# 「グラフと組み合わせ」課題 1(解答例)

2013/4/8

## 1 集合の演算

二つの集合

$$X = \{x | x \in N, x \le 8\}$$
$$Y = \{x | x = 2n + 1, n \in N, n \le 4\}$$

について、以下の集合を求め、要素を列挙することで答えなさい。

- 1.  $X \cup Y$
- 2.  $X \cap Y$
- 3.  $X \setminus Y$

### 解答例

最初にXとYを要素の列挙によって表現する。

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$Y = \{3, 5, 7, 9\}$$

1.  $X \cup Y$ 

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

4.  $X \cap Y$ 

$$X \cap Y = \big\{3,5,7\big\}$$

5.  $X \setminus Y$ 

$$X \setminus Y = \{1, 2, 4, 6, 8\}$$

## 2 数学的帰納法

自然数 n に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=0}^{n} k (k+1)^{2} = \frac{1}{12} n (n+1) (n+2) (3n+5)$$

#### 解答例

● n=1の場合

LHS=
$$\sum_{k=0}^{1} k (k+1)^2 = 0.1^2 + 1.2^2 = 4$$
  
RHS= $\frac{1}{12}1.2.3.8 = 4$ 

従って等号が成り立つ。

● ある*n*に対して等号が成り立つと仮定する。

$$\sum_{k=0}^{n+1} k (k+1)^2 = \sum_{k=0}^{n} k (k+1)^2 + (n+1)(n+2)^2$$

$$= \frac{1}{12} n (n+1)(n+2)(3n+5) + (n+1)(n+2)^2$$

$$= \frac{1}{12} (n+1)(n+2) \{ n (3n+5) + 12(n+2) \}$$

$$= \frac{1}{12} (n+1)(n+2)(3n^2 + 17n + 24)$$

$$= \frac{1}{12} (n+1)(n+2)(n+3)(3(n+1)+5)$$

つまり、n+1に対しても成り立つことがわかる。従って、任意の自然数nに対して成り立つ。