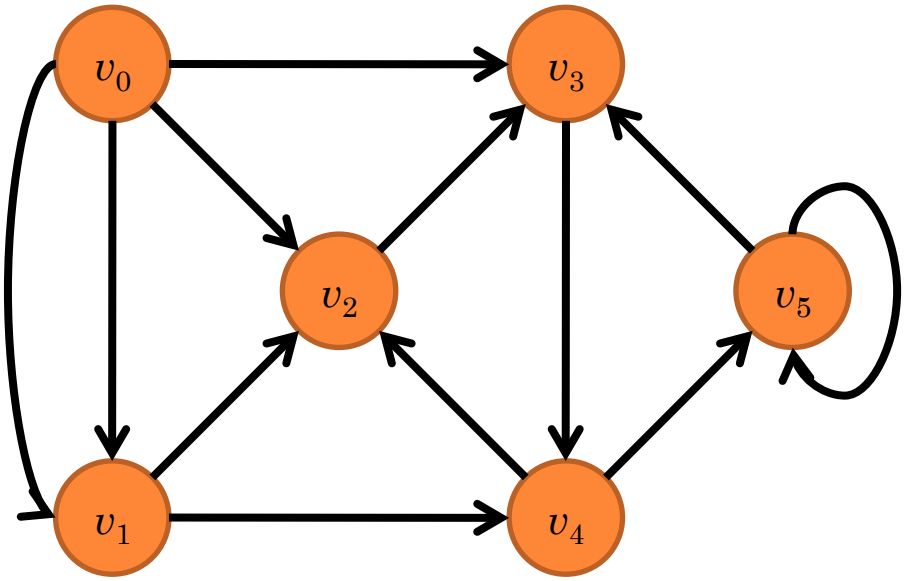
グラフを記述するための
データ構造

グラフを記述するには何が必要か

- 探索問題を考えよう
  - 最短経路
  - 閉路探索
  - 頂点の数が多くなると、全体の情報を一度に扱えない
- アルゴリズム・プログラムで扱えるようにするには
  - 局所的(ある頂点から出る弧、弧の両端の頂点)な視点
  - 再帰的(recursive)手法が素直な方法

頂点と弧の関連を調べる

- 頂点から弧を経由して移動するための情報
  - 頂点を始点とする弧の一覧
- 弧の両端の頂点を知るための情報
  - 弧からその両端の頂点を得る
  - 弧の終点を得て、次のステップへ進む



行列を使った記述方法

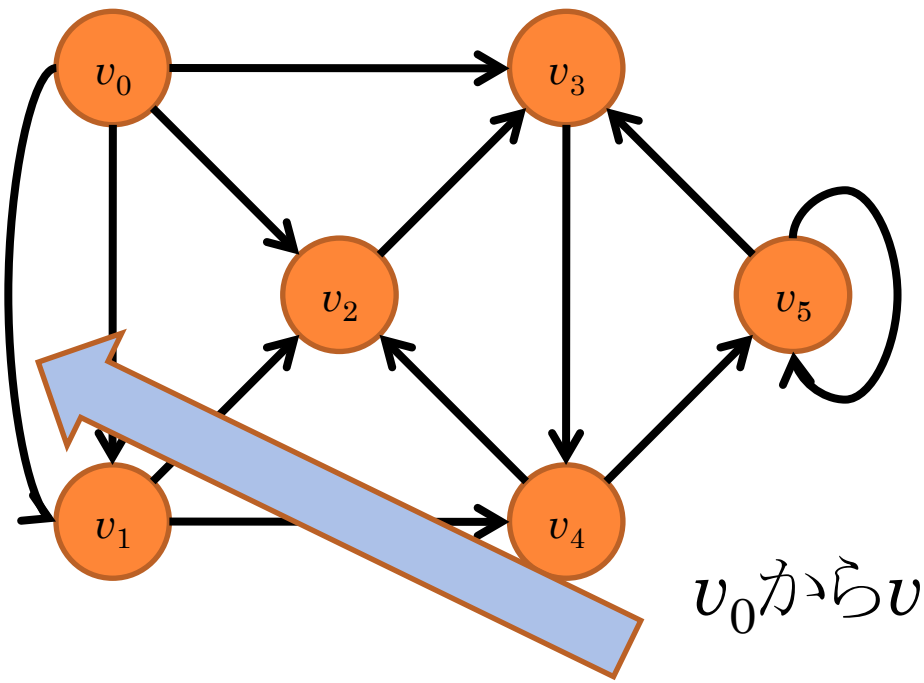
- 伝統的手法
- 隣接行列
  - 頂点の間の連結状況
- 接続行列
  - 弧と頂点の関連付け

- 利点
  - 簡潔な表現
  - 代数的取扱いができる
- 問題点
  - 無駄が多い
  - 不足する情報あり

隣接行列 (Adjacency Matrix)

- 各要素：頂点間の連結の有無を示す：向きに注意

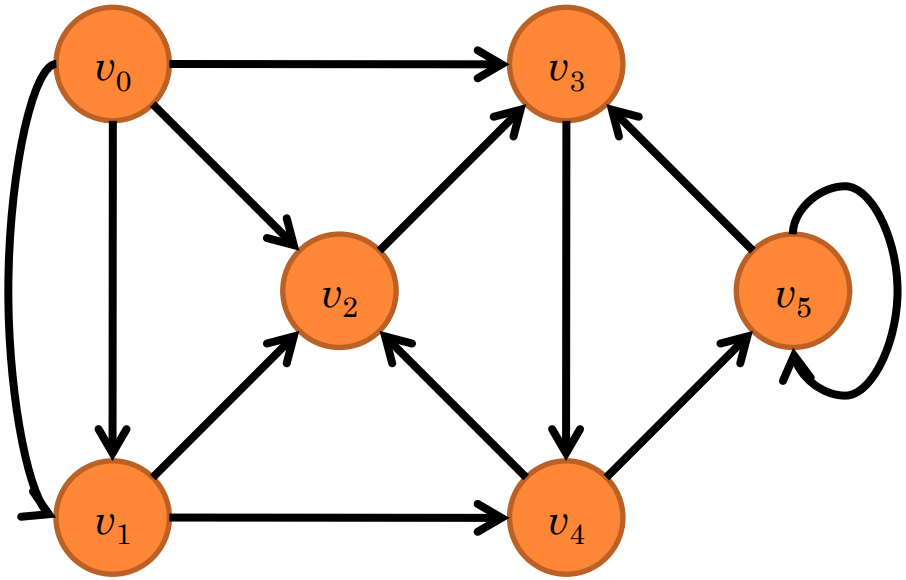
$$\partial^{+} a_i = v_j, \partial^{-} a_i = v_k \rightarrow \Gamma_{kj} = 1$$



$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

v_0からv_1への並列弧の表現？

隣接行列の活用:道の数



$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ \boxed{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

複数の道の存在

$v_0 \to v_4$

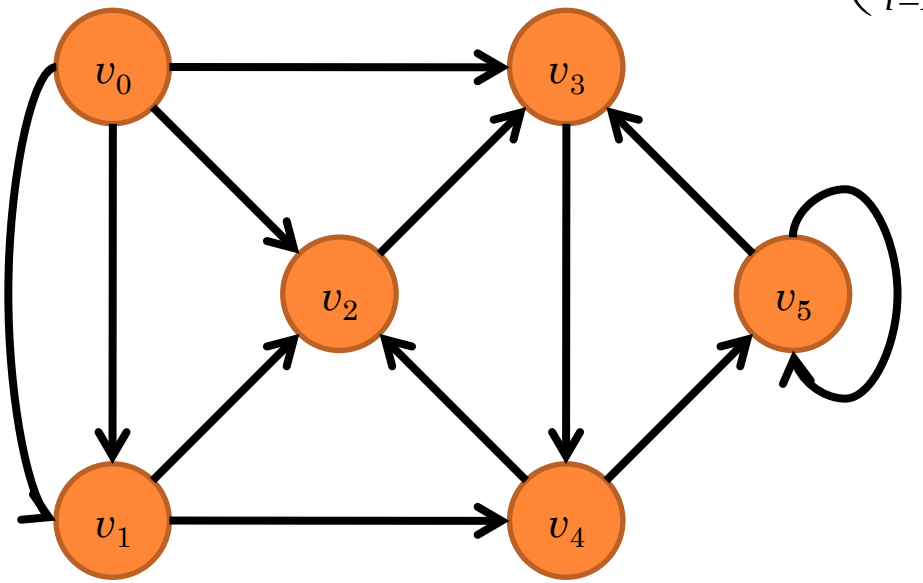
$v_4 \to v_3$

隣接行列の活用：道の有無

- N個の頂点からなるグラフ
  - 頂点jからi への道の存在

$$\left(\sum_{l=1}^{N-1}\Gamma^{l}\right)_{ij}=\begin{cases}>0 & \text{道が存在}\\ 0 & \text{道が無い}\end{cases}$$

隣接行列の活用



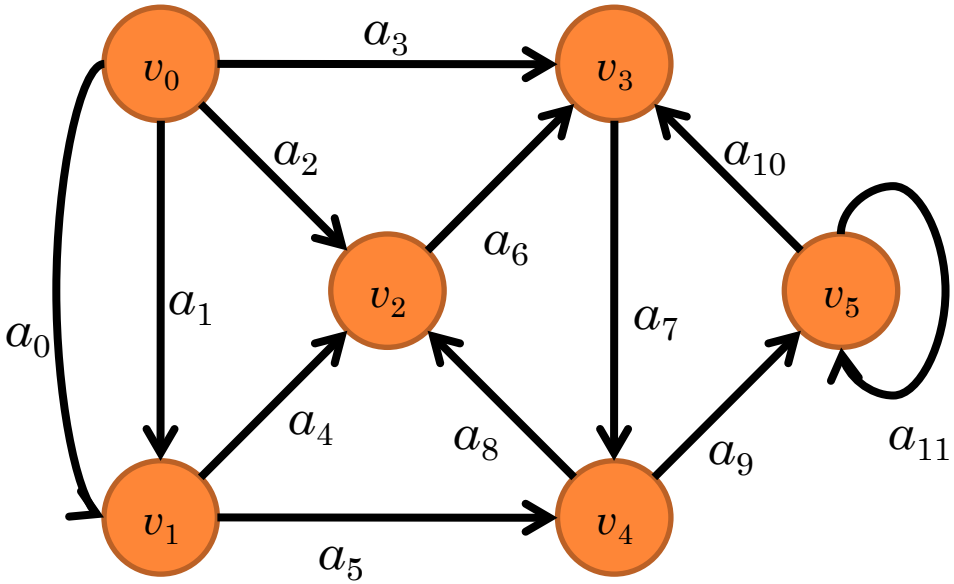
$$\left(\sum_{l=1}^{5}\Gamma^{l}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 15 & 7 & 4 & 4 & 9 & 10 \\ 12 & 5 & 3 & 4 & 4 & 6 \\ 13 & 8 & 3 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

接続行列(Incidence Matrix)

- 弧と頂点の関連付け

$$D(v,a)=\begin{cases}+1 & \text{if } \partial^{+}a=v\wedge\partial^{-}a\neq v\\ -1 & \text{if } \partial^{-}a=v\wedge\partial^{+}a\neq v\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

接続行列の例



孤立弧の情報が無い

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

接続行列の活用:グラフ上の定常的流れ

- 弧集合上の関数:流れの定義

$$\varphi : A \to R$$

- 定常的な流れ
  - 各頂点への流れ込む量と流れ出る量が釣り合う

$$(D\varphi)_v = \sum_a D(v,a)\varphi(a) = 0$$

行列表現の利点と問題点

- 演算という観点では便利
  - 道の有無、定常的な流れ
  - 大規模なグラフの性質

- ほとんどの要素がゼロ
  - 情報量が少ない：sparse (薄い、貧弱な)
  - 大きな記憶容量が必要
- 接続行列は孤立弧を表現出来ない
- 弧や頂点に属性が付く場合は、データ構造として対応できない

もっと柔軟な方法:リスト構造

- 柔軟なデータ構造:リスト構造
  - サイズが可変
  - 必要なデータだけを保持
  - リストの要素にもデータ構造を保持できる:属性など
- 柔軟なアルゴリズム:再帰
  - 図としてのグラフの探索を素直に実装

リスト表現の利点

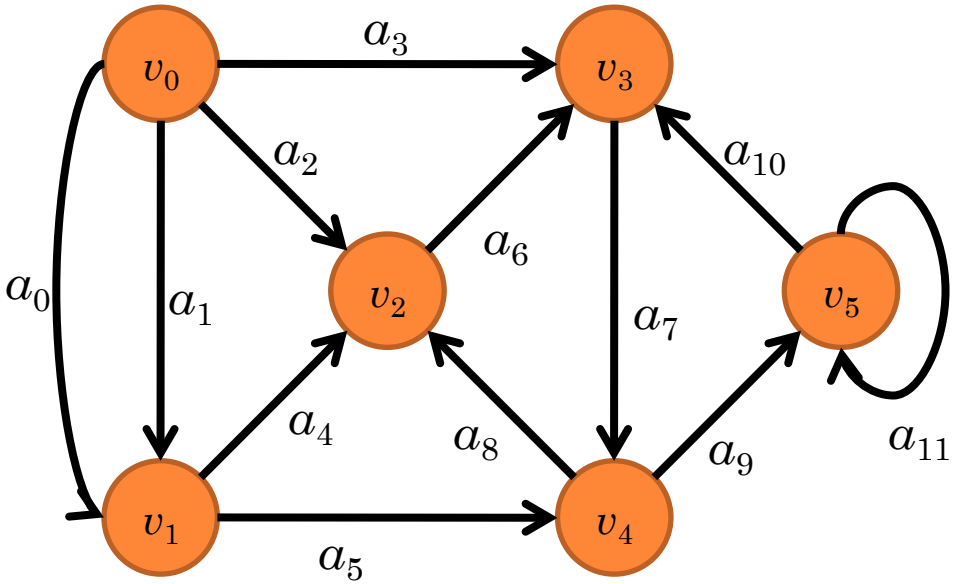
- 現代的なプログラミング言語はもっと多様なデータ構造が扱えるではないか
  - 柔軟なデータ構造とアルゴリズム
- 各頂点を始点とする弧の一覧(リスト)を作成する
  - 必要な分だけの情報
  - 並列弧・孤立弧が両方とも扱える
- 弧は始点と終点の情報を知っている

例：再帰的探索

頂点vに関する関数

```
f(v){
   forall(vを始点とする弧a){
         if(終了条件){return}
         頂点wは弧aの終点
         f(w)
   }
}
```

グラフの探索例



$$\delta^+ v_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\} \qquad \delta^+ v_1 = \{a_4, a_5\}$$
$$\delta^+ v_2 = \{a_6\} \qquad \delta^+ v_3 = \{a_7\}$$
$$\delta^+ v_4 = \{a_8, a_9\} \qquad \delta^+ v_5 = \{a_{10}, a_{11}\}$$

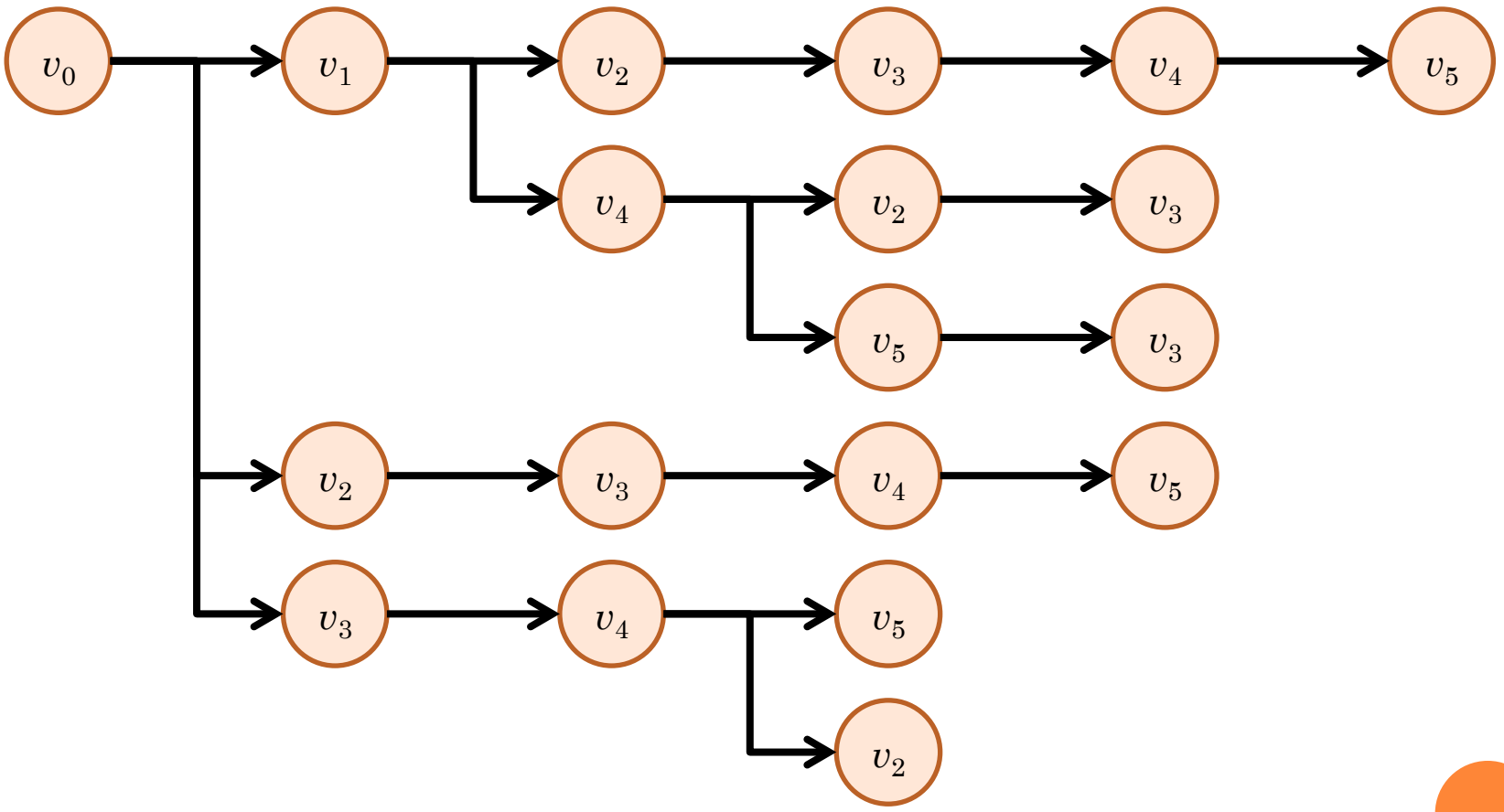
$$\partial^+ a_0 = v_0 \quad \partial^- a_0 = v_1 \quad \partial^+ a_1 = v_0 \quad \partial^- a_1 = v_1$$
$$\partial^+ a_2 = v_0 \quad \partial^- a_2 = v_2 \quad \partial^+ a_3 = v_0 \quad \partial^- a_3 = v_3$$
$$\partial^+ a_4 = v_1 \quad \partial^- a_4 = v_2 \quad \partial^+ a_5 = v_1 \quad \partial^- a_5 = v_4$$
$$\partial^+ a_6 = v_2 \quad \partial^- a_6 = v_3 \quad \partial^+ a_7 = v_3 \quad \partial^- a_7 = v_4$$
$$\partial^+ a_8 = v_4 \quad \partial^- a_8 = v_2 \quad \partial^+ a_9 = v_4 \quad \partial^- a_9 = v_9$$
$$\partial^+ a_{10} = v_5 \quad \partial^- a_{10} = v_3 \quad \partial^+ a_{11} = v_5 \quad \partial^- a_{11} = v_5$$

例：V_0を始点とする道

$L \subseteq V$ ：道が経由する頂点

$$
\begin{aligned}
&\text{道探索}\left(v \in V, L\right)\{\\
&\quad \text{forall}\left(a \in \delta^{+} v\right)\{\\
&\qquad w = \partial^{-} a\\
&\qquad \text{if}\left(w \notin L\right)\{\\
&\qquad\quad L \leftarrow L \cup \{w\}\\
&\qquad\quad \text{道探索}\left(w, L\right)\\
&\qquad\quad L \leftarrow L \setminus \{w\}\\
&\qquad \}\\
&\quad \}\\
&\}
\end{aligned}
$$

探索結果の木表記



グラフ作図ツールPAJEKの紹介

- http://pajek.imfm.si/doku.php
- de Nooy, Mrvar and Batageli「Pajekを活用した社会ネットワーク分析」(東京電機大学出版局, 2009)

```
*Vertices 10
1 “v1” 0.1 0.1 0.1
2 “v2” 0.2 0.1 0.3
…
10 “v10” 0.5 0.3 0.1
*Arcs
1 3 1
2 1 1
2 2 2
3 1 1
…
10 2 9
```

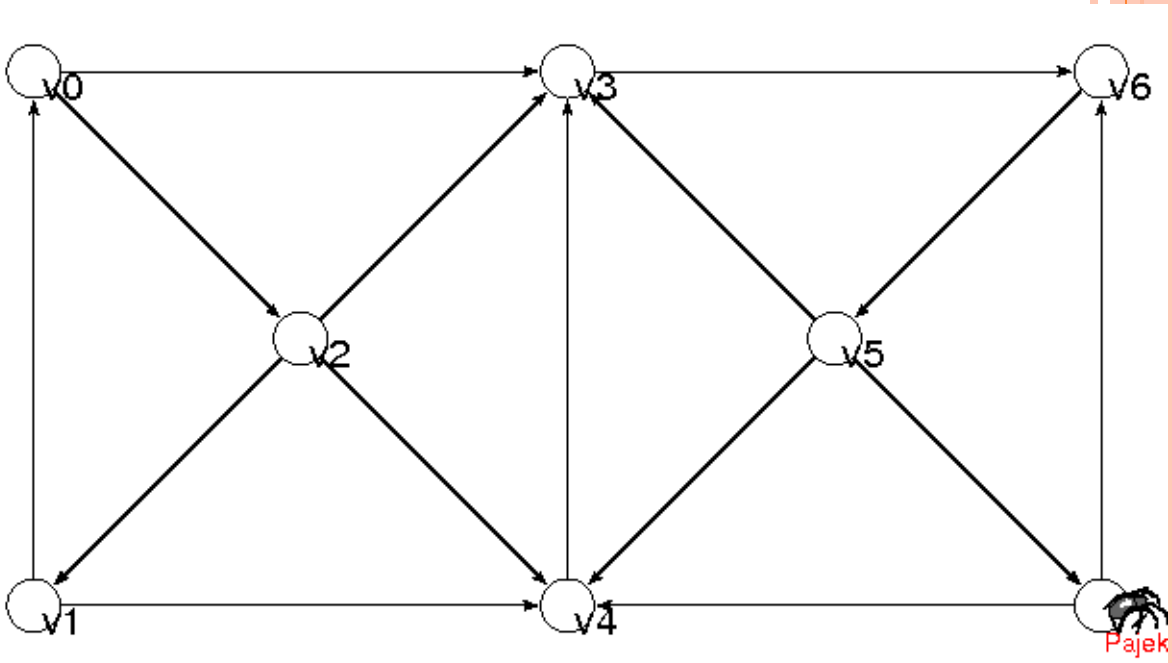
頂点数が10

各頂点の名前、3次元座標

弧の情報。無向の場合はEdgeと書く

始点 終点 重み

例

```
*Vertices 8
1 "v0" 0.1 0.1 0.
2 "v1" 0.1 0.5 0.
3  "v2" 0.3 0.3 0.
4 "v3" 0.5 0.1 0.
5 "v4" 0.5 0.5 0.
6 "v5" 0.7 0.3 0.
7 "v6" 0.9 0.1 0.
8 "v7" 0.9 0.5 0.
```

```
*Arcs
1 3 1
1 4 1
2 1 1
2 5 1
3 2 1
3 4 1
3 5 1
4 7 1
5 4 1
6 4 1
6 5 1
6 8 1
7 6 1
8 5 1
8 7 1
```