2013 年度「グラフと組合せ」定期試験

1. 数学的帰納法

自然数 n に対する以下の等式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。途中の式変形も示し（全てでなくてもよい)、どのような計算を行っているかを示すこと。

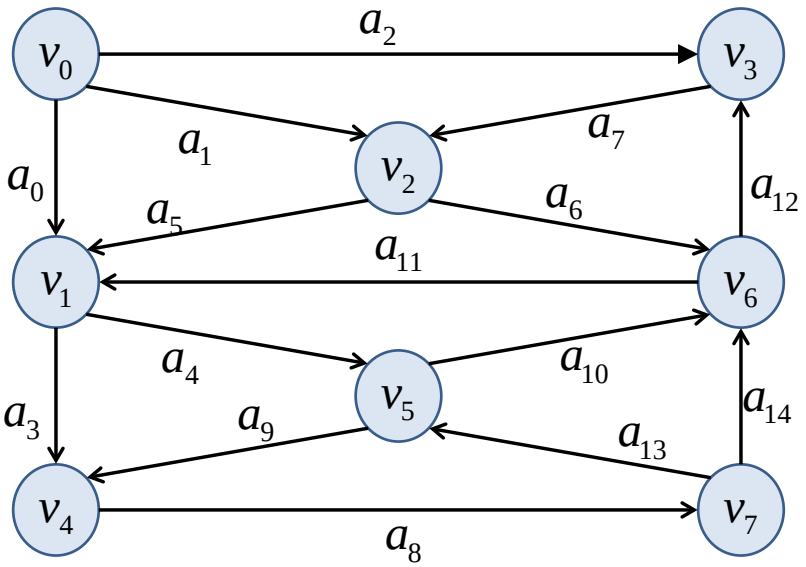
$$\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1\right)^2 = \frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)$$

2. 幅優先探索

始点を r とする幅優先探索のアルゴリズムを右に示す。L は探索の終わった頂点の集合、Q はその後の探索の起点を保持する待ち行列である。なお、アルゴリズムには、デバッグ行「L と Q を出力」が含まれている。また、「forall($a \in \delta^+ v$)」では、弧の番号の小さいほうから調べるものとする。

```
L = ∅
Q = {r}
while(Q ≠ ∅){
        v = Qの先頭の取り出し
        forall(a ∈ δ⁺v){
                w = ∂⁻a
                if( w ∉ L && w ∉ Q ){
                        Qへwを追加
                }
        }
        L ← L ∪ {v}
        L と Q を出力
}
```

以下のグラフに対して、v_0 を始点とした幅優先探索を実行することを考える。



2.1. 探索の実行

アルゴリズム中のデバッグ行「L と Q を出力」の結果を以下のような表で示しなさい。なお、Q は待ち行列であることから、その順番にも意味があることに注意する。

L	Q
$\{v_0\}$	$[v_1, v_2, v_3]$
$\{v_0, v_1\}$	$[v_2, v_3, v_4, \mathrm{v}_5]$

2.2. 探索木の表示

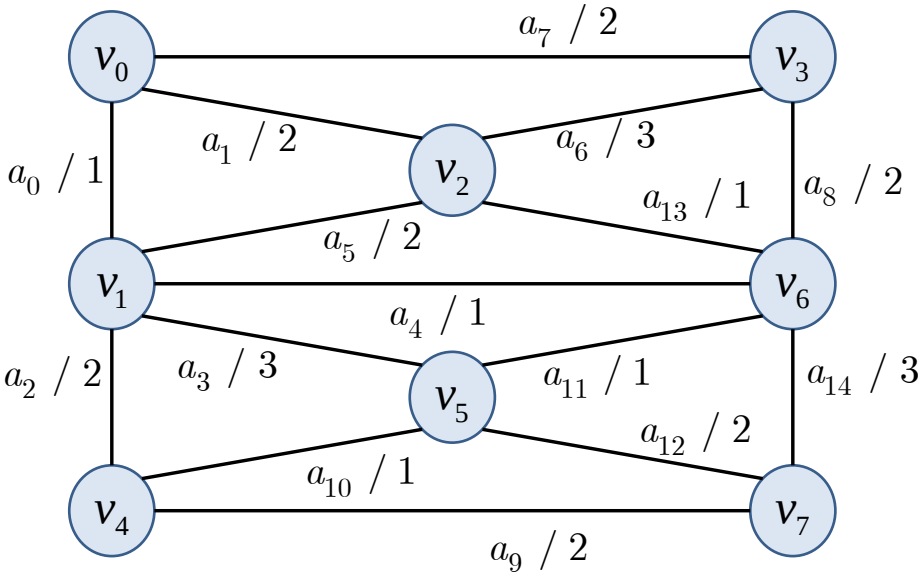
探索によって得られた探索木を図示しなさい。

3. Jarník-Prim の最小木探索

各弧 $a \in A$ に重み $w(a)$ が定義された無向ネットワークに対して、全ての弧を連結する極大木の内、重みの総和を最小化する問題を最小木問題と呼び、その一つの方法が Jarník-Prim の方法である。そのアルゴリズムを右に示す。なお、デバッグ行「a と U を出力」を含んでいる。

```
任意の頂点 v ∈ V を選び、U = {v}、T = ∅ とする
While (U ≠ V ){
        U と V \ U を結ぶ弧のうち最小の重みのものを a とする
        a の V \ U 側の端点を w とする
        U ← U ∪ {w}
        T ← T ∪ {a}
        a と U を出力
}
```

このアルゴリズムを、以下のネットワークに対して実行する。ただし、始点は v_0 とする。また、図中のでは、「a_0 / 1 」は、弧 a_0 の重みが 1 であることを表している。なお、アルゴリズムを実行する際に、同じ重みの弧が複数ある場合には、弧の番号の小さいほうを優先することとする。



3.1. 探索の実行

アルゴリズム中のデバッグ行「a と U を出力」の結果を以下のような表で示しなさい。

U	a
$\{v_0\}$	
$\{v_0, v_1\}$	a_0

3.2. 実行結果

得られた最少木を図示しなさい。