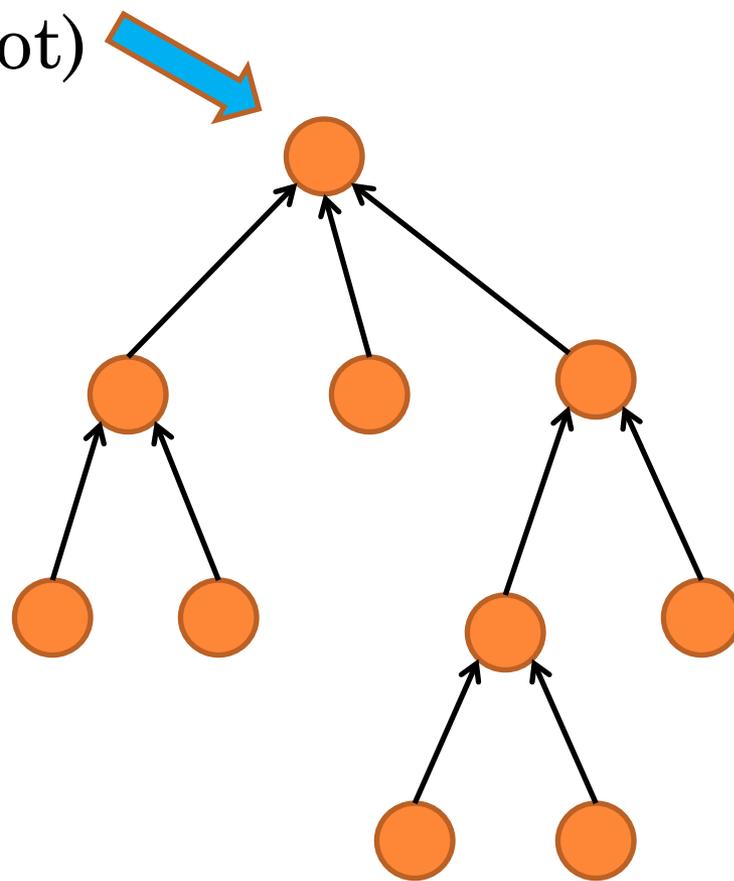


有向木(DIRECTED TREE)



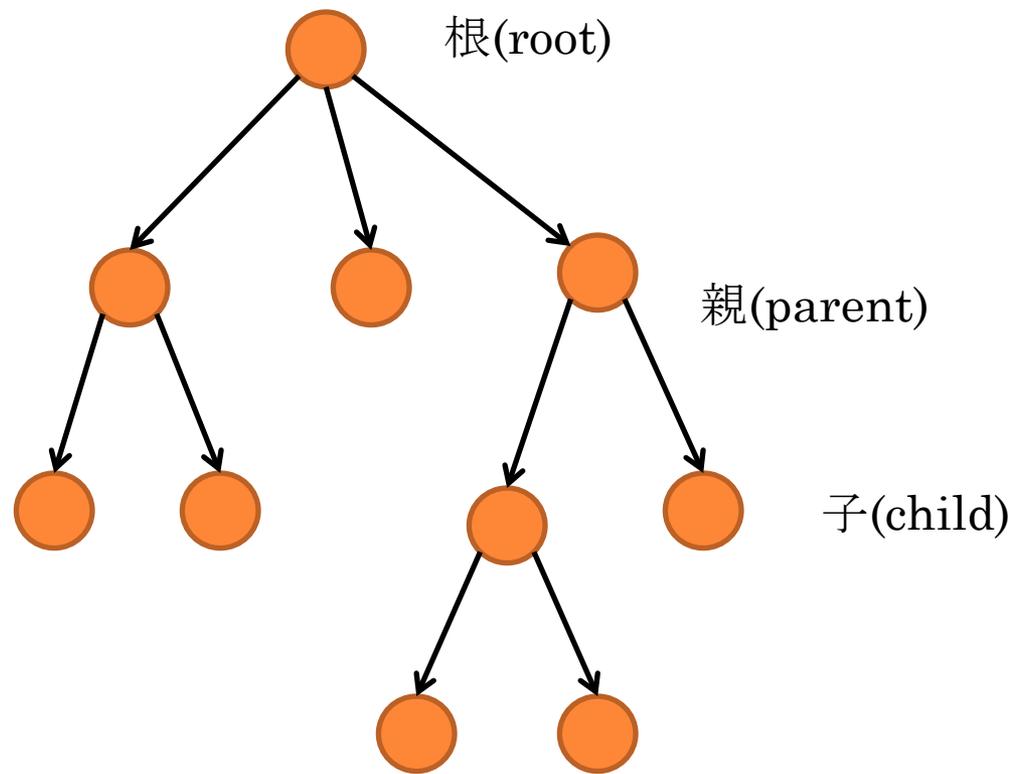
外向木(out-tree)

根(root)



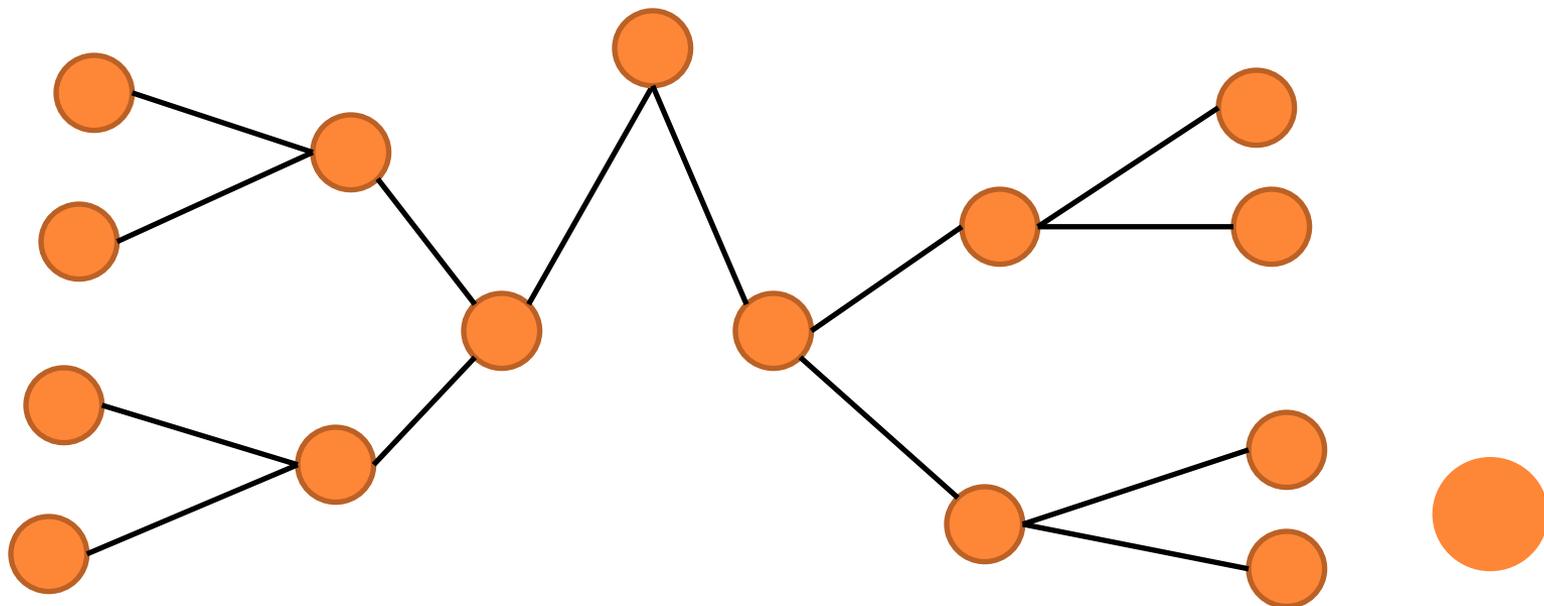
内向木(in-tree)





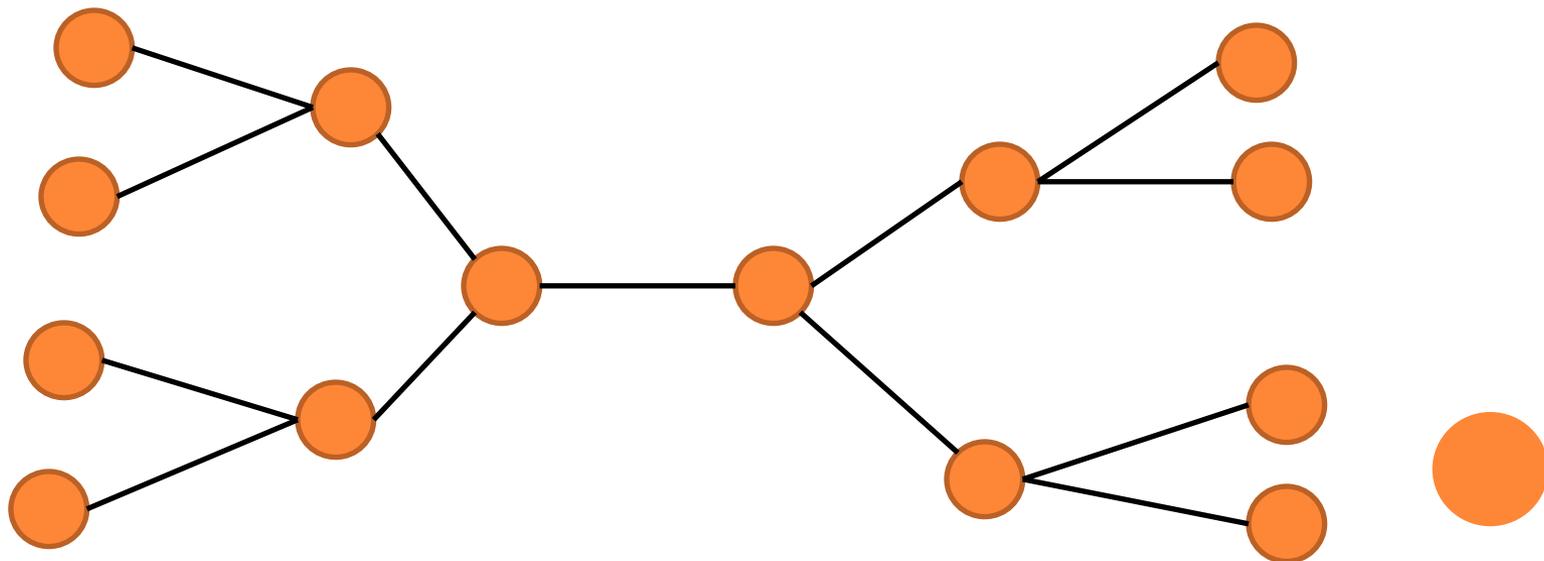
二分木(BINARY TREE)

- 葉以外の点が、二個の子を持つ木



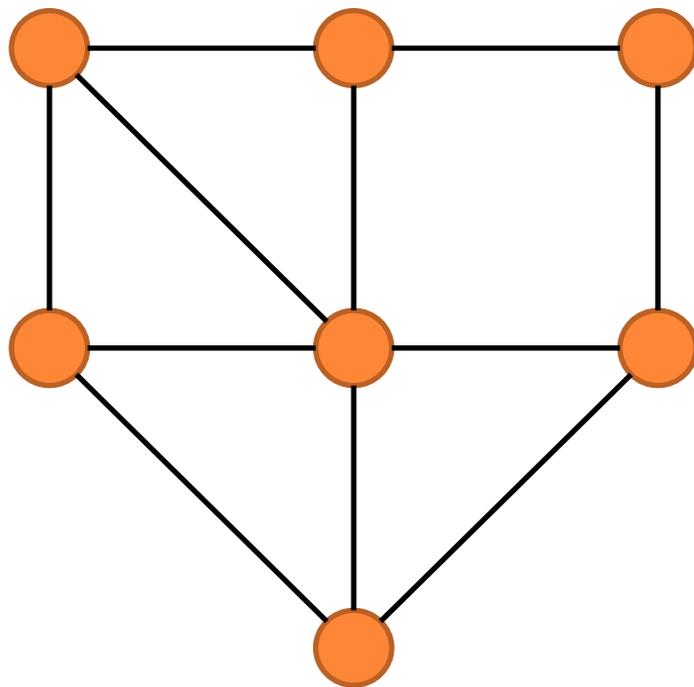
ケーリー木(CAYLEY TREE)

- 葉以外の点の次数が等しい木



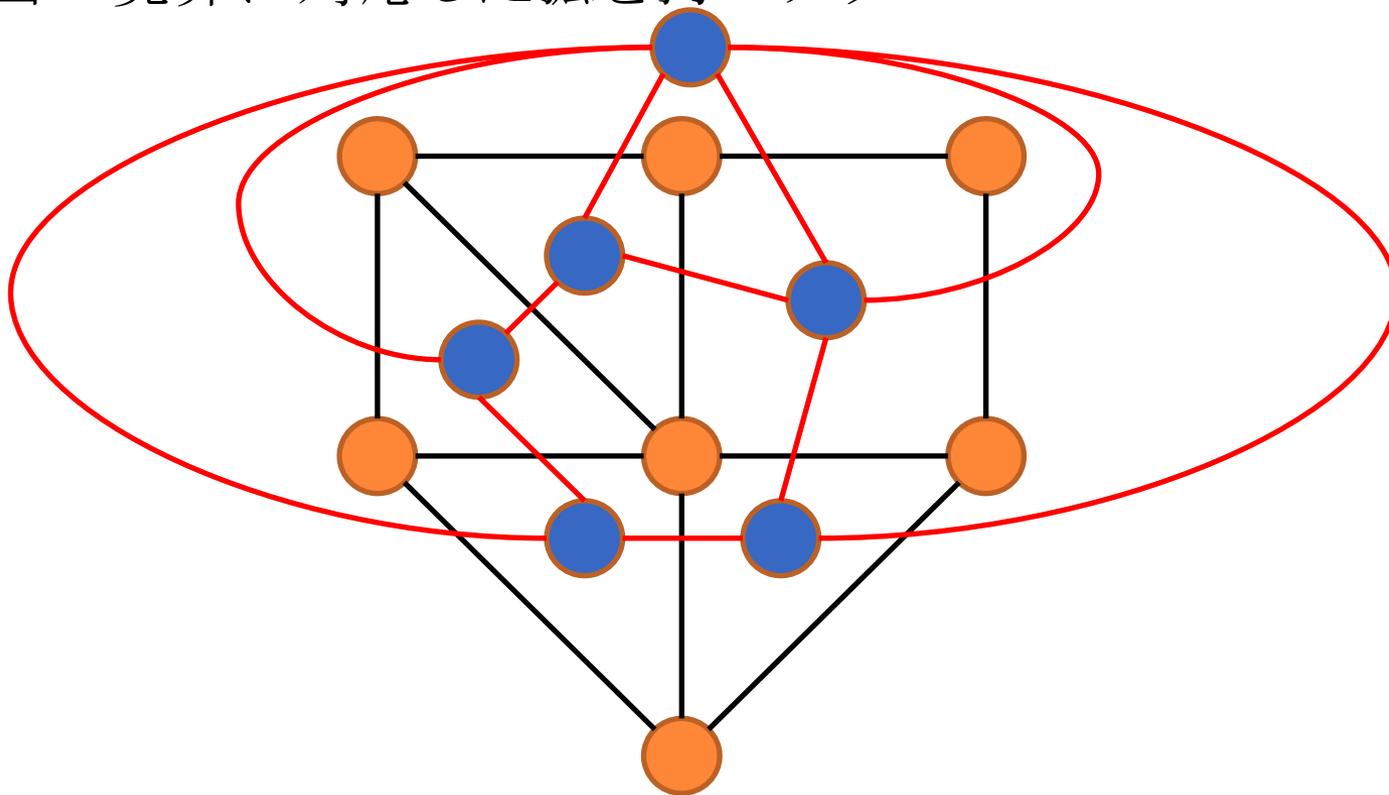
平面グラフ(PLANER GRAPH)

- 頂点の配置によって、弧が交差しないように描くことができるグラフ



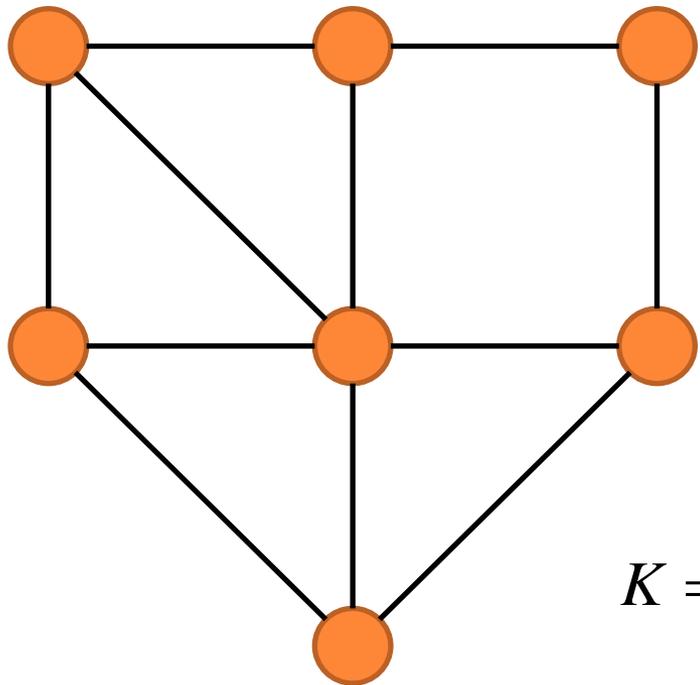
平面グラフの双対グラフ(DUAL GRAPH)

- 平面グラフの弧で囲まれた面ごとに、一つの頂点を置き、面の境界に対応した弧を持つグラフ

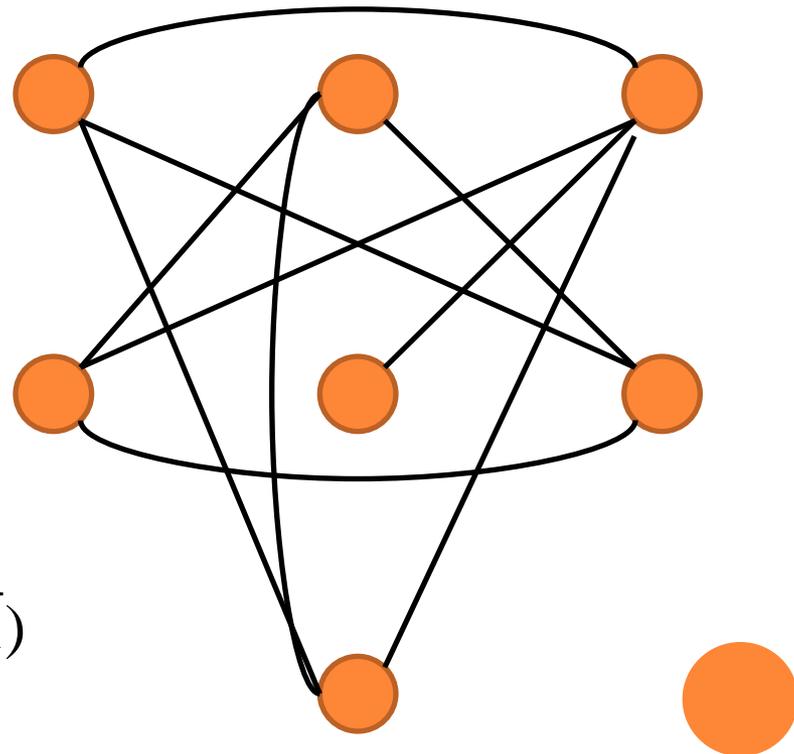


補グラフ (COMPLEMENT)

$$G = (V, A)$$



$$\bar{G} = (V, \bar{A})$$



$$K = (V, A \cup \bar{A})$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$