2013 年度「グラフと組合せ」定期試験

解答例

1. 数学的帰納法

自然数 n に対する以下の等式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。途中の式変形も示し（全てでなくてもよい)、どのような計算を行っているかを示すこと。

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1\right)^2 = \frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)$$

解答例

- $n=1$ の場合、以下のように等号が成り立つ。

$$\text{左辺} = \sum_{k=1}^{1}\left(2k-1\right)^2 = \left(2-1\right)^2 = 1$$
$$\text{右辺} = \frac{1}{3}\times 1\times\left(4-1\right) = 1$$

- ある n に対して等号が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\left(2k-1\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left(2k-1\right)^2 + \left(2n+2-1\right)^2 = \frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)+\left(2n+1\right)^2\\ &= \frac{1}{3}\left[4n^3+12n^2+11n+3\right] = \frac{1}{3}\left(n+1\right)\left(4n^2+8n+3\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(n+1\right)\left(4\left(n+1\right)^2+1\right)\end{aligned}$$

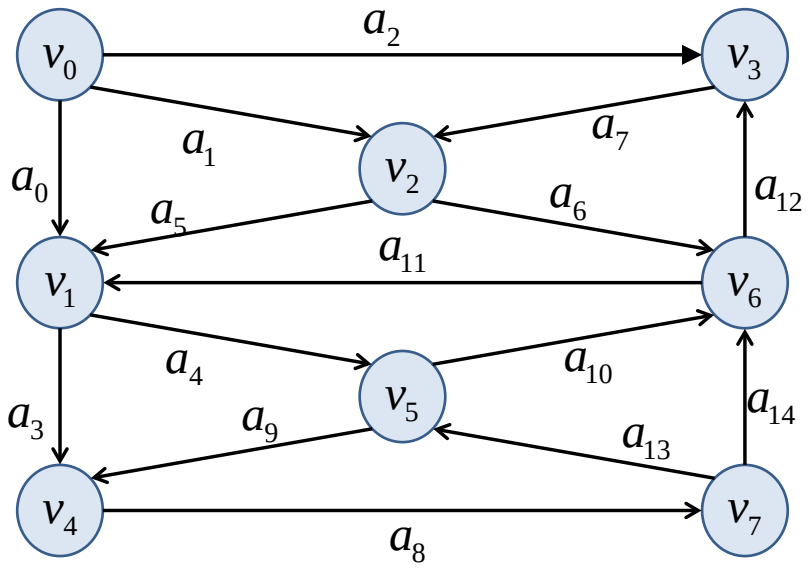
従って、$n+1$ に対しても等式が成り立つ。よって、数学的帰納法により、任意の自然数に対して等式が成り立つことが証明できる。

2. 幅優先探索

始点を r とする幅優先探索のアルゴリズムを右に示す。L は探索の終わった頂点の集合、Q はその後の探索の起点を保持する待ち行列である。なお、アルゴリズムには、デバッグ行「L と Q を出力」が含まれている。また、「forall($a \in \delta^+ v$)」では、弧の番号の小さいほうから調べるものとする。

```
L = ∅
Q = {r}
while(Q ≠ ∅){
        v = Qの先頭の取り出し
        forall(a ∈ δ⁺v){
                w = ∂⁻a
                if( w ∉ L  &&  w ∉ Q ){
                        Qへwを追加
                }
        }
        L ← L ∪ {v}
        L と Q を出力
}
```

以下のグラフに対して、v_0 を始点とした幅優先探索を実行することを考える。



2.1. 探索の実行

アルゴリズム中のデバッグ行「L と Q を出力」の結果を以下のような表で示しなさい。なお、Q は待ち行列であることから、その順番にも意味があることに注意する。

L	Q
$\left\{ v_0 \right\}$	$\left[v_1, v_2, v_3 \right]$
$\left\{ v_0, v_1 \right\}$	$\left[v_2, v_3, v_4, v_5 \right]$

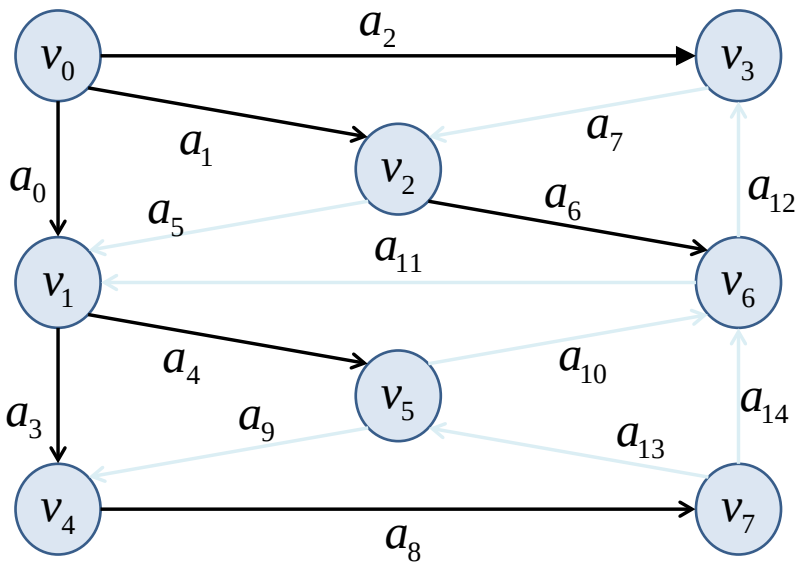
解答例

L	Q
$\left\{ v_0 \right\}$	$\left[v_1, v_2, v_3 \right]$
$\left\{ v_0, v_1 \right\}$	$\left[v_2, v_3, v_4, v_5 \right]$
$\left\{ v_0, v_1, v_2 \right\}$	$\left[v_3, v_4, v_5, v_6 \right]$
$\left\{ v_0, v_1, v_2, v_3 \right\}$	$\left[v_4, v_5, v_6 \right]$
$\left\{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 \right\}$	$\left[v_5, v_6, v_7 \right]$
$\left\{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \right\}$	$\left[v_6, v_7 \right]$
$\left\{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \right\}$	$\left[v_7 \right]$
$\left\{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \right\}$	$\varnothing$

2.2. 探索木の表示

探索によって得られた探索木を図示しなさい。

解答例



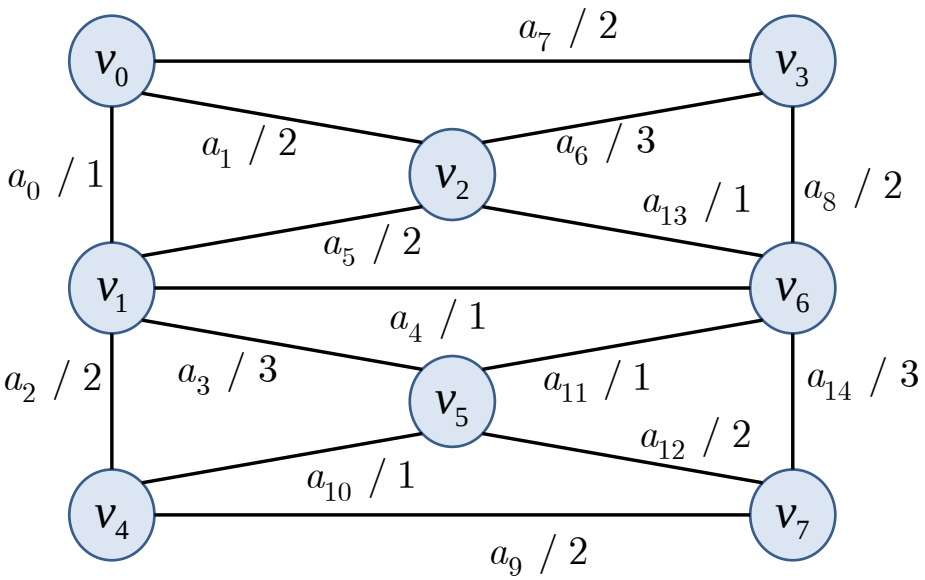
3. Jarník-Prim の最小木探索

各弧 $a \in A$ に重み $w(a)$ が定義された無向ネットワークに対して、全ての弧を連結する極大木の内、重みの総和を最小化する問題を最小木問題と呼び、その一つの方法が Jarník-Prim の方法である。そのアルゴリズムを右に示す。なお、デバッグ行「a と U を出力」を含んでいる。

任意の頂点 $v \in V$ を選び、$U = \{v\}$、$T = \varnothing$ とする
While ($U \neq V$){
　　U と $V \setminus U$ を結ぶ弧のうち最小の重みのものを a とする
　　a の $V \setminus U$ 側の端点を w とする
　　$U \leftarrow U \cup \{w\}$
　　$T \leftarrow T \cup \{a\}$
　　a と U を出力
}

このアルゴリズムを、以下のネットワークに対して実行する。ただし、始点は v_0 とする。また、図中のでは、「a_0 / 1 」は、弧 a_0 の重みが 1 であることを表している。なお、アル

ゴリズムを実行する際に、同じ重みの弧が複数ある場合には、弧の番号の小さいほうを優先することとする。



3.1. 探索の実行

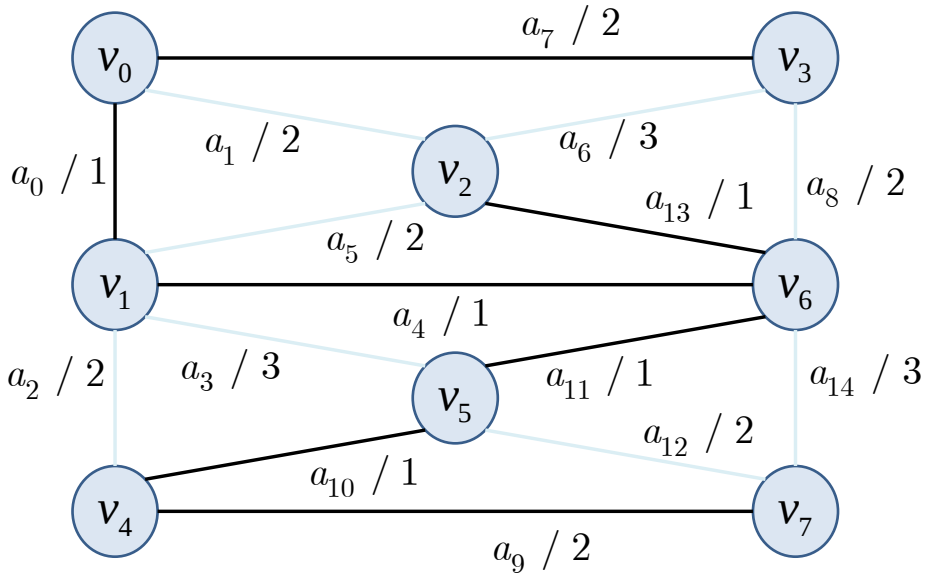
アルゴリズム中のデバッグ行「a と U を出力」の結果を以下のような表で示しなさい。

U	a
$\{v_0\}$	
$\{v_0, v_1\}$	a_0

解答例

U	a
$\{v_0\}$	
$\{v_0, v_1\}$	a_0

$\{v_0, v_1, v_6\}$	a_4
$\{v_0, v_1, v_6, v_5\}$	a_{11}
$\{v_0, v_1, v_6, v_5, v_4\}$	a_{10}
$\{v_0, v_1, v_6, v_5, v_4, v_2\}$	a_{13}
$\{v_0, v_1, v_6, v_5, v_4, v_2, v_3\}$	a_7
$\{v_0, v_1, v_6, v_5, v_4, v_2, v_3, v_7\}$	a_9

3.2. 実行結果

得られた最少木を図示しなさい。