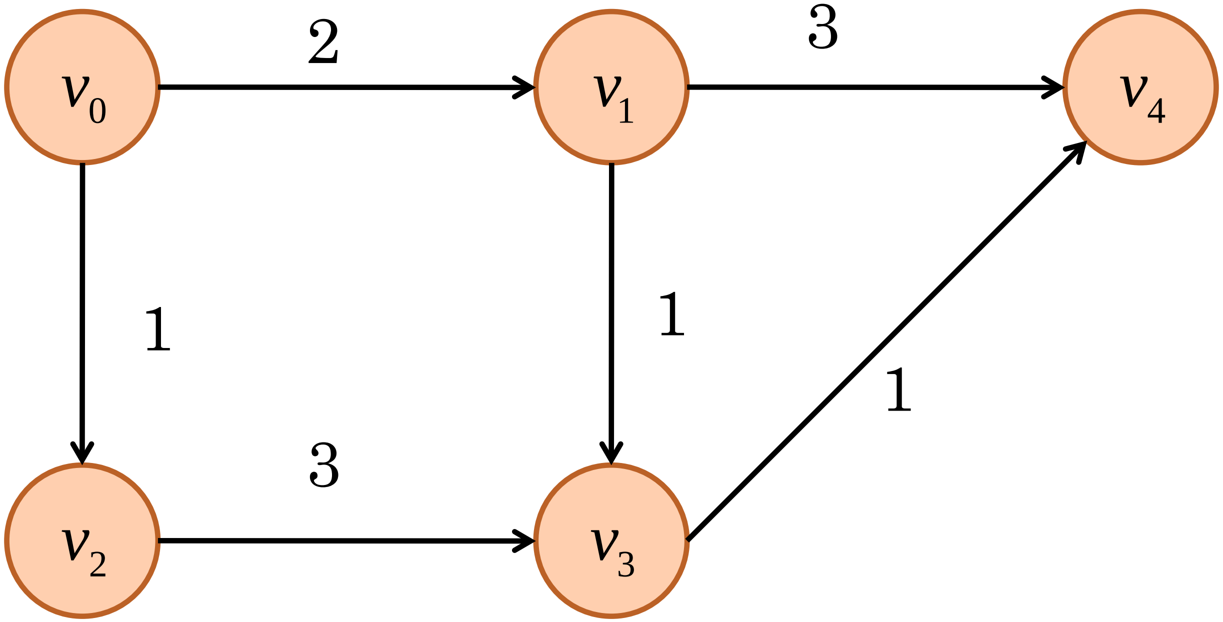
最短経路問題
Shortest Path Problem

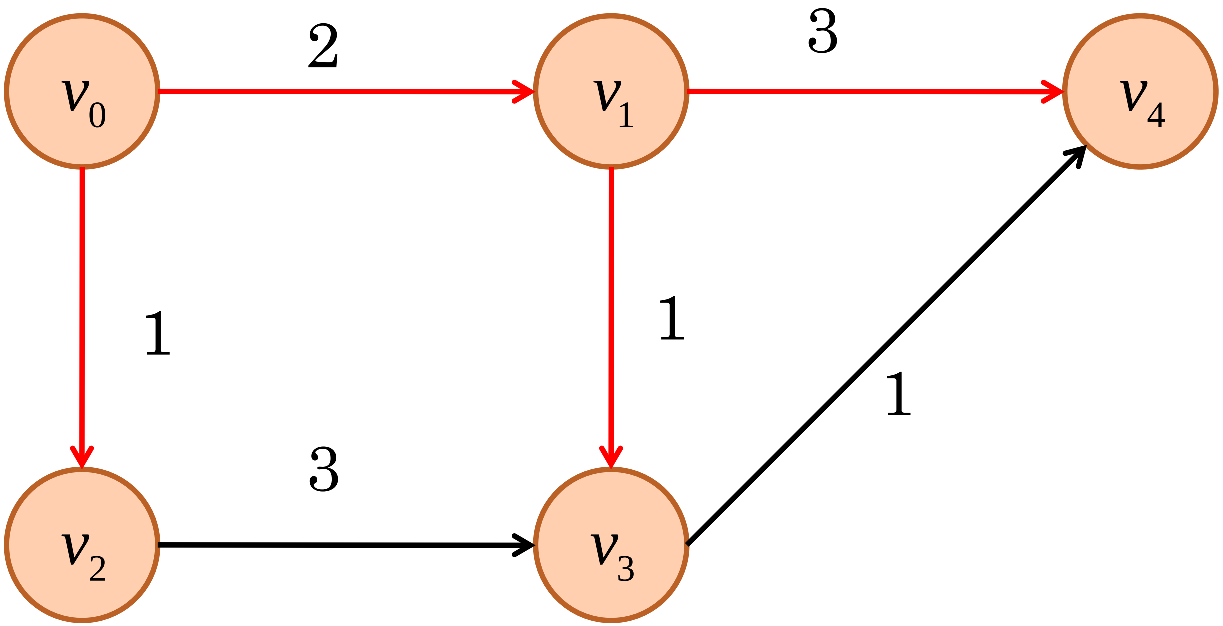
最短経路問題とは

- 有向ネットワーク
  - 各弧に距離やコスト(正の実数)が定義されている
- 始点から終点までの最短有向道を見つける
- 距離・コストの最適化問題

幅優先探索ではダメな理由



幅優先探索では



v_4への経路が$v_0 \to v_1 \to v_4$となり、距離が5となってしまう。

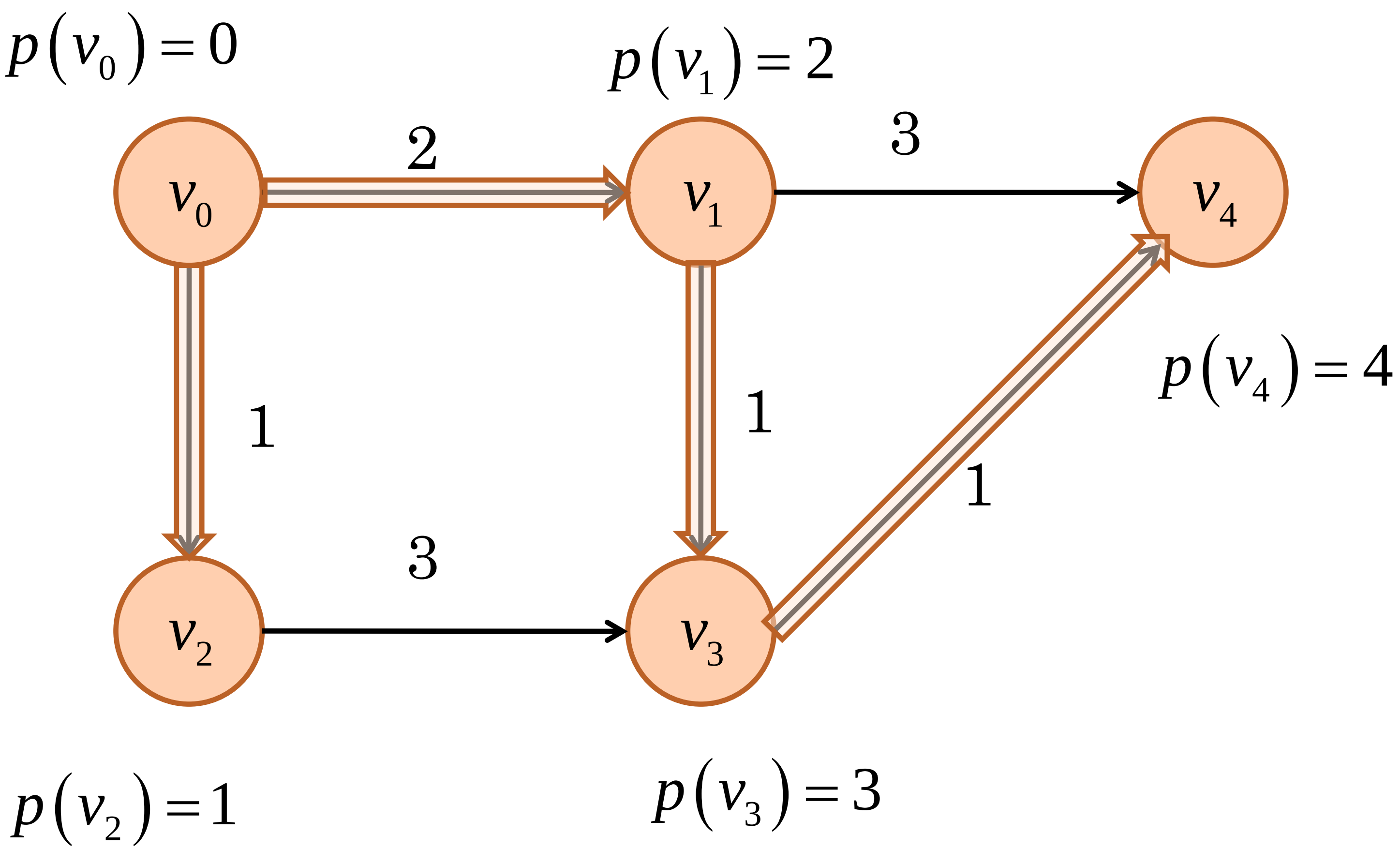
しかし、経路$v_0 \to v_1 \to v_3 \to v_4$のほうが、距離4となり、短い

準備:ポテンシャル $P:V \to R$

- 一般には、各頂点に定義された実数値
- 始点からの「高さ」(距離)をイメージする
- 経路のよらずに定まるはず
  - 最短の経路に沿った距離に対応するはず

- ポテンシャル(potential)→位置エネルギー
  - 経路(どうやってそこまで持ち上げたか)に依らない

ポテンシャルの例



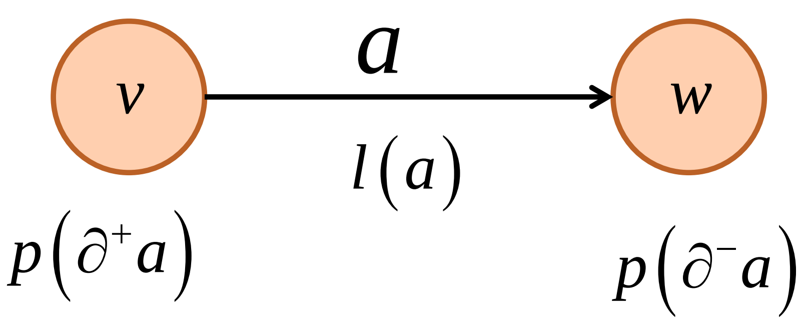
最短経路

関数　$l_p : A \to R$

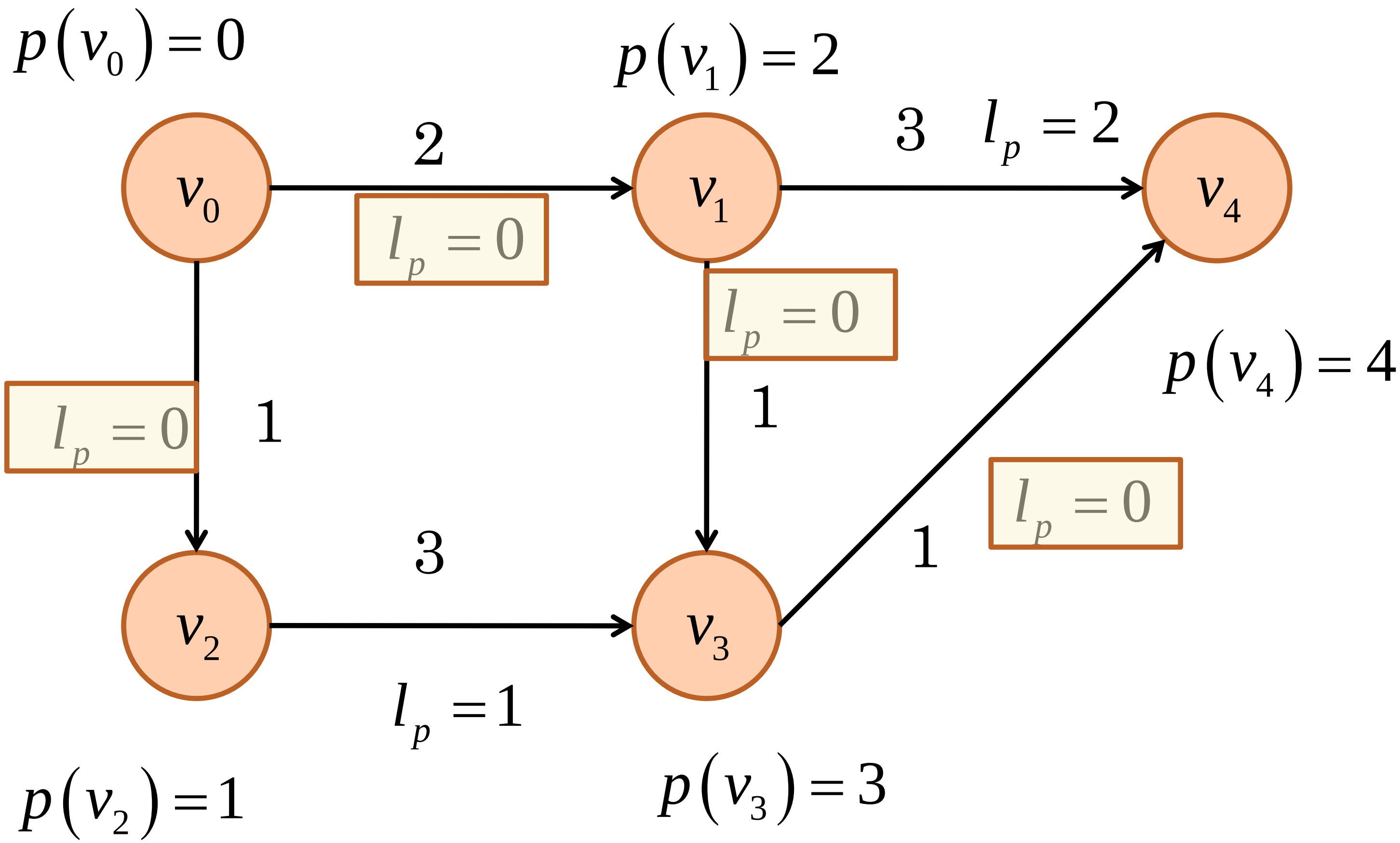
- 弧aの長さ(距離)　$l(a)$
- 弧の始点(終点)のポテンシャル　$p(\partial^{\pm} a)$

$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^{+} a) - p(\partial^{-} a)$$

- ポテンシャルの差と$l(a)$とのずれ



例



最短経路に沿って $l_p=0$

有向道に沿って拡張

- 頂点uから頂点vへ向かう有向道Pに対して以下が成り立つ

$$l_p(P) = l(P) + p(u) - p(v)$$

$$l_p(P) \equiv \sum_{a \in P} l_p(a)$$

$$l(P) \equiv \sum_{a \in P} l(a)$$

有向道に沿った例

$$P = \{u = v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k = v\}$$

$$\begin{aligned} l_p(P) &= \sum_{a \in P} l_p(a) = \sum_{i=1}^{k} l_p(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left[l(a_i) + p(v_{i-1}) - p(v_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} l(a_i) + p(u) - p(v) \\ &= l(P) + p(u) - p(v) \end{aligned}$$

- 関数$l_p : A \to R$が非負関数であり、道P上の各弧aにおいて

  $l_p\left(a\right) = 0$のとき、Pはuからvへの最短経路となる。

- 最短経路でない弧に対しては$l_p\left(a\right) > 0$

- 任意の道Pに対して、その経路の長さの下限は、$p(v)-p(u)$ である。

$$l(P)=p(v)-p(u)+l_p(P)\geq p(v)-p(u)$$

- このようなポテンシャル（可能な道のうち最小値を与える）を構成することが、課題となる。

ダイクストラ(Dijkstra)法

- $l(a) \ \geq 0$ の場合を考える
- グラフ G は単純(並列弧が無い)と仮定する

- $U \subseteq V$ ：始点v_0からの有向道が見つかっているが、距離が確定していない頂点の集合
- $W \subseteq V$ ：始点v_0からの有向道が見つかり、距離が確定した頂点の集合
- $p(v) \in R$ ：始点v_0から頂点vへの距離
- $q(v) \in V$ ：最短経路を頂点vから逆にたどる際の頂点vの直前の頂点

Dijkstra法：初期化

$$U = \{v_0\}$$

$$W = \emptyset$$

$$p(v_0) = 0$$

$$p(u) = +\infty \left(\forall u \in V \setminus \{v_0\}\right)$$

$$q(v) = \mathrm{NULL}\left(\forall v \in V\right)$$

Uを$p(w)$によるヒープとして
実装すると効率的

while ($U \neq \emptyset$) {

$w = U.poll()$ ： $p(w)$ が最小である $w \in U$ を取り出す

forall ($a \in \delta^+ w$) {

$x = \partial^- a$

if ($x \notin W$) {

if ($p(x) > p(w) + l(a)$) {

$q(x) \leftarrow w$

$p(x) \leftarrow p(w) + l(a)$

if ($x \in U$){

$U.reduceValue(x)$ ：ヒープ中の x の変更

} else {

$U.add(x)$ ：ヒープに x を追加

}

}

}

}

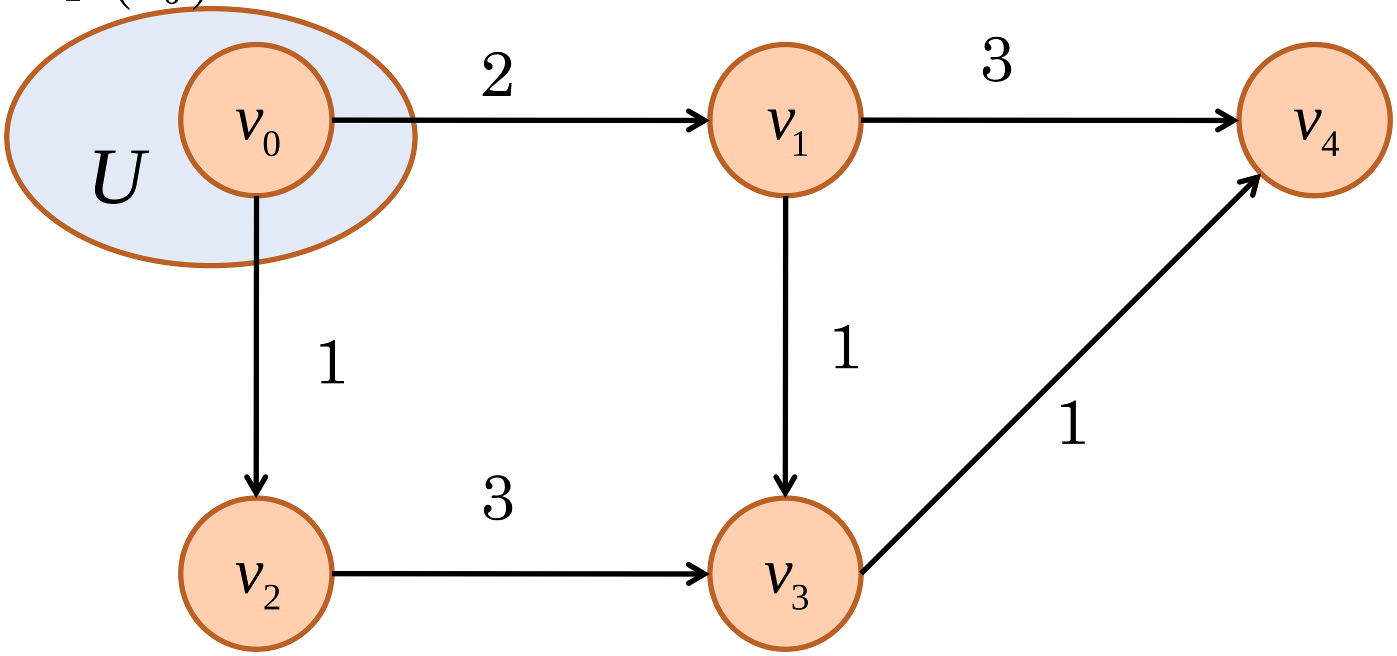
$W \leftarrow W \cup \{w\}$

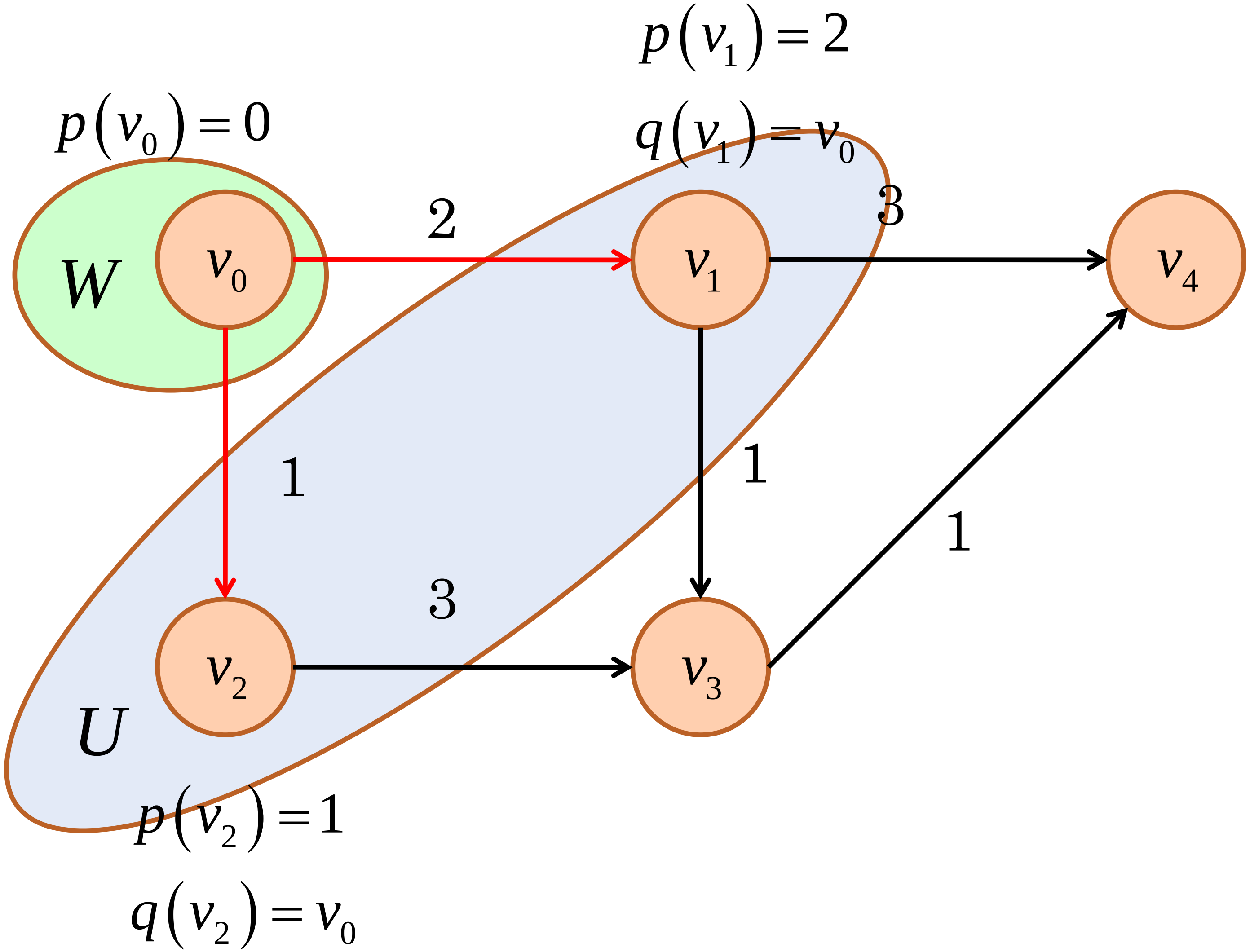
}

ヒープ中の$p(x)$の値が
減ることがあることに注意

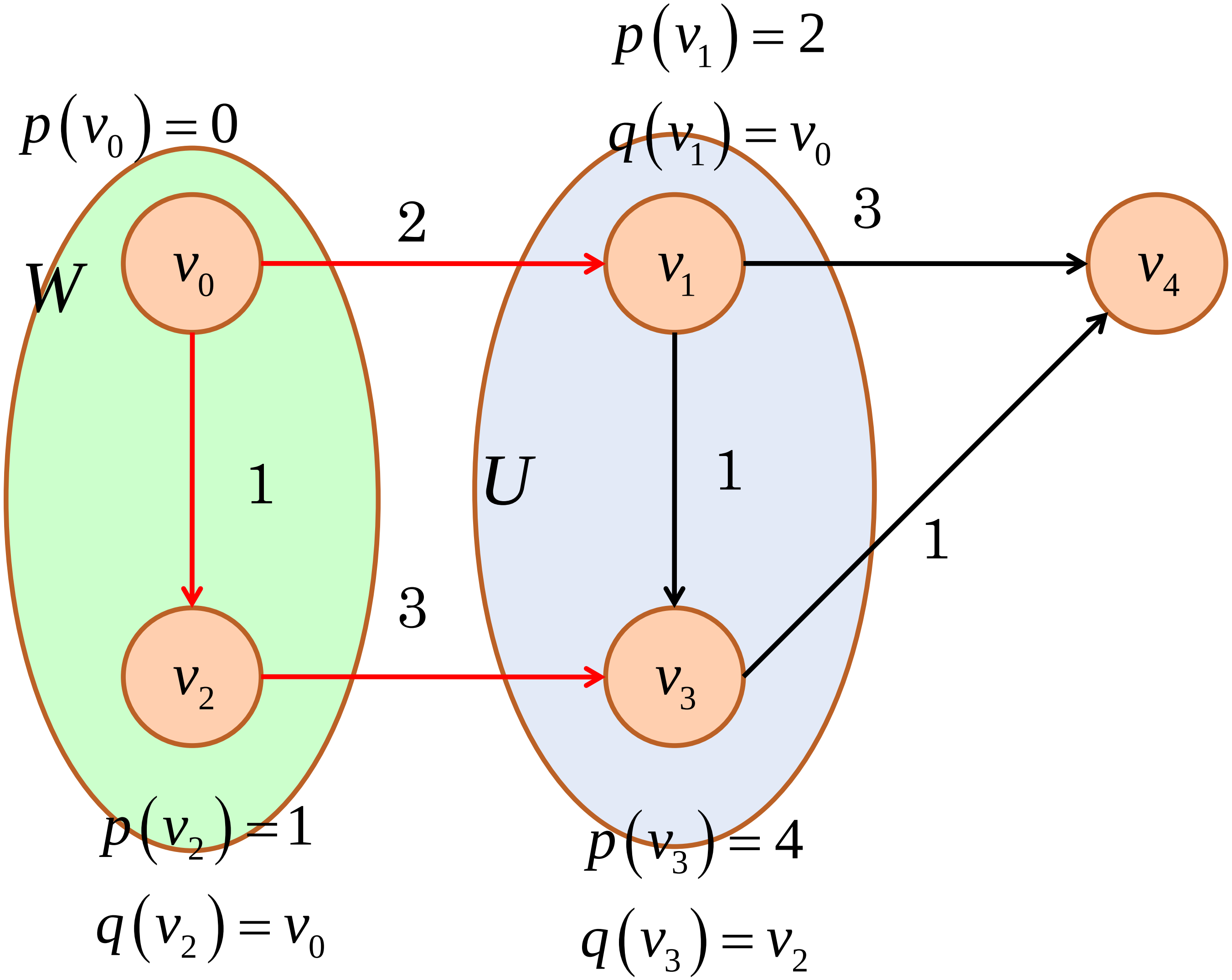
例1

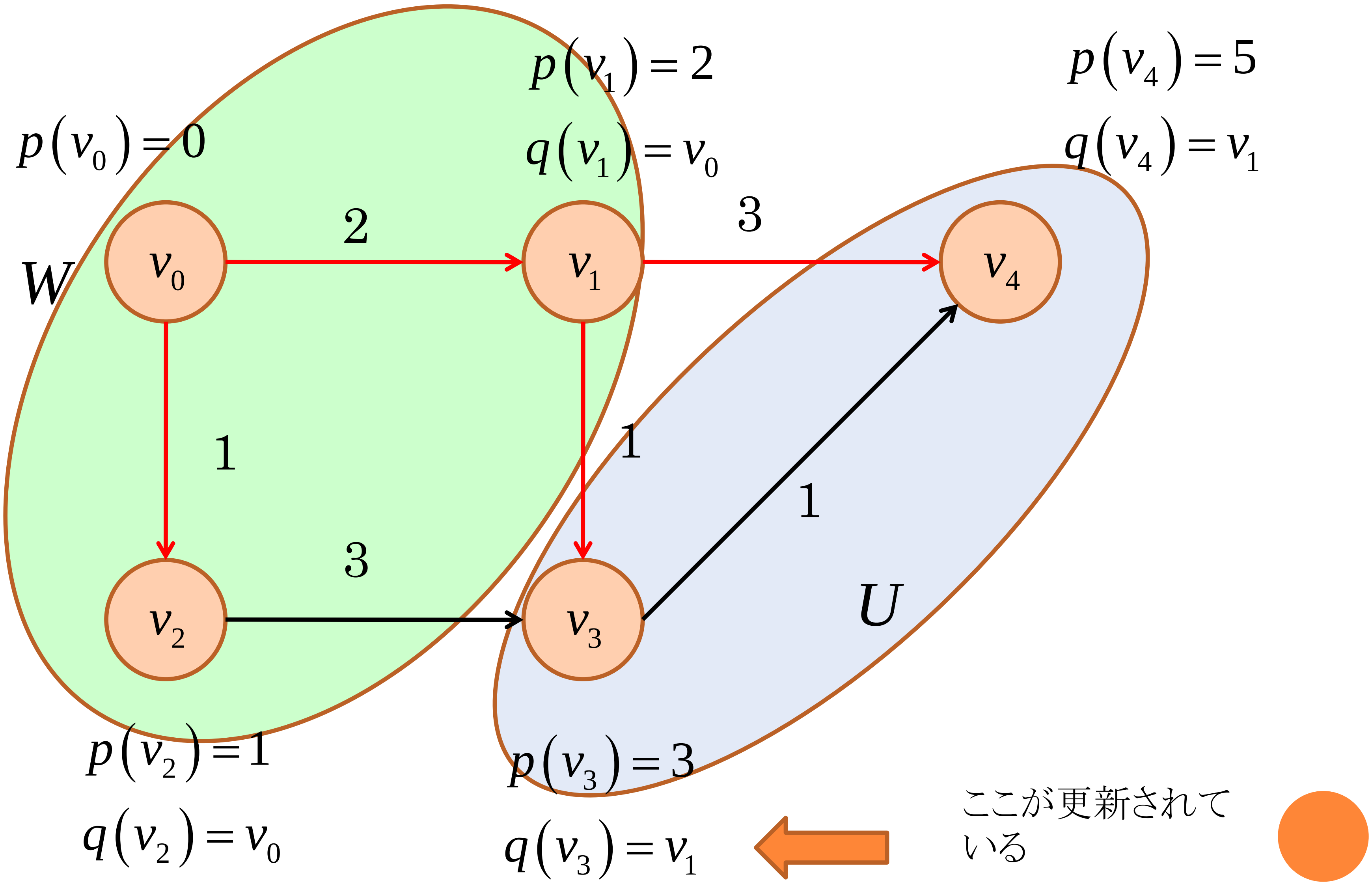
$p(v_0)=0$

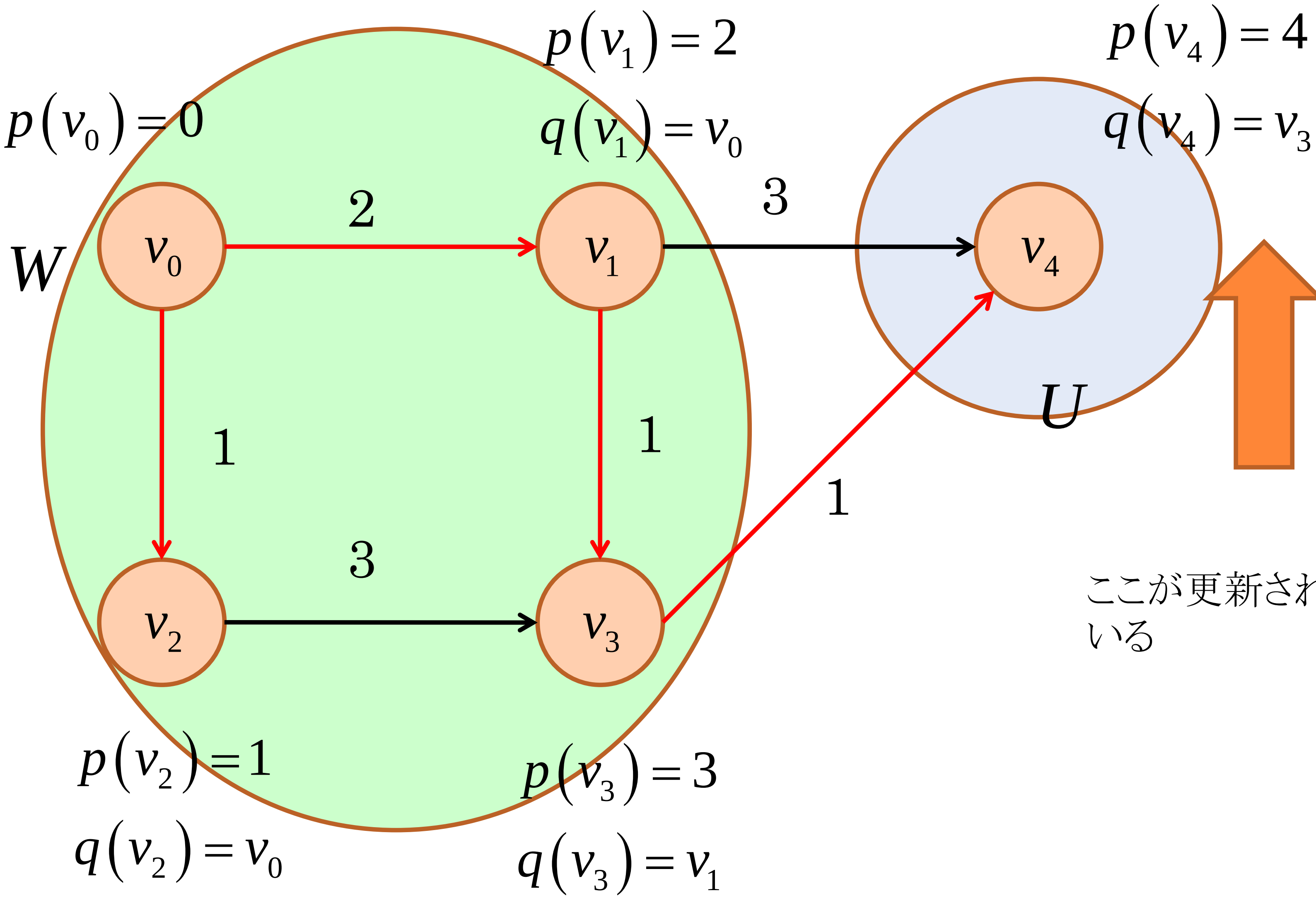




$p(v_1) = 2$
$q(v_1) = v_0$
$p(v_0) = 0$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
3
v_2
v_3
U
$p(v_2) = 1$
$q(v_2) = v_0$


$p(v_1) = 2$
$q(v_1) = v_0$
$p(v_0) = 0$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
2
3
1
1
3
1
$p(v_2) = 1$
$q(v_2) = v_0$
$p(v_3) = 4$
$q(v_3) = v_2$

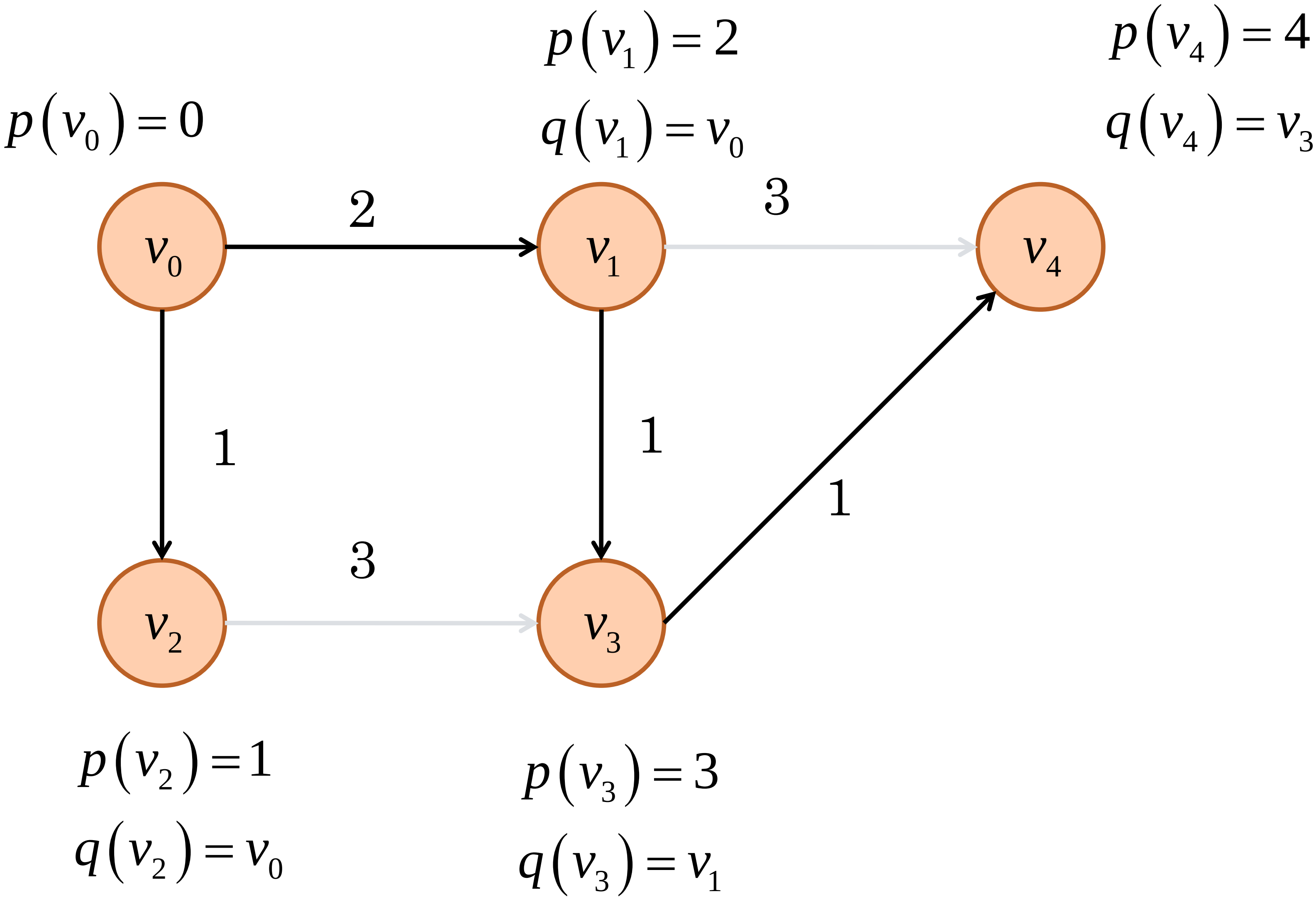

$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=5$
$q(v_4)=v_1$
W
v_0
v_1
v_4
v_2
v_3
2
3
1
1
1
3
U
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$
ここが更新されている



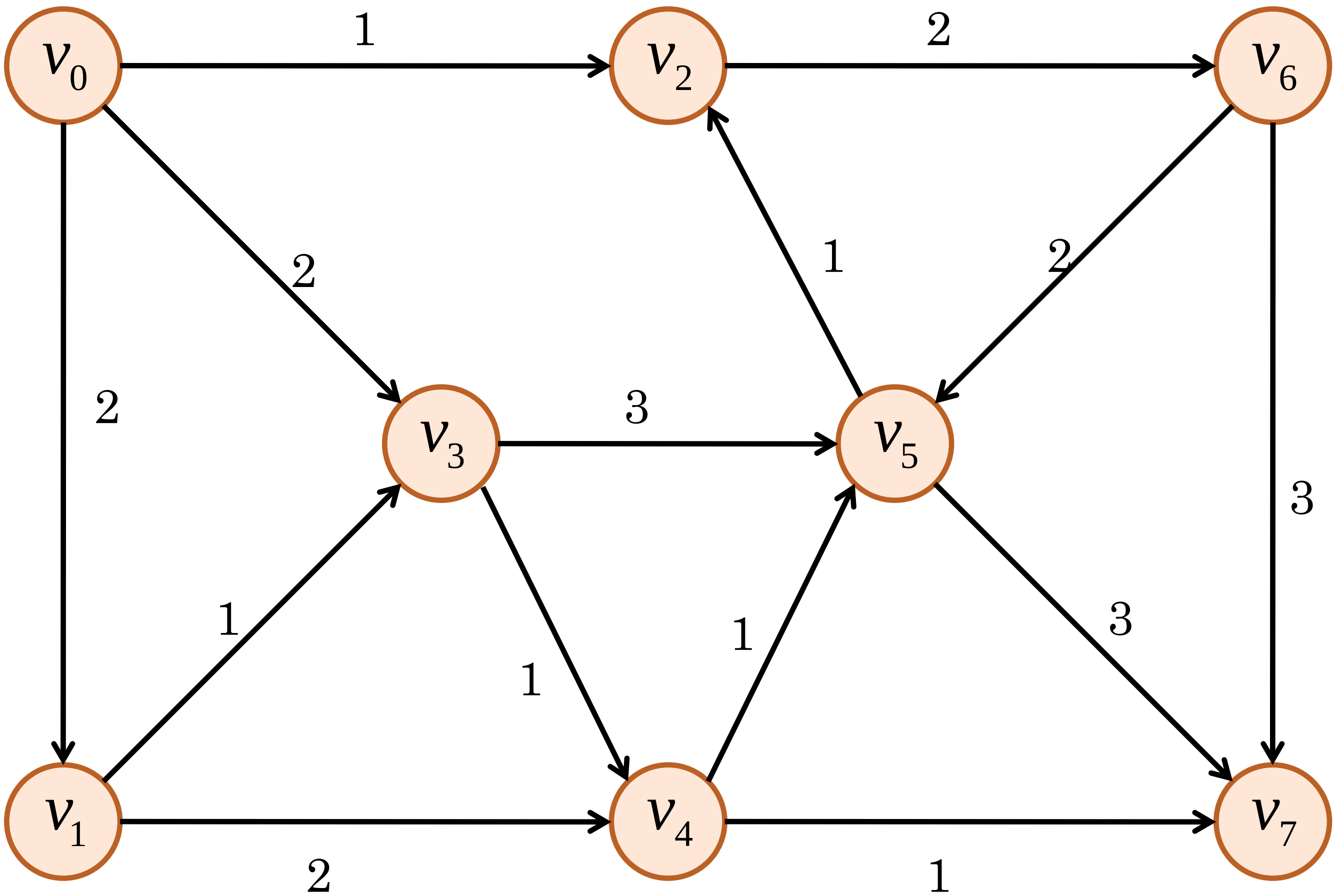
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=4$
$q(v_4)=v_3$
$p(v_0)=0$
W
v_0
v_1
v_4
U
v_2
v_3
2
3
1
1
1
3
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$

ここが更新されている

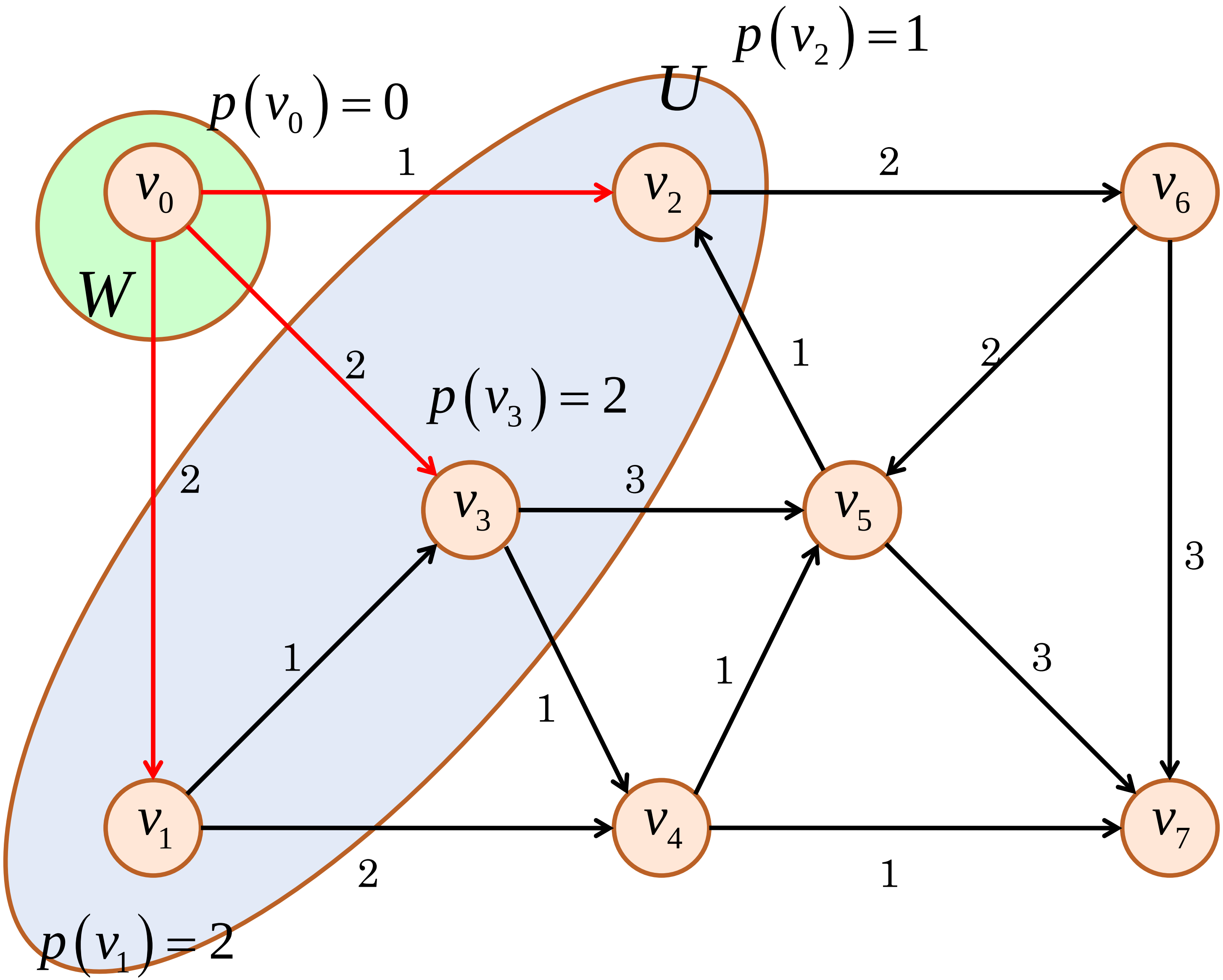
	注目している頂点	W	U	p	q	更新を受けた手順
0		$\varnothing$	$\{v_0\}$	$p(v_0)=0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2\}$	$p(v_1)=2$	$q(v_1)=v_0$	
				$p(v_2)=1$	$q(v_2)=v_0$	
2	v_2	$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3\}$	$p(v_3)=4$	$q(v_3)=v_2$	3
3	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4\}$	$p(v_4)=5$	$q(v_4)=v_1$	4
				$p(v_3)=3$	$q(v_3)=v_1$	
4	v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4, v_5\}$	$p(v_4)=4$	$q(v_4)=v_3$	
5	v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{v_5\}$			
6	v_5	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$	$\varnothing$			


$p(v_1) = 2$
$q(v_1) = v_0$
$p(v_4) = 4$
$q(v_4) = v_3$
$p(v_0) = 0$
2
3
v_0
v_1
v_4
1
1
1
3
v_2
v_3
$p(v_2) = 1$
$q(v_2) = v_0$
$p(v_3) = 3$
$q(v_3) = v_1$

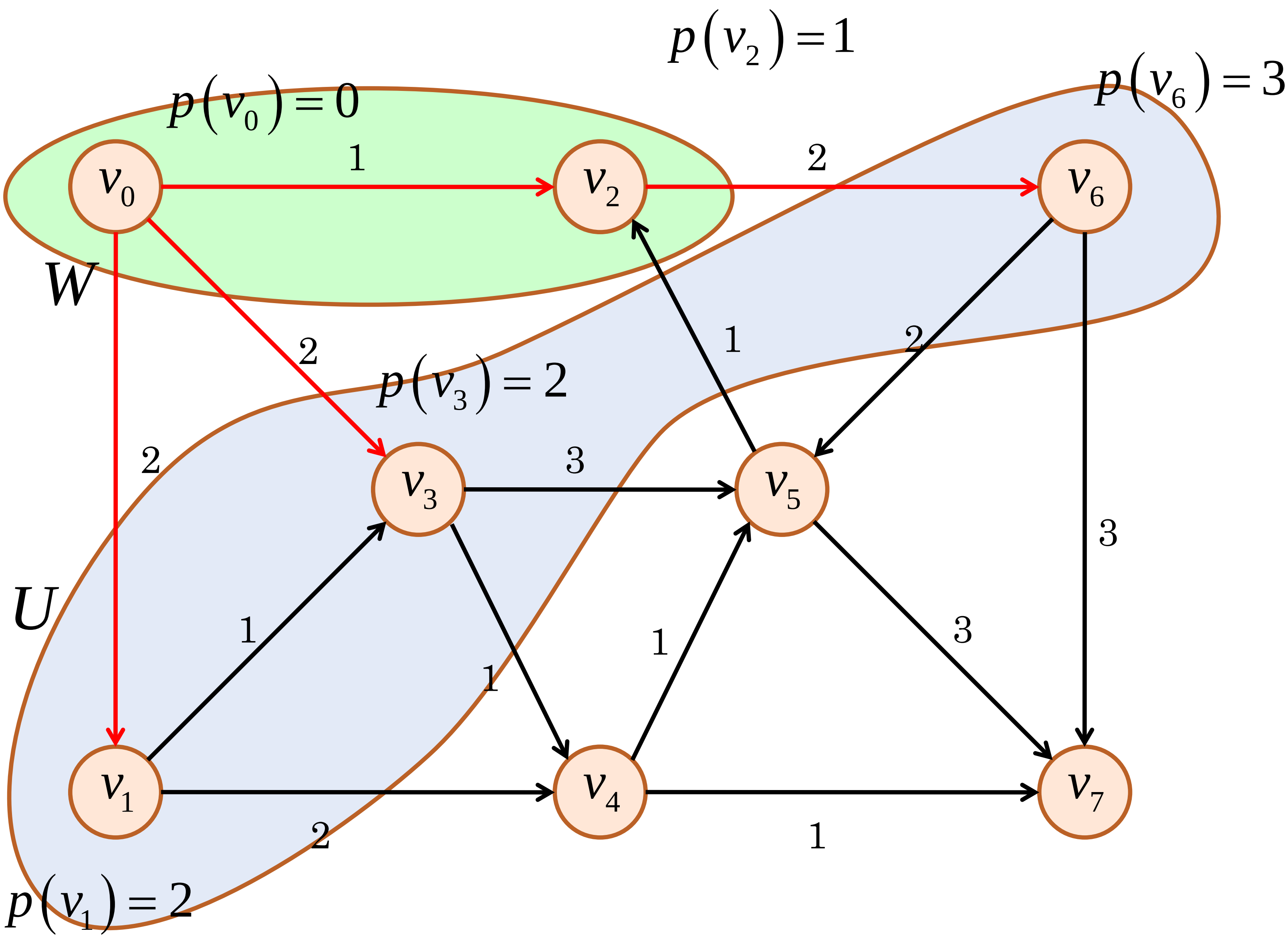
例2

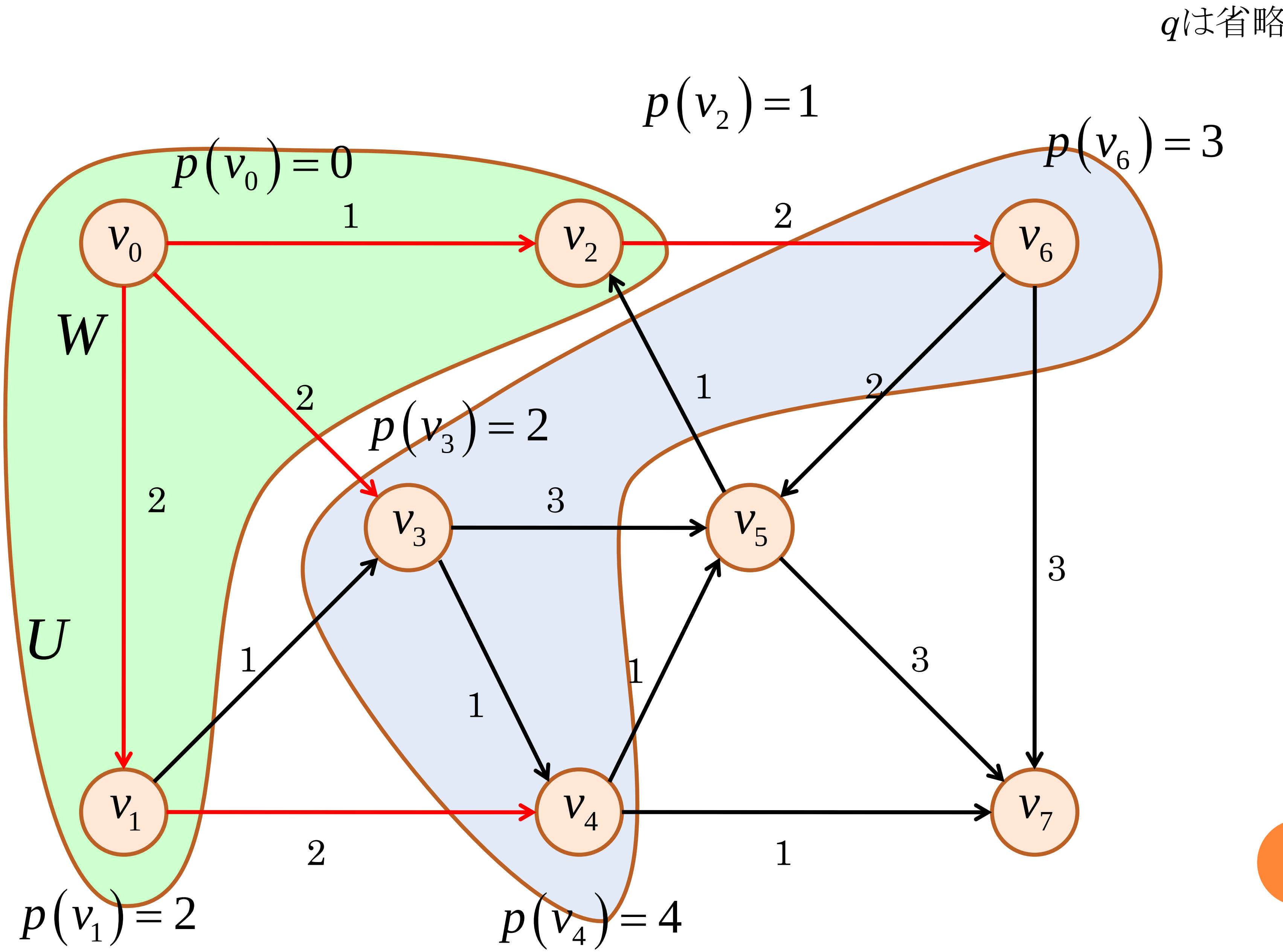


qは省略

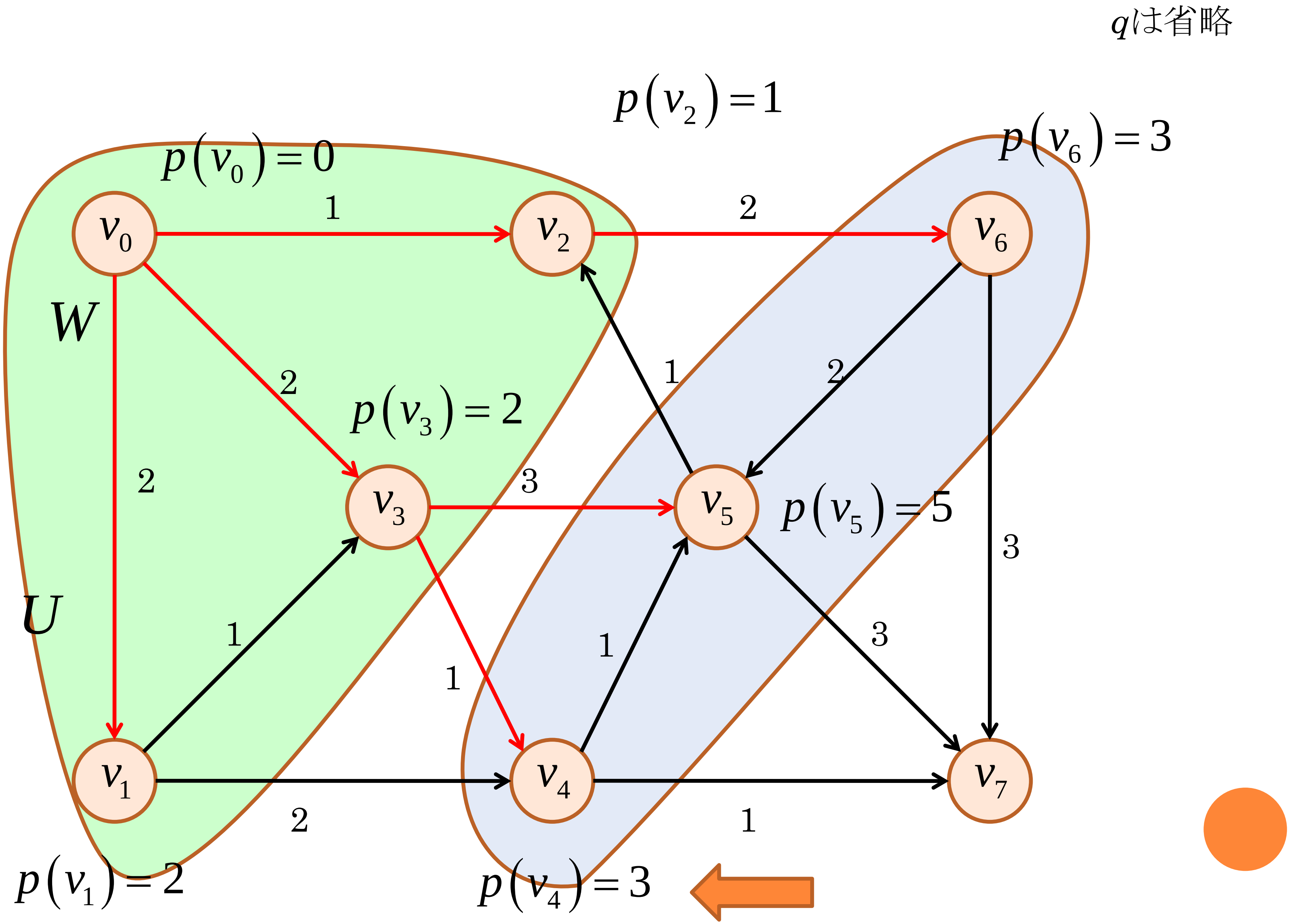


qは省略

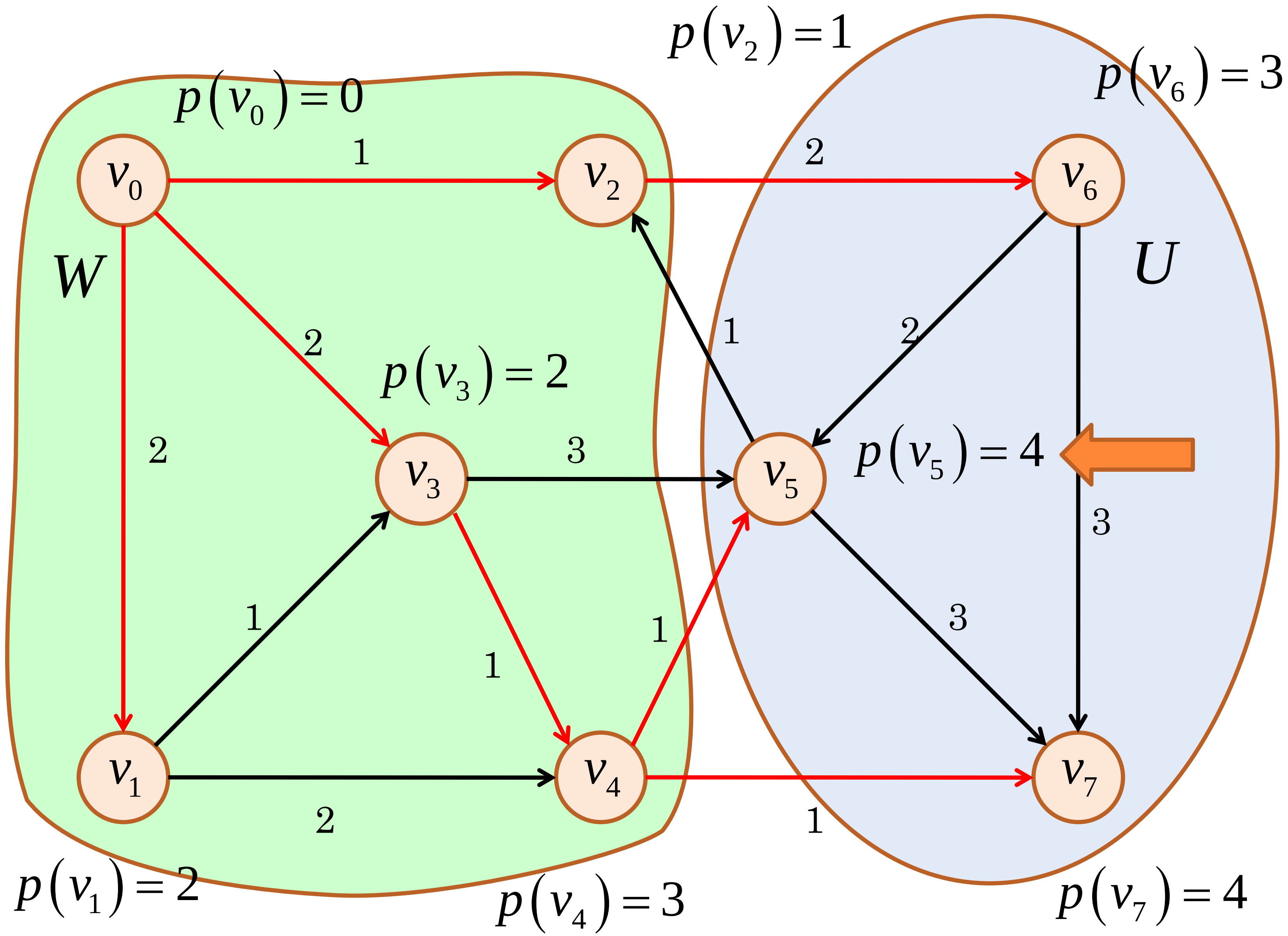

$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_0)=0$
$p(v_3)=2$
$p(v_1)=2$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
1
2
3
1
1
1
3
3
2
1



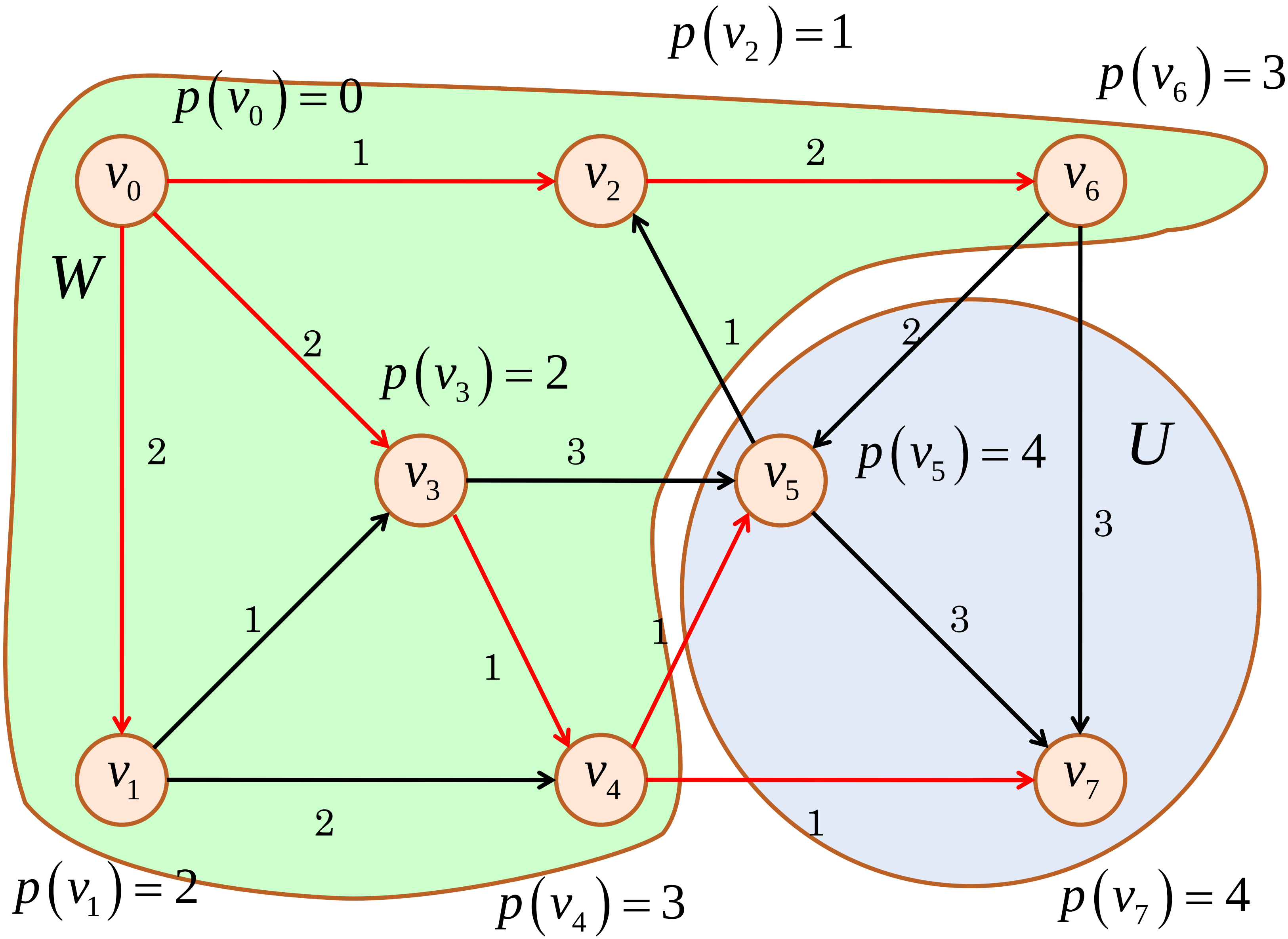
qは省略
$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_0)=0$
W
U
$p(v_3)=2$
$p(v_1)=2$
$p(v_4)=4$
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
3
1
2
3
1
1
1
3
2
1

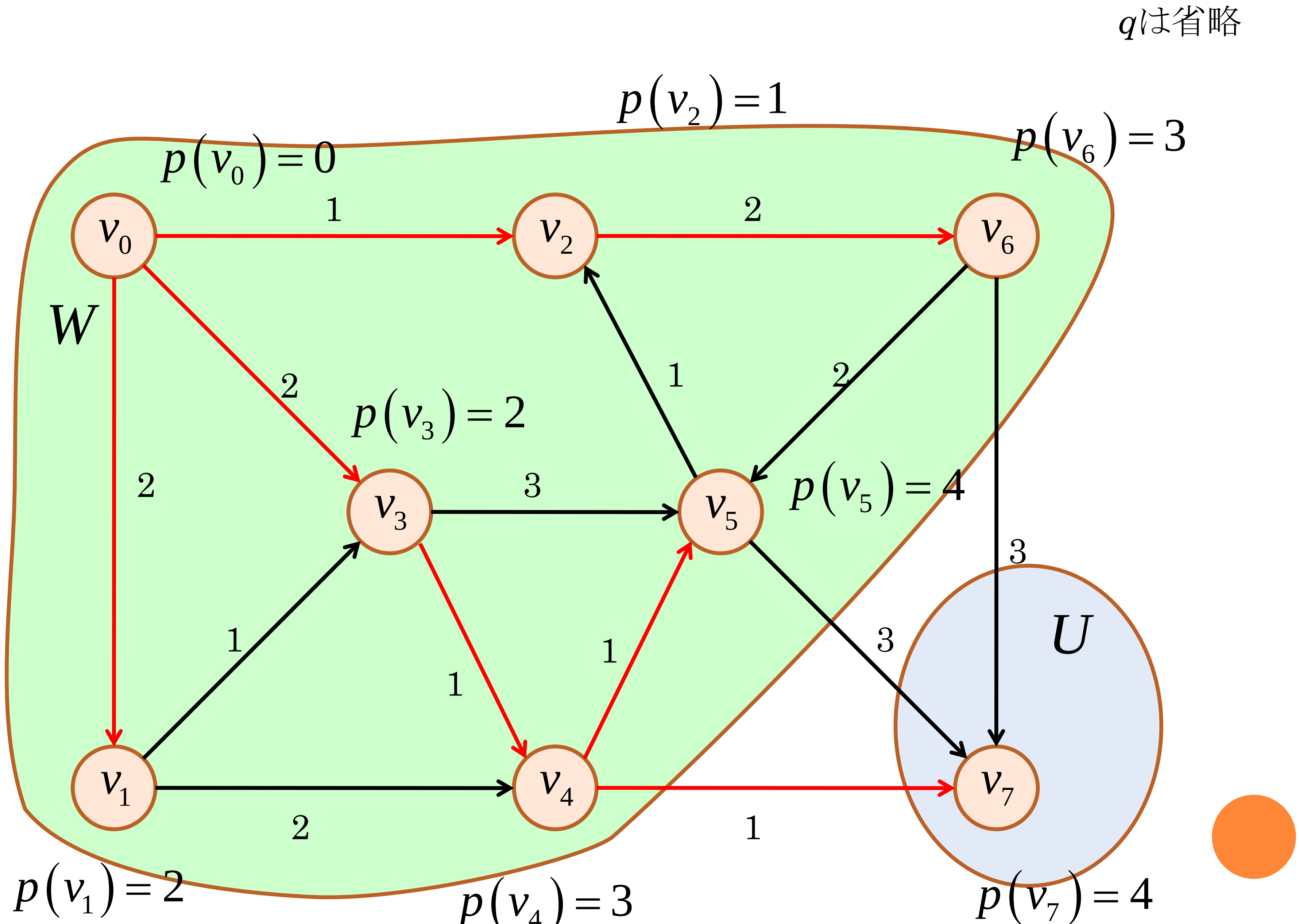

qは省略
$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_0)=0$
v_0
v_2
v_6
1
2
W
2
1
2
$p(v_3)=2$
2
3
v_3
v_5
$p(v_5)=5$
3
U
1
1
1
3
v_1
v_4
v_7
2
1
$p(v_1)=2$
$p(v_4)=3$

qは省略


$p(v_2)=1$
$p(v_0)=0$
$p(v_6)=3$
v_0
v_2
v_6
W
U
$p(v_3)=2$
$p(v_5)=4$
v_3
v_5
v_1
v_4
v_7
$p(v_1)=2$
$p(v_4)=3$
$p(v_7)=4$
1
2
2
2
1
2
2
3
3
3
1
1
1
1
2
1

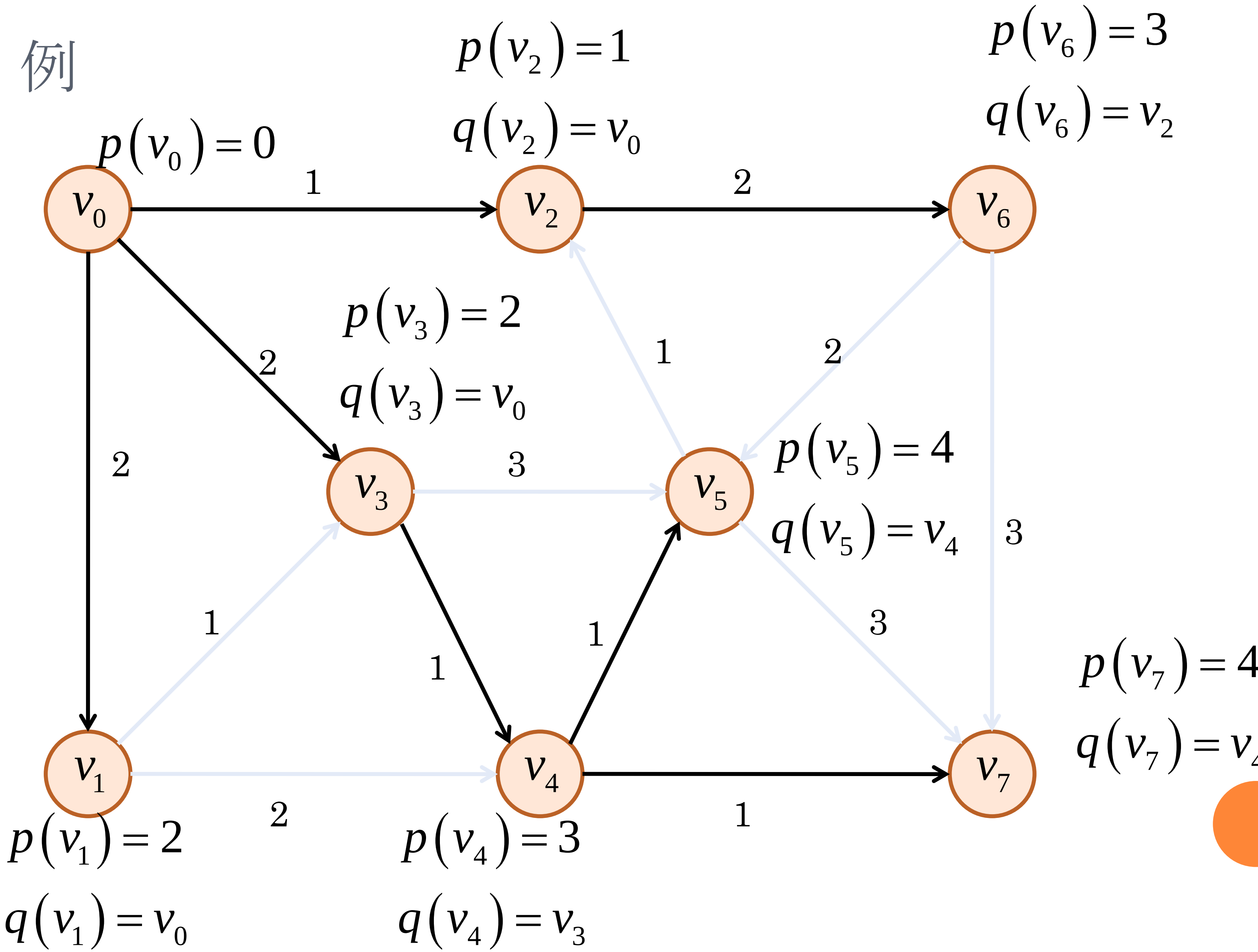
qは省略


$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_0)=0$
v_0
v_2
v_6
1
2
W
2
2
1
2
$p(v_3)=2$
v_3
3
v_5
$p(v_5)=4$
U
3
3
1
1
1
v_1
v_4
v_7
2
1
$p(v_1)=2$
$p(v_4)=3$
$p(v_7)=4$


qは省略
p(v2)=1
p(v6)=3
p(v0)=0
1
2
v0
v2
v6
W
2
1
2
p(v3)=2
2
3
v3
v5
p(v5)=4
3
1
1
1
3
U
v1
v4
v7
2
1
p(v1)=2
p(v4)=3
p(v7)=4

	注目している頂点	W	U	p	q	更新を受けた手順
0		$\varnothing$	$\{v_0\}$	$p(v_0)=0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1,v_2,v_3\}$	$p(v_1)=2$	$q(v_1)=v_0$	
				$p(v_2)=1$	$q(v_2)=v_0$	
				$p(v_3)=2$	$q(v_3)=v_0$	
2	v_2	$\{v_0,v_2\}$	$\{v_1,v_3,v_6\}$	$p(v_6)=3$	$q(v_6)=v_2$	
3	v_1	$\{v_0,v_1,v_2\}$	$\{v_3,v_4,v_6\}$	$p(v_4)=4$	$q(v_4)=v_1$	4
4	v_3	$\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$	$\{v_4,v_5,v_6\}$	$p(v_4)=3$	$q(v_4)=v_3$	
				$p(v_5)=5$	$q(v_5)=v_3$	5
5	v_4	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4\}$	$\{v_5,v_6,v_7\}$	$p(v_5)=4$	$q(v_5)=v_4$	
				$p(v_7)=4$	$q(v_7)=v_4$	
6	v_6	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_6\}$	$\{v_5,v_7\}$			
7	v_5	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$	$\{v_7\}$			
8	v_7	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$	$\varnothing$			

例


$p(v_0)=0$
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_6)=3$
$q(v_6)=v_2$
$p(v_3)=2$
$q(v_3)=v_0$
$p(v_5)=4$
$q(v_5)=v_4$
$p(v_7)=4$
$q(v_7)=v_4$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=3$
$q(v_4)=v_3$
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
3
1
2
1
1
1
3
3
2
1
3

Dijkstra法の妥当性:補題1

Dijkstra 法の実行に伴って、頂点が $v_0, v_1, v_2, \ldots$ の順に W

に登録されるとする（この頂点の名前は、元のネットワークの頂点の名前でないことに注意)。このとき、以下の関係が成り立つ。

$$0 \le p(v_0) \le p(v_1) \le p(v_2) \le \ldots \le p(v_i) \le p(v_{i+1}) \le \ldots$$

つまり、W には、距離の小さい順に追加されていく。

補題1証明

Dijkstra 法の実行中に、以下が常に成り立つことを示せばよい

つまり、W に加えられた頂点のポテンシャルは、W に加えられていないどの頂点のポテンシャルよりも小さいということである。

$$\max\left\{p(u) \middle| u \in W\right\} \leq \min\left\{p(u) \middle| u \in V \setminus W\right\}$$

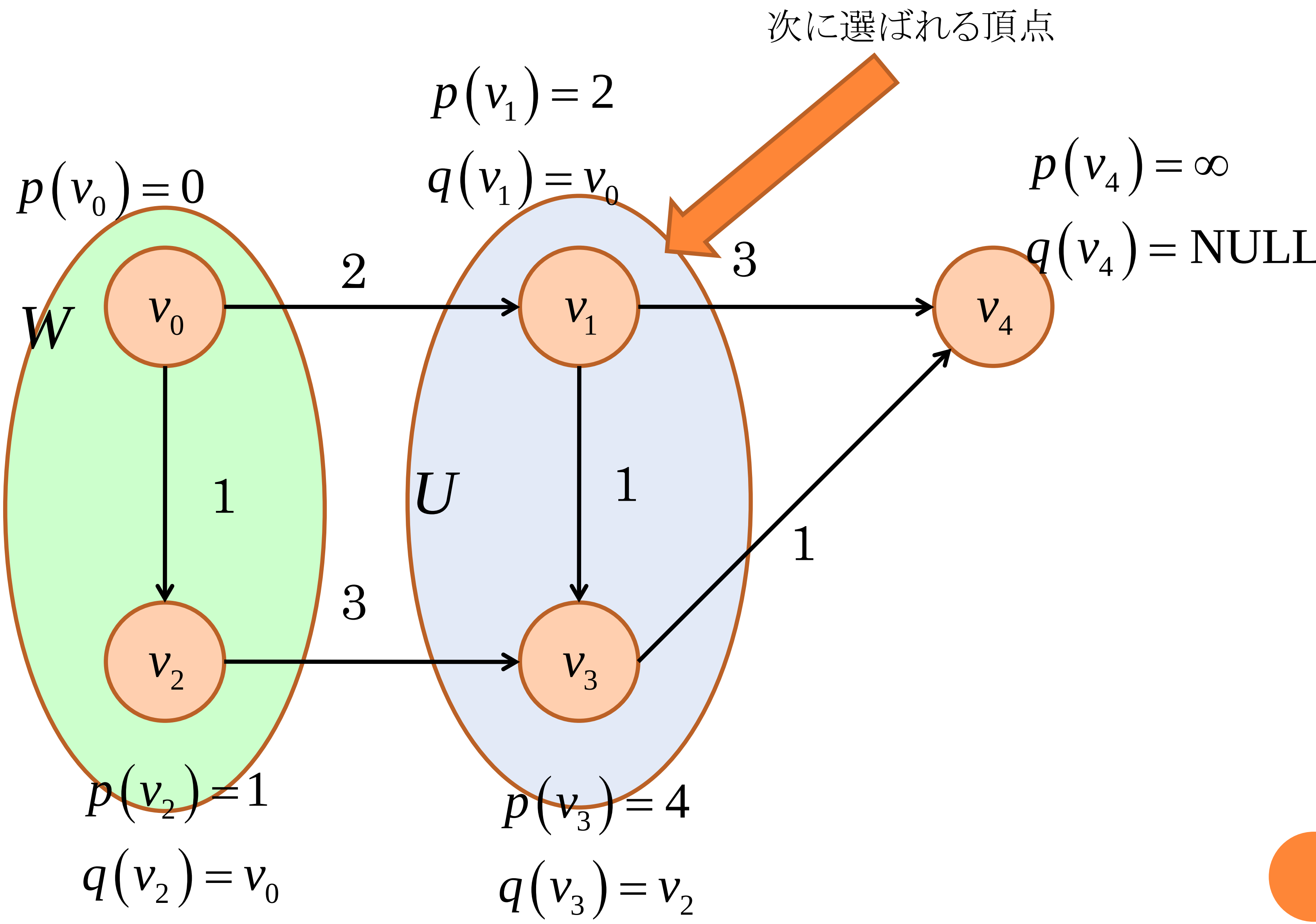
補題1証明

- 一回目のループ実行後：自明
  - $W = \{v_0\}, p(v_0) = 0$
- あるステップで成り立つと仮定する。
  - 次に選ばれる頂点を $w \in U \subseteq V \setminus W$ とする。
  - p の更新前

$$\max\{p(u) | u \in W\} \le p(w) \le \min\{p(u) | u \in V \setminus (W \cup \{w\})\}$$

  - p の更新後

$$\max\{p(u) | u \in W\} \le \min\{p(u) | u \in V \setminus W\}$$



次に選ばれる頂点
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_0)=0$
$p(v_4)=\infty$
$q(v_4)=\mathrm{NULL}$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
2
3
1
1
3
1
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=4$
$q(v_3)=v_2$

DIJKSTRA法の妥当性：補題2

1. W に始点を持つ G の弧の集合 δ^+W を考える。

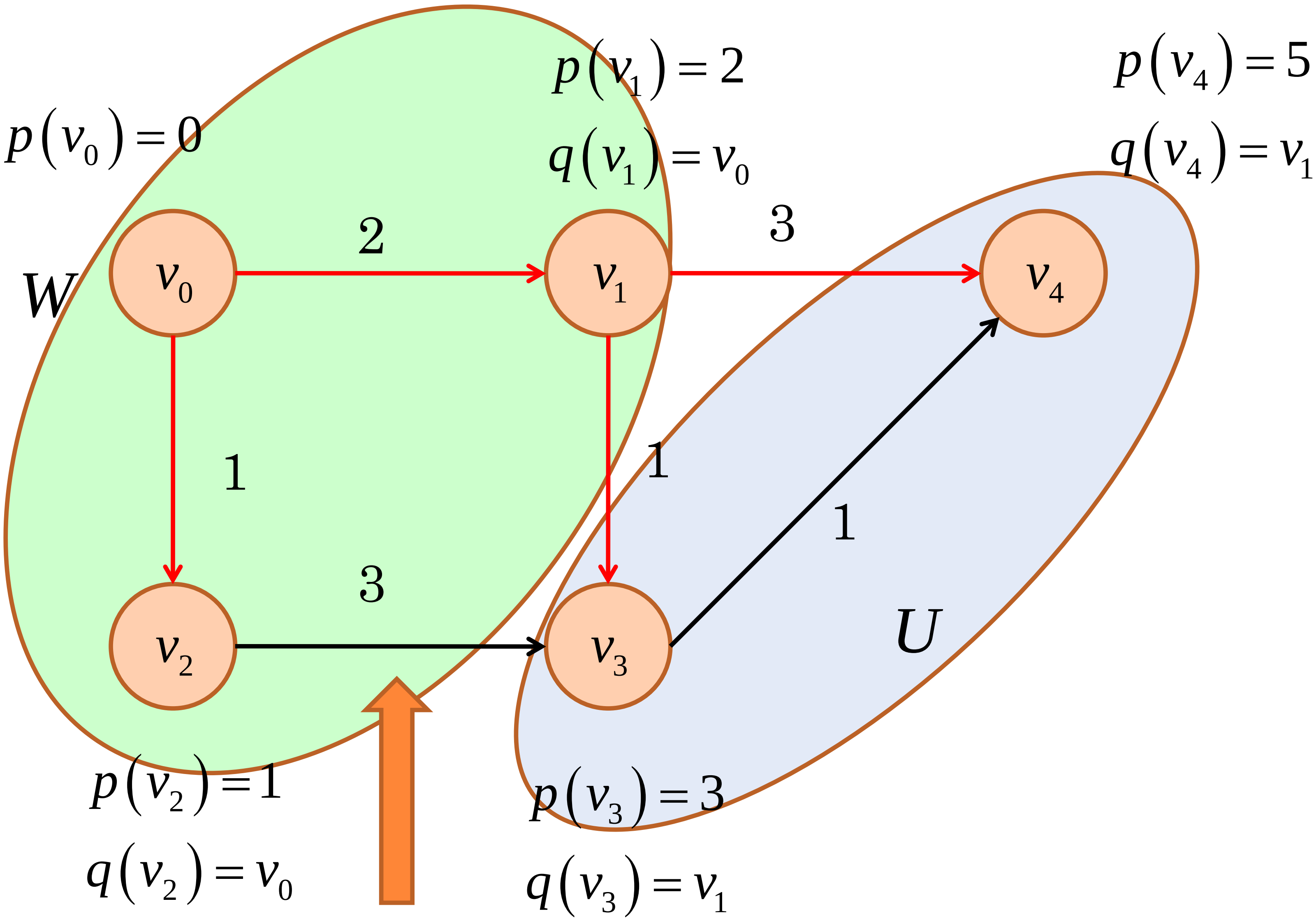
   $G_W=\left(W\cup U,\delta^+W\right)$ において

   $l_p(a)\geq 0\left(\forall a\in\delta^+W\right)$

   $l_p\left(q(u),u\right)=0\ \left(\forall u\in\left(W\cup U\right)\backslash\left\{v_0\right\}\right)$　（経路が分かっている場合）

   がなりたつ。

2. $\forall u\in\left(U\cup W\right)\backslash\left\{v_0\right\}$ に対して定まる弧 $\left(q(u),u\right)$ の全体は、v_0 を根とする有向木である。



$$l_p(v2,v3)=l(v_2,v_3)+p(v_2)-p(v_3)=3+1-3=1>0$$

補題2証明

Dijkstra 法の手順から、$a \in \delta^{+}W$ に対して、

$$p\left(\partial^{-}a\right) \leq p\left(\partial^{+}a\right) + l\left(a\right)$$

が成り立っている。従って

$$l_{p}\left(a\right) = l\left(a\right) + p\left(\partial^{+}a\right) - p\left(\partial^{-}a\right) \geq 0$$

さらに、$\forall u \in U$ に対しては

$$p\left(u\right) = p\left(q\left(u\right)\right) + l\left(q\left(u\right), u\right)$$

であり、

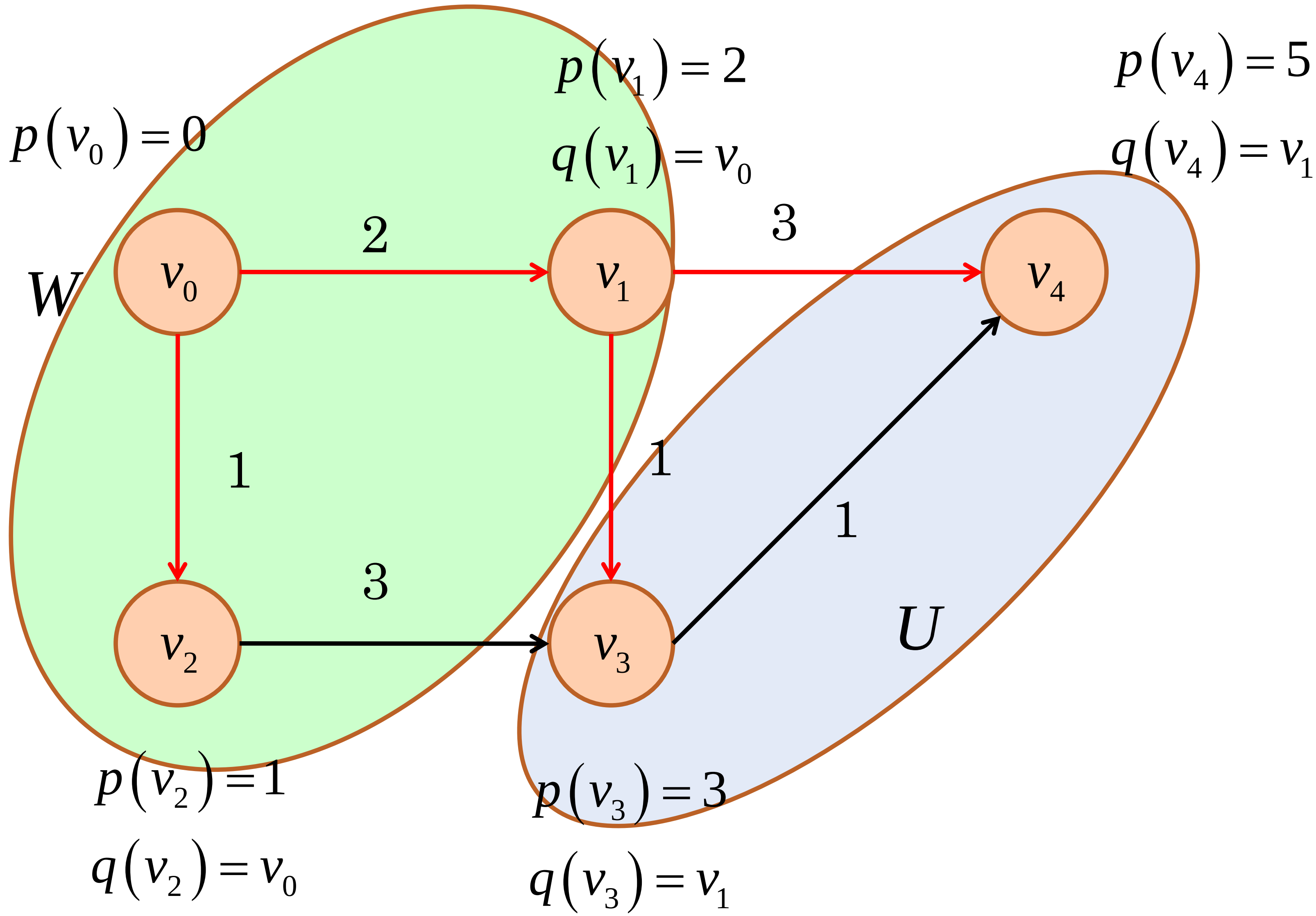
$$l_{p}\left(q\left(u\right), u\right) = l\left(q\left(u\right), u\right) + p\left(q\left(u\right)\right) - p\left(u\right) = 0$$

補題2証明

補題 1 より、W の要素は順序付けられている。

- $\forall v_i \in W$ に対して、$q\left(v_i\right)=v_j$ ならば、$j<i$ と順序付けられている。つまり、v_i に対して一意に親の頂点が定まる。
- $\forall v \in U$ に対して、$q\left(v\right)=w \in W$ によって、一意に親の頂点が定まる。

従って、v_0 を根とする有向木となる。



$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=5$
$q(v_4)=v_1$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
3
v_2
v_3
U
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$

DIJKSTRA法で最短経路が求まるのは

- 始点vから各頂点wへの経路$P(u,v)$が定まる
- その経路に沿って、$l_p(P(u,v))=0$となる

$$l\left(P\left(u,v\right)\right)=p(v)-p(u)$$

  - これが最短経路に対応する
- 他の経路$P'(u,v)$に対しては、この経路長が長い

$$l\left(P'\left(u,v\right)\right)=p(v)-p(u)+l_p\left(P'\left(u,v\right)\right)\geq p(v)-p(u)$$