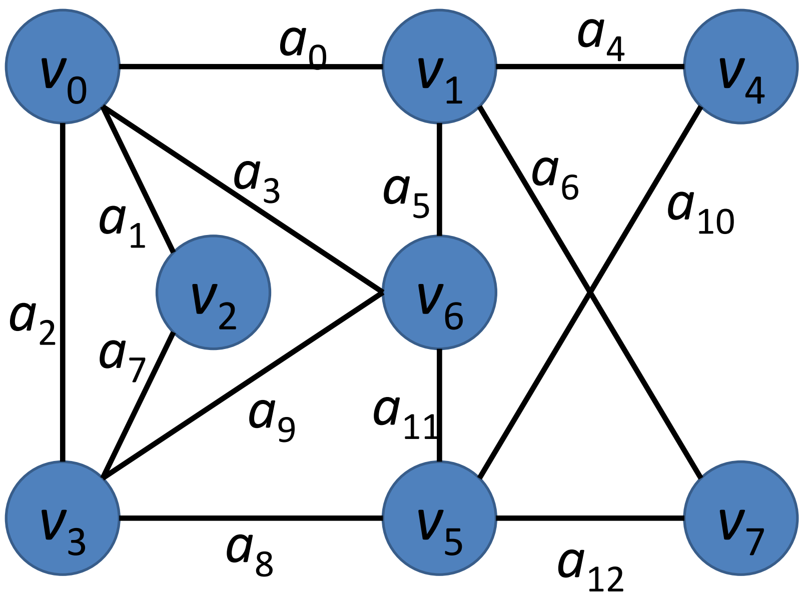
「グラフと組み合わせ」課題 3 (解答例)

2012/4/23

1　Euler 閉路

次のグラフ中の Euler 閉路(一筆描き)を見つけなさい。



解答例

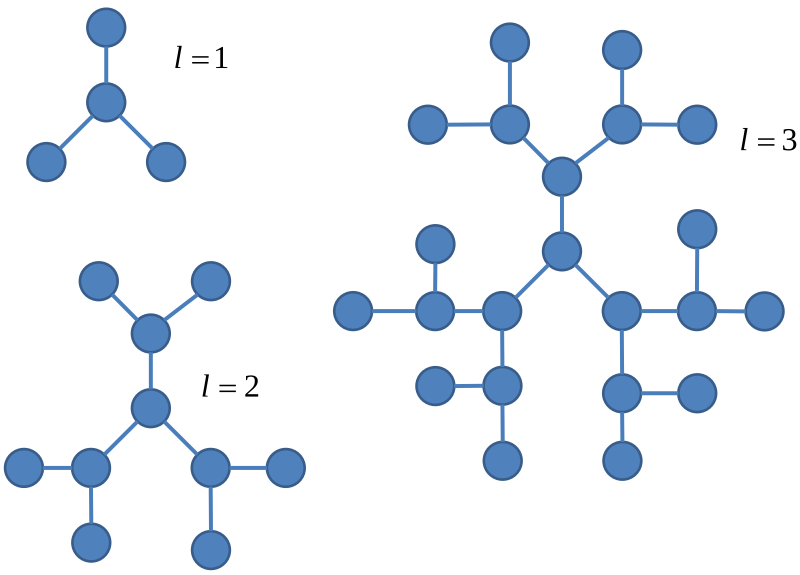
一つの例だけを示す

$$a_0 a_5 a_3 a_1 a_7 a_9 a_{11} a_{10} a_4 a_6 a_{12} a_8 a_2$$

2　Cayley 木内の点間の距離

次数$k>2$の Cayley 木を以下の手順で構成することにする。下の図は$k=3$の場合である。

1. 頂点の数が$k+1$の Cayley 木を作る（図中の$l=1$の場合)。
2. 外側のk個のそれぞれの頂点から、新たに$k-1$本の弧を伸ばして新しい頂点を接続する（図中の$l=2$の場合)。
3. 上記ステップを$l=L$まで繰り返す。



このとき頂点の数NをLで表しなさい。

解答例

$L=1$の場合、頂点数は$N=k+1$である。$L=2$の場合、外側のk個の頂点から、それぞれ$k-1$本の弧が伸びる。従って、総頂点数は

$$N=1+k+k(k-1) \tag{1.1}$$

となる。$L=3$の場合は、$L=2$の Cayley 木の外側の頂点の数は$k(k-1)$であり、そこからそれぞれ$k-1$本の弧が伸びる。従って、総頂点数は、以下のようになる。

$$N=1+k+k(k-1)+k(k-1)^2 \tag{1.2}$$

上記を繰り返すことで、次式を得る。

$$N(L)=1+k\sum_{i=0}^{L-1}(k-1)^i=1+k\frac{1-(k-1)^L}{1-(k-1)}=\frac{2-k(k-1)^L}{2-k} \tag{1.3}$$

数学的帰納法による証明

数学的帰納法を用いて、式(1.3)を証明する。準備として、中心からの距離がLである Cayley 木の葉の数$H(L)$とLの関係を証明する。上記の推論より、

$$H(L)=k(k-1)^{L-1} \tag{1.4}$$

となる。まず、これを証明する。

- $L=1$の場合： $H(1)=k$であり、式(1.4)が成り立つ。

- あるlで式(1.4)が成り立つと仮定する。距離lの Cayley 木の葉$H(l)$のそれぞれから$k-1$個の葉が出て、距離$l+1$の Cayley 木が構成される。従って、距離$l+1$の Cayley 木の葉の数は次式で表される。

$$H(l+1)=H(l)\times(k-1)=k(k-1)^{l-1}\times(k-1)=k(k-1)^{l}$$

従って、任意の自然数Lに対して、式(1.4)が成り立つ。

次に式(1.3)を証明する。

- $L=1$の場合：$N(1)=1+k$であり、明らか。

- あるlに対して式(1.3)が成り立つと仮定する。この時、葉の数は$H(l)$である。$l+1$の Cayley 木を構成するには、$H(l)$個の葉のそれぞれから$k-1$個の葉が新たに生成される。従って、頂点総数は、次式で表される。

$$\begin{aligned}N(l+1)&=N(l)+H(l)\times(k-1)=N(l)+k(k-1)^{l}\\&=\frac{2-k(k-1)^{l}}{2-k}+k(k-1)^{l}=\frac{1}{2-k}\left[2-k(k-1)^{l}+k(2-k)(k-1)^{l}\right]\\&=\frac{1}{2-k}\left[2+k(k-1)^{l}-k^{2}(k-1)^{l}\right]=\frac{2-k(k-1)^{l+1}}{2-k}\end{aligned}$$

よって、任意の自然数Lに対して式(1.3)が成り立つ。