



# グラフと組合せ

まとめ

# 数学的背景

## ○ 集合とその演算

- 集合の演算記号を理解していること
- 注意:  $A \setminus B$

## ○ 数学的帰納法

- 具体的に運用できること
- 「・・・」を使わずに証明する



# グラフの記述

- グラフ  $G = (V, A)$

- $V$  : 頂点の集合

- $A$  : 弧の集合

- 弧からのその始点と終点への写像

$$\partial^+ : A \rightarrow V \quad \partial^- : A \rightarrow V$$

- 頂点からそこを始点 (終点) とする弧への写像

$$\delta^+ : V \rightarrow 2^A \quad \delta^- : V \rightarrow 2^A$$



## 特殊なグラフ

- 完全グラフ (complete graphs)
- 二部グラフ (bipartite graphs)
  
- 道 (paths)
- 閉路 (circles)
  
- 木 (trees)
  
- 極大木 (spanning trees)



## 二つの探索アルゴリズム

- 深さ優先探索
  - 再帰的アルゴリズム
  - 注目している頂点
  - これまで探索を終えた頂点のリスト
- 幅優先探索
  - 探索すべき頂点の待ち行列



# 閉路探索

- Euler閉路
  - 一筆描き
  - 全ての弧を一度ずつ経由する閉路
- Hamilton閉路
  - 全ての頂点と一度ずつ経由する閉路
- 再帰的アルゴリズム
- 閉路を列挙する



# ネットワーク

- 弧に重み (実数) が定義されている
  - 距離
  - 費用
- 最適化問題
  - 最小木
  - 最短経路



# 最小木

- 弧の重みの和が最小になる極大木
- Kruskalアルゴリズム
  - 重みの小さい弧を順に採用
  - 閉路ができないように
- Jarník-Primアルゴリズム
  - 始点を定める
  - 木に取り込まれた頂点とそれ以外の頂点を結ぶ弧のうち、最小の重みの弧を追加





# 最短経路

- 二つの頂点を結ぶ距離最小の有向道
- 始点を定め、全頂点への最短経路を求める
- Dijkstraアルゴリズム
  - $p:V \rightarrow R$  : ポテンシャル関数
  - $W$  : ポテンシャルの確定した頂点の集合
  - $U$  : ポテンシャルを計算したが未確定の頂点の集合
  - $q:V \rightarrow V$  : 最短経路に沿った直前の頂点



# 最大フロー

- 弧に容量とフローが定義されている
- アルゴリズム
  1. 流量初期化
  2. 補助ネットワーク生成
  3. 層別ネットワーク生成
  4. 増加道を見つける
  5. 2へ戻る



# マッチングと被覆

- 二部グラフ
- マッチング
  - 始点・終点が異なる弧の集合
- 被覆
  - 全ての弧の始点または終点となる頂点の集合
- 最大マッチングと最小被覆

