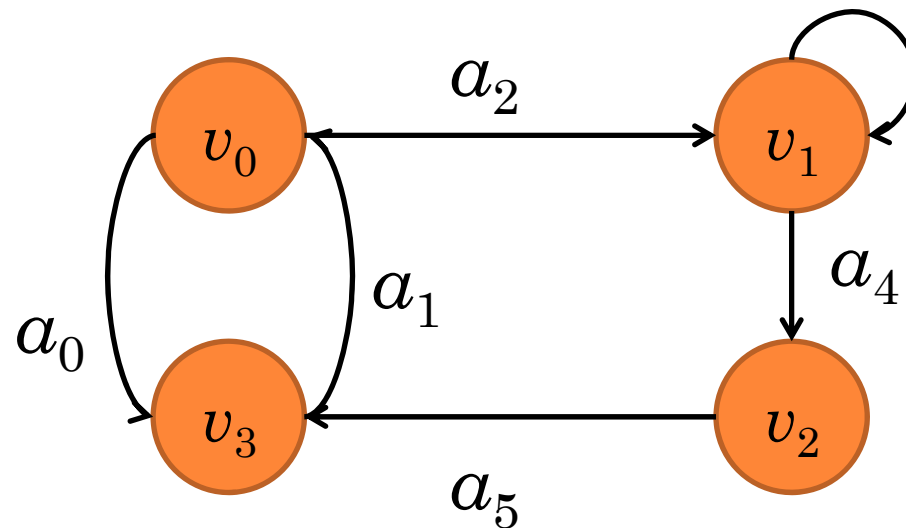


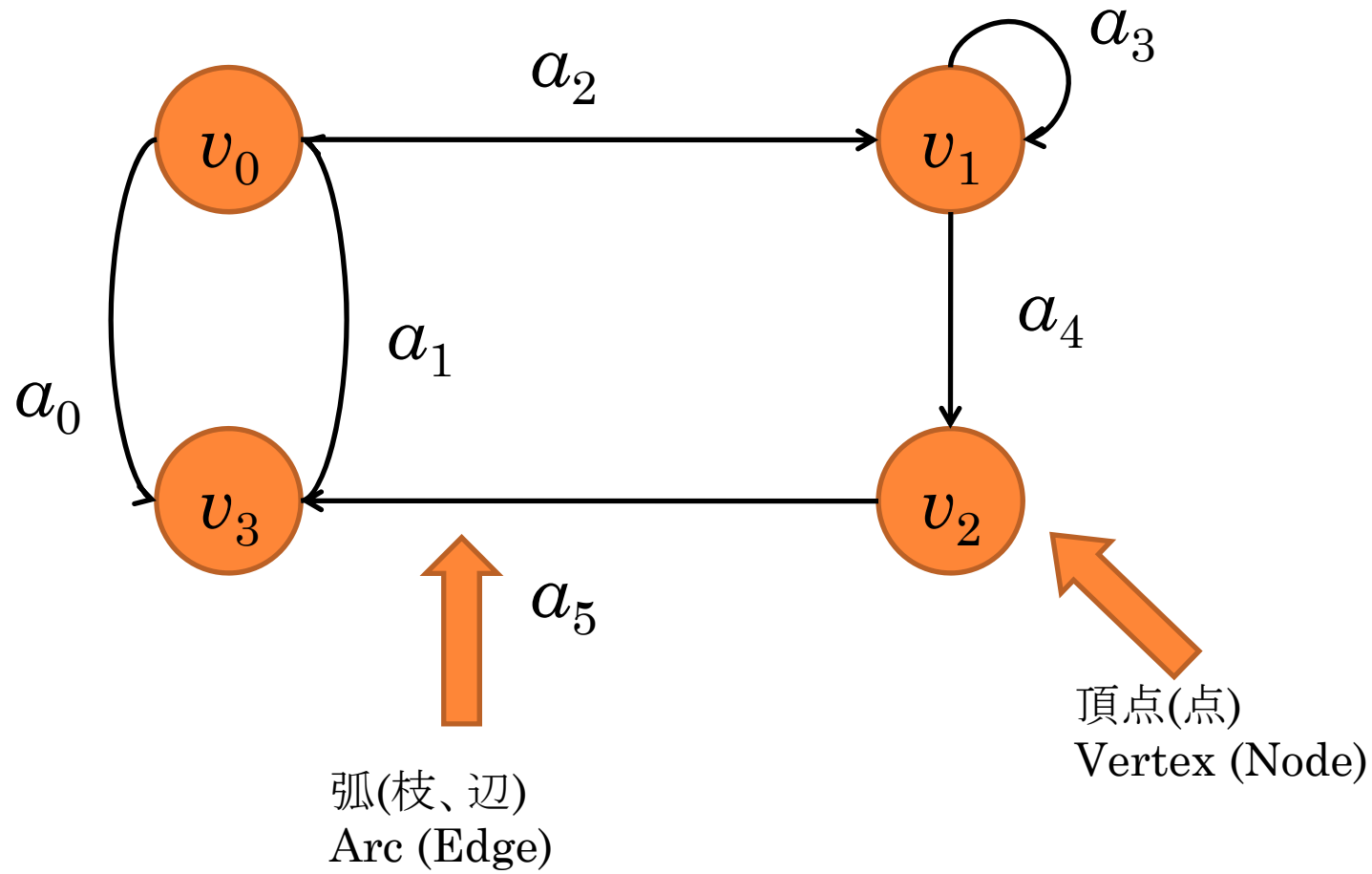
グラフを記述する

今日のテーマ

- グラフを数学の言葉で記述する
 - 図形表記と式表記
 - アルゴリズムの対象になる
- グラフに関する基本用語の導入
 - グラフ、頂点、弧



グラフの要素



グラフの定義

- 頂点(点)の集合 V : Vertex, Node
- 弧(枝、辺)の集合 A : Arc, Edge
- 弧からその始点への写像

$$\partial^+ : A \rightarrow V$$

- 弧からその終点への写像

$$\partial^- : A \rightarrow V$$

- グラフの定義

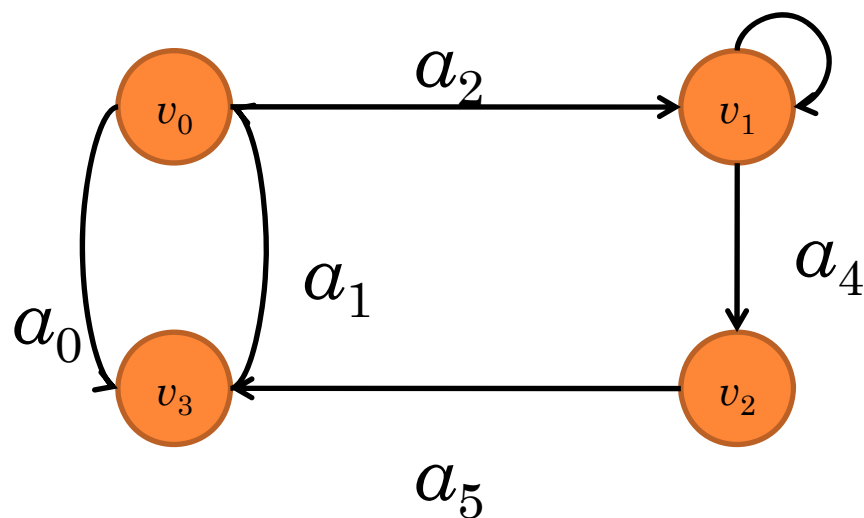
- 頂点の集合、弧の集合、弧から頂点への写像により定義

$$G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$$

註: 向きがある場合に弧(arc)、無い場合に辺(edge)と、区別することもある。



例1



$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$\partial^+ a_0 = v_0 \quad \partial^- a_0 = v_3$$

$$\partial^+ a_1 = v_3 \quad \partial^- a_1 = v_0$$

$$\partial^+ a_2 = v_0 \quad \partial^- a_2 = v_1$$

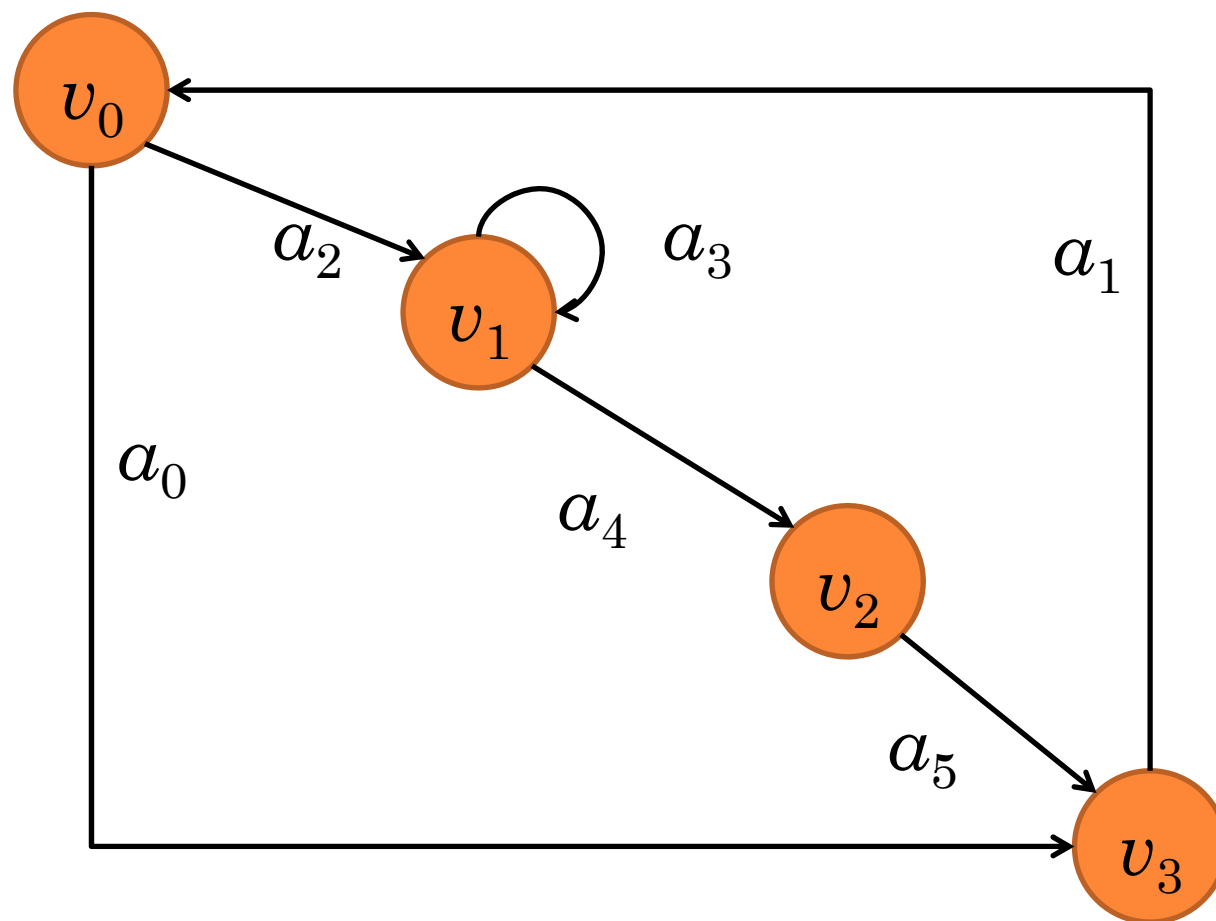
$$\partial^+ a_3 = v_1 \quad \partial^- a_3 = v_1$$

$$\partial^+ a_4 = v_1 \quad \partial^- a_4 = v_2$$

$$\partial^+ a_5 = v_2 \quad \partial^- a_5 = v_3$$



別の幾何学的表現



例2

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$$

$$\partial^+ a_0 = v_0 \quad \partial^- a_0 = v_1 \quad \partial^+ a_1 = v_0 \quad \partial^- a_1 = v_2$$

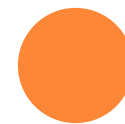
$$\partial^+ a_2 = v_0 \quad \partial^- a_2 = v_3 \quad \partial^+ a_3 = v_0 \quad \partial^- a_3 = v_4$$

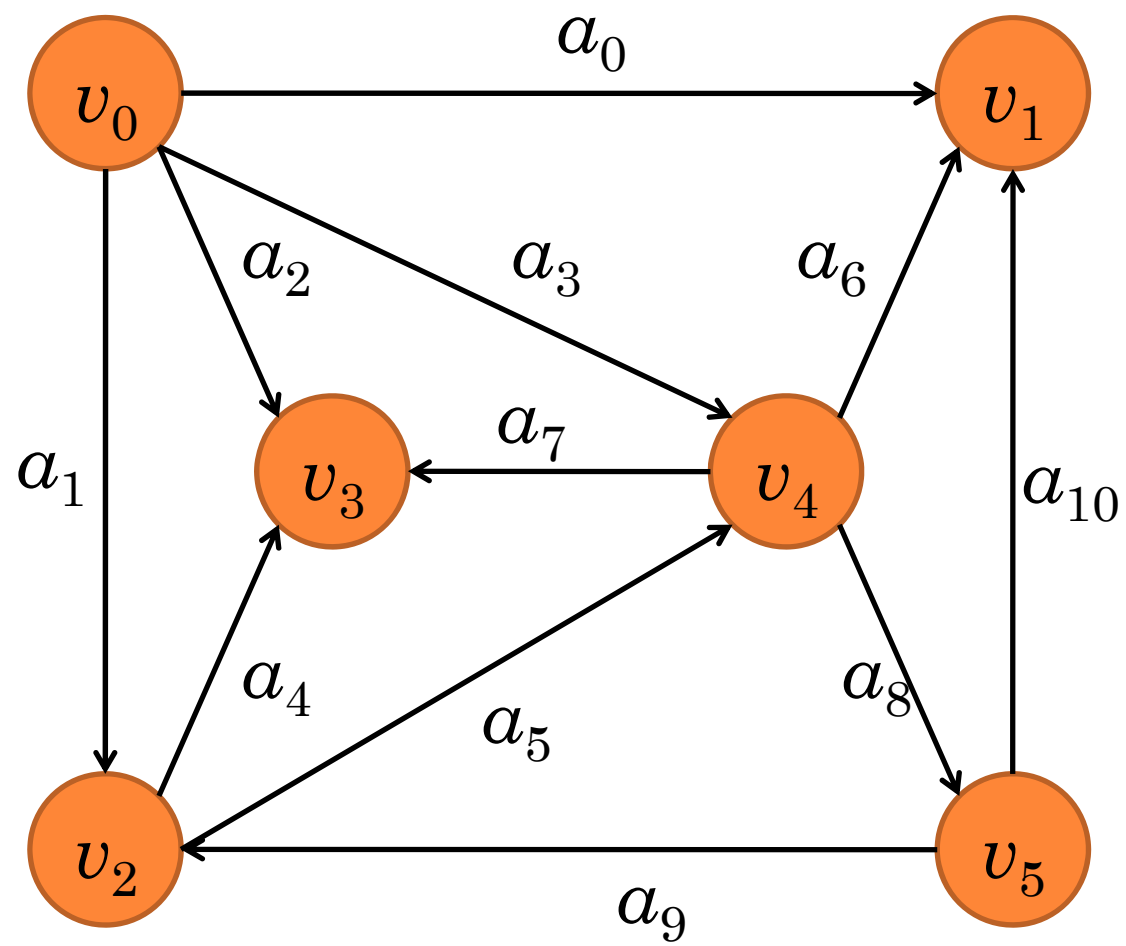
$$\partial^+ a_4 = v_2 \quad \partial^- a_4 = v_3 \quad \partial^+ a_5 = v_2 \quad \partial^- a_5 = v_4$$

$$\partial^+ a_6 = v_4 \quad \partial^- a_6 = v_1 \quad \partial^+ a_7 = v_4 \quad \partial^- a_7 = v_3$$

$$\partial^+ a_8 = v_4 \quad \partial^- a_8 = v_5 \quad \partial^+ a_9 = v_5 \quad \partial^- a_9 = v_2$$

$$\partial^+ a_{10} = v_5 \quad \partial^- a_{10} = v_1$$





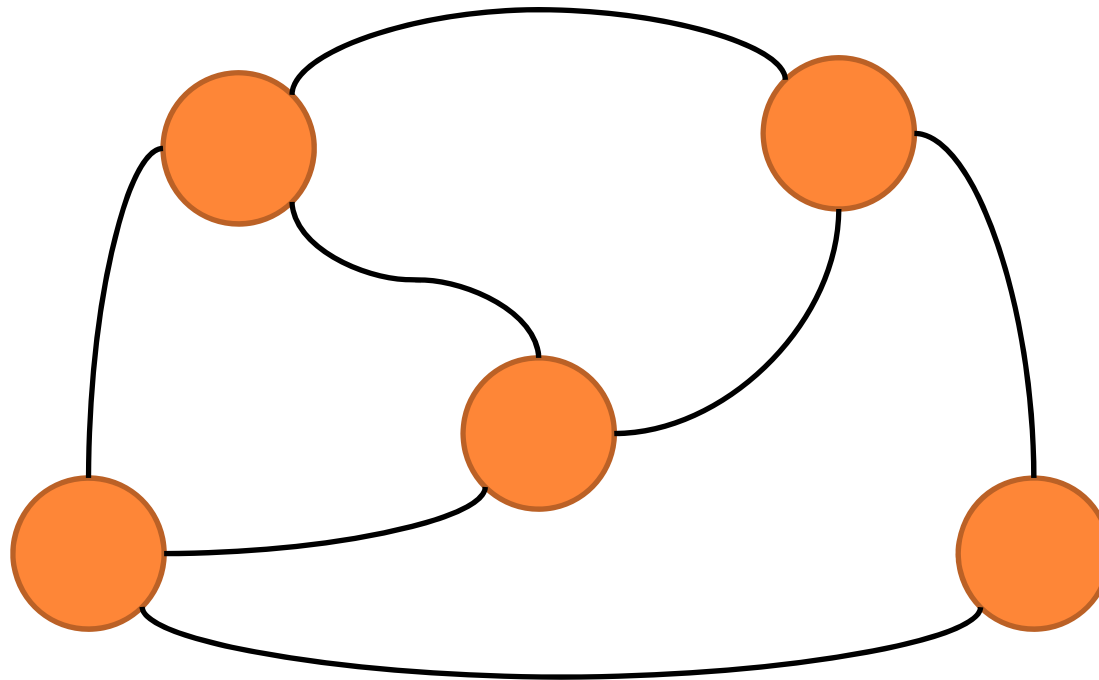
グラフの幾何学表現

- グラフの幾何学的表現 (Geometrical Representation)
 - 唯一ではない
 - 頂点の位置を変えることで、見た目は変わる
 - 頂点間の繋がり具合が問題
 - トポロジー (Topology) を問題にする
- 同形(Isomorphic)なグラフ
 - 頂点や弧の名前の付替で同じになるグラフ



有向グラフと無向グラフ

- 有向グラフ (directed graph)
 - 弧に向きがある
- 無向グラフ (undirected graph)
 - 弧に向きが無い

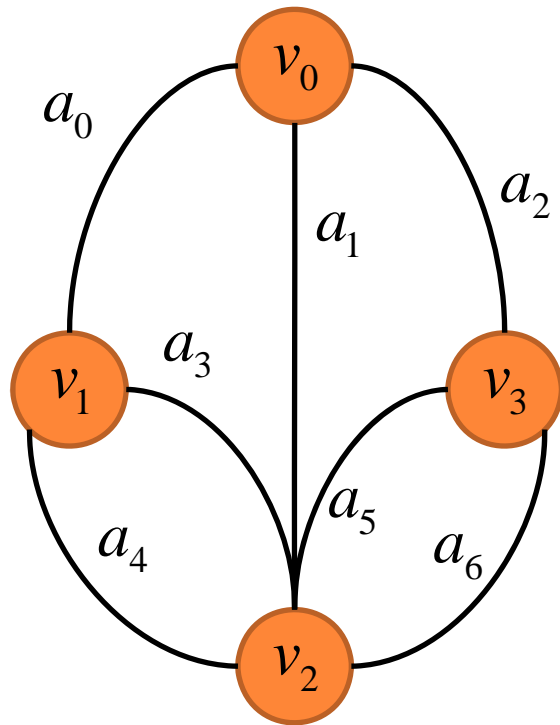


有向グラフと無向グラフの例

- 有向グラフ
 - Webページのリンク
 - 作業フロー
- 無向グラフ
 - インターネット接続
 - 鉄道網(例外あり)



例: KÖNIGSBERG BRIDGES



$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

$$\partial a_0 = (v_0, v_1) \quad \partial a_1 = (v_0, v_2)$$

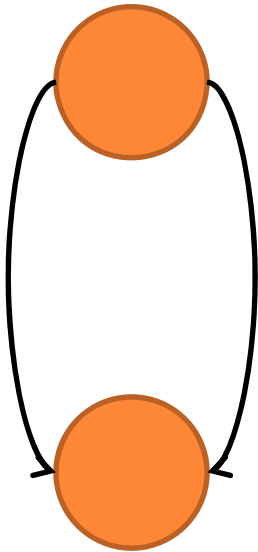
$$\partial a_2 = (v_0, v_3) \quad \partial a_3 = (v_1, v_2)$$

$$\partial a_4 = (v_1, v_2) \quad \partial a_5 = (v_2, v_3)$$

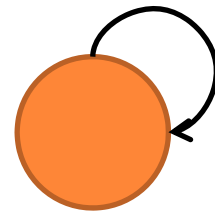
$$\partial a_6 = (v_2, v_3)$$

並列弧と孤立弧

- 並列弧



- 孤立弧



- 単純なグラフ

- 並列弧と孤立弧が無い

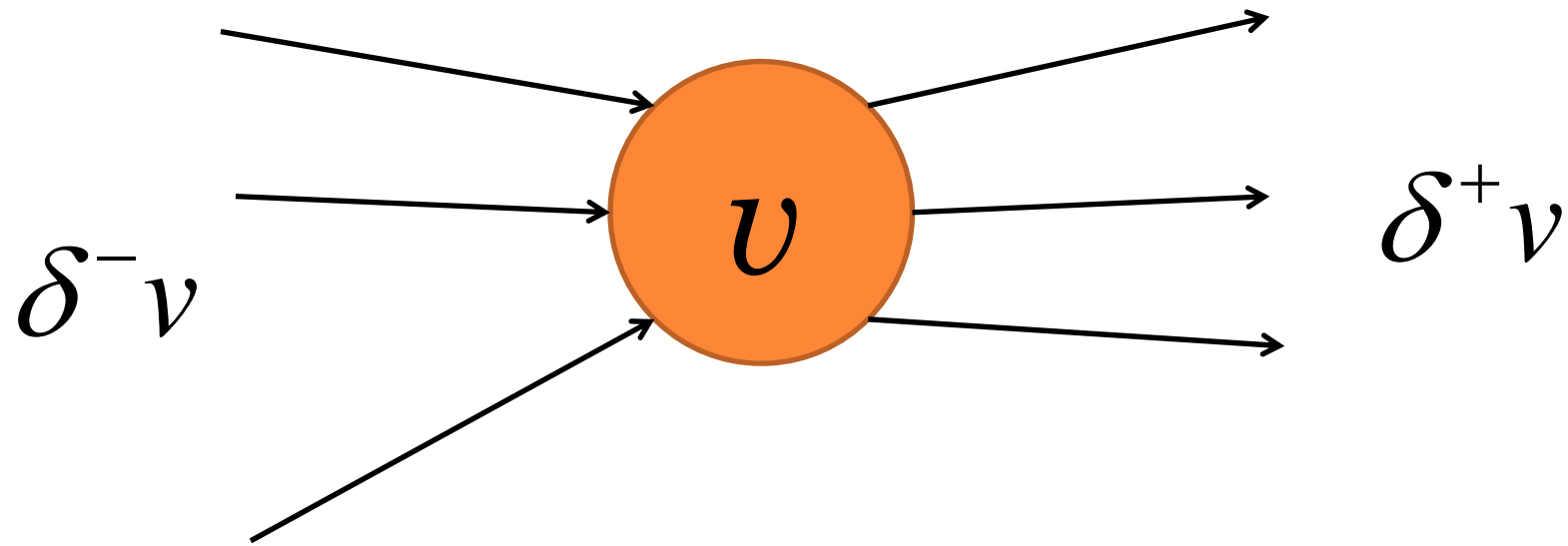


次数 (DEGREE)

- 頂点 v から出る弧の全体 $\delta^+v = \{a \mid v = \partial^+ a\}$
- 頂点 v の正の次数: 頂点 v から出る弧の数 $|\delta^+v|$
- 頂点 v に入る弧の全体 $\delta^-v = \{a \mid v = \partial^- a\}$
- 頂点 v の負の次数: 頂点 v に入る弧の数 $|\delta^-v|$



次数 (DEGREE)



Negative Degree
In-degree

Positive Degree
Out-degree

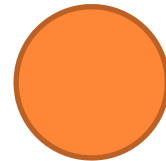


- 次数

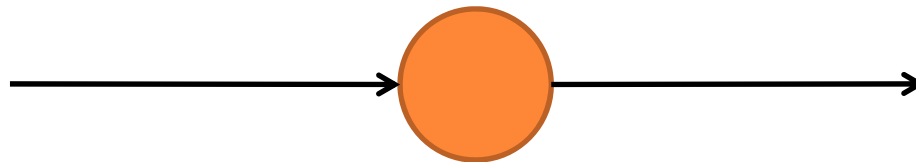
- 頂点に接続している弧の総数

$$k_v = |\delta^+ v| + |\delta^- v|$$

- 孤立点: 次数0の点

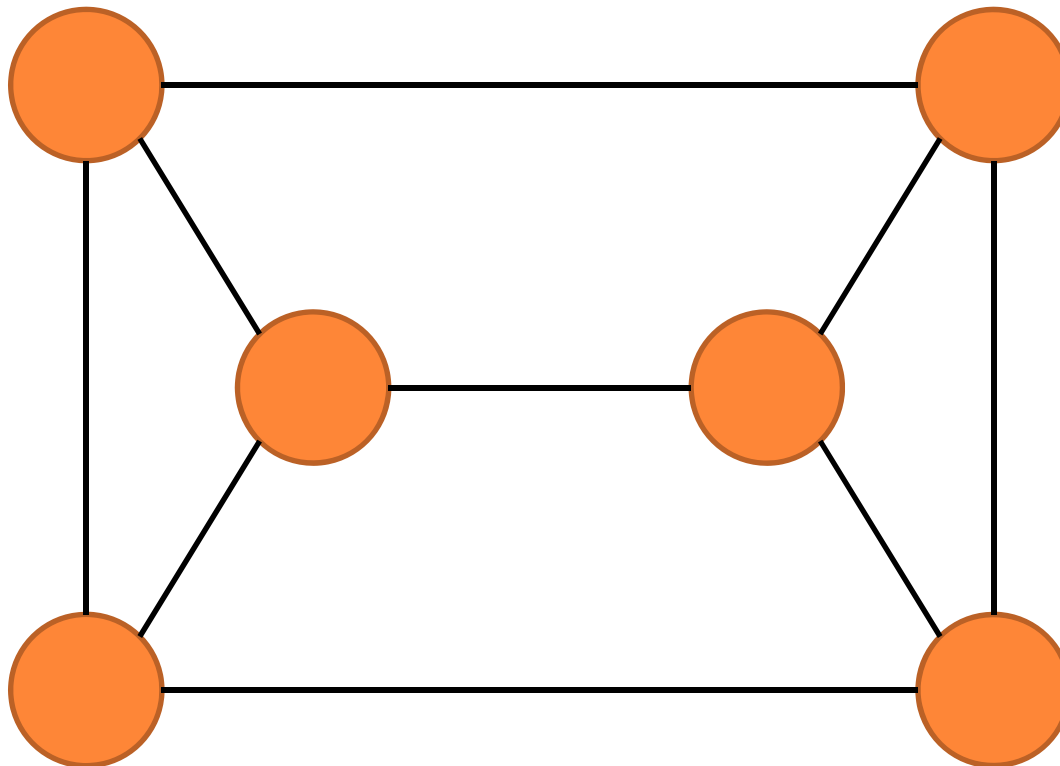


- 直列弧: 次数2の頂点に接続する弧



正則グラフ (REGULAR GRAPH)

- 全ての頂点の次数が等しいグラフ



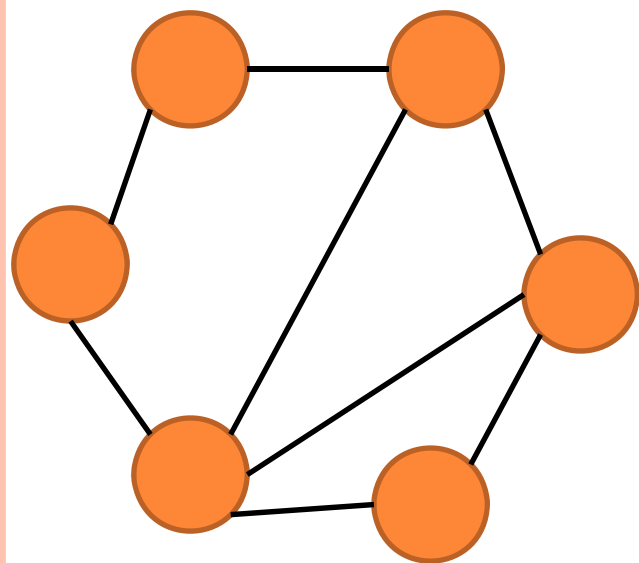
3-regular graph



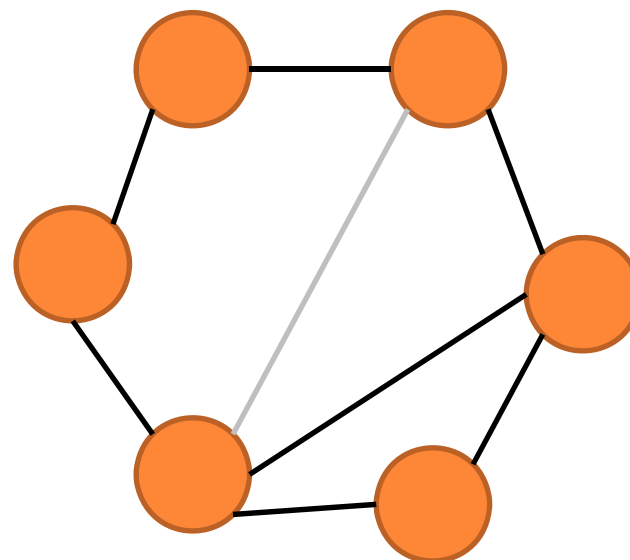
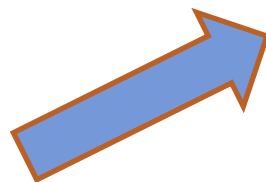
弧の除去

- 開放除去(open-circuit, delete)
 - 単に弧を除去する
- 短絡除去(short-circuit, contract)
 - 除去した弧の両端の頂点を一つにまとめる

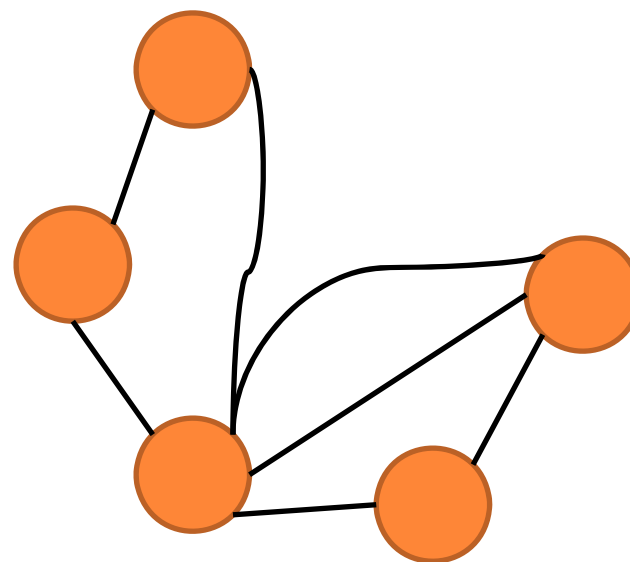
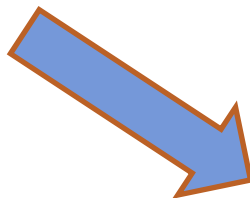




開放除去



短絡除去



部分グラフ(SUB-GRAPH)

- グラフ G のうち、頂点及び弧の一部から構成されるグラフを G の部分グラフと呼ぶ
- 部分グラフの構成
 - グラフ G からいくつかの弧を開放除去する
 - グラフ G からいくつかの孤立点を除去する

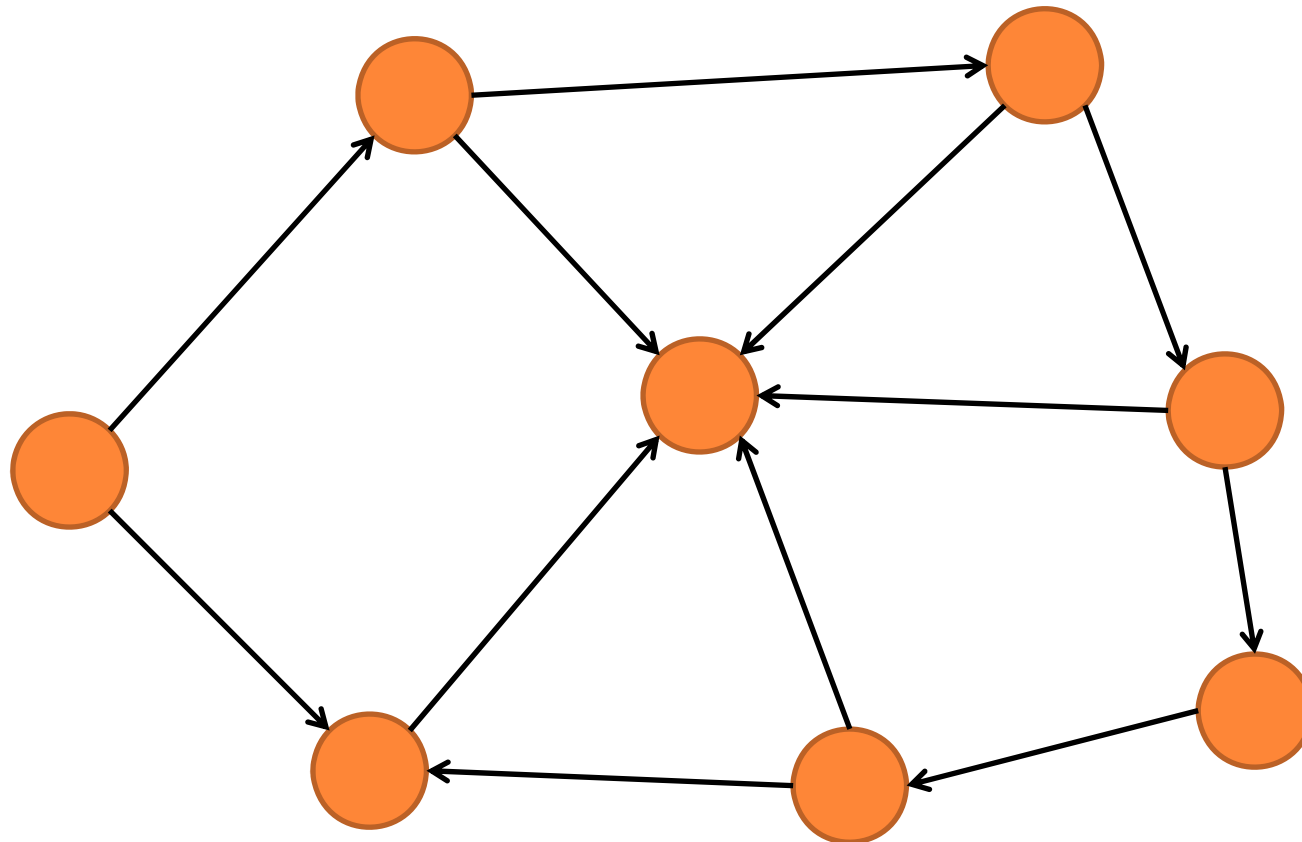


部分グラフの種類

- G の全域部分グラフ(spanning sub-graph)
 - G と同じ頂点集合を持つ G の部分グラフ H
- G の誘導部分グラフ (induced sub-graph)
 - G の頂点集合 V の部分集合 U に対して、両端点が U に属する弧の全体集合を $A(U)$ とするとき、 U と $A(U)$ からなるグラフ。



SPANNING TREE



INDUCED SUBGRAPH

