

フローとカット
FLOW AND CUT

ネットワーク中のフロー (流量、FLOW)

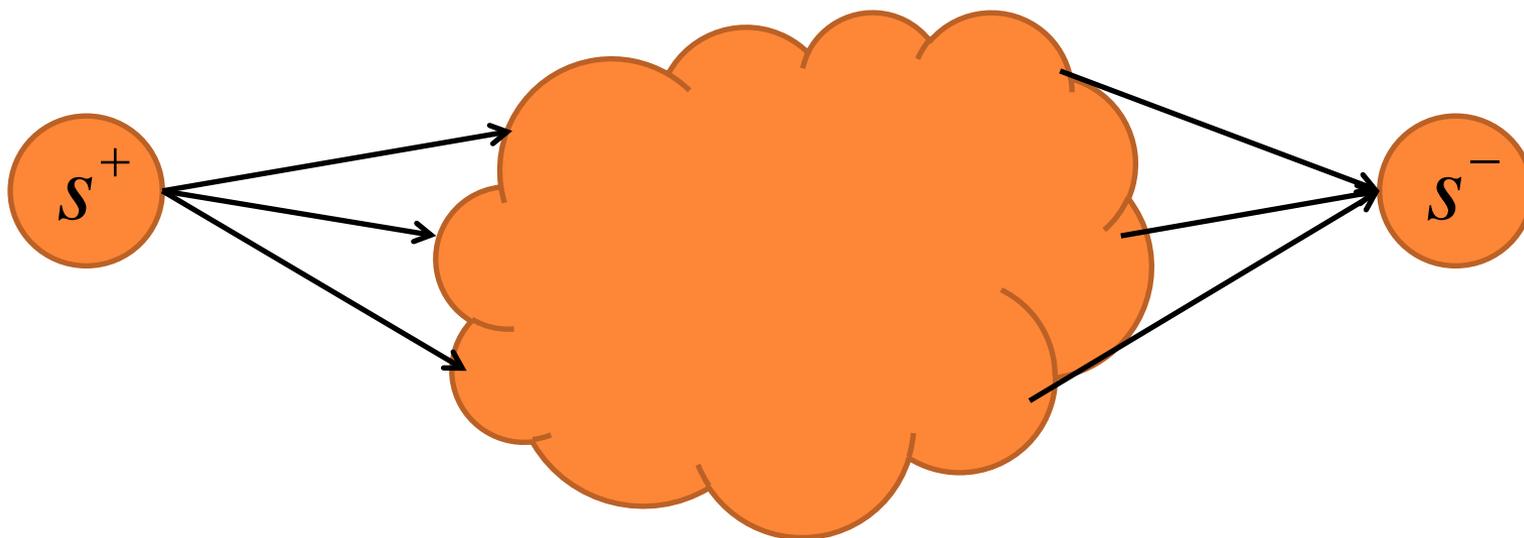
- 交通網中の流れ
 - 都市間を流れる車両の数、及びその上限
 - 都市間を結ぶ航空路線が輸送する人数とその上限
- 物流
 - 倉庫間を移動している商品の数とその上限
- 作業
 - 各工程間のコストとその上限

容量と流れ

- 各弧に容量(上限)が存在する
 - 交通機関の輸送能力
 - 通信速度
- 各弧に実際に流れる流量
 - 容量以下
- 二点間に最大流量を実現する方法？

2端子フロー

- 入口 s^+ と出口 s^-
- 入口から出口まで有向道がある
- 各弧に容量と流量が定義できる



2端子フロー

- グラフ $G = (V, A)$
- 入口 $s^+ \in V$ と出口 $s^- \in V$ が定義され、 s^+ から s^- への有向道がある
- $\forall a \in A$ に、流量上限 $c(a) \geq 0$ が定義されている
 - 弧の重みを上限として解釈する
- $\forall a \in A$ に、流量(flow) $\varphi(a) \geq 0$ が設定される

$$N = (G(V, A), s^+, s^-, c)$$

流量に対する制約

- 容量制約

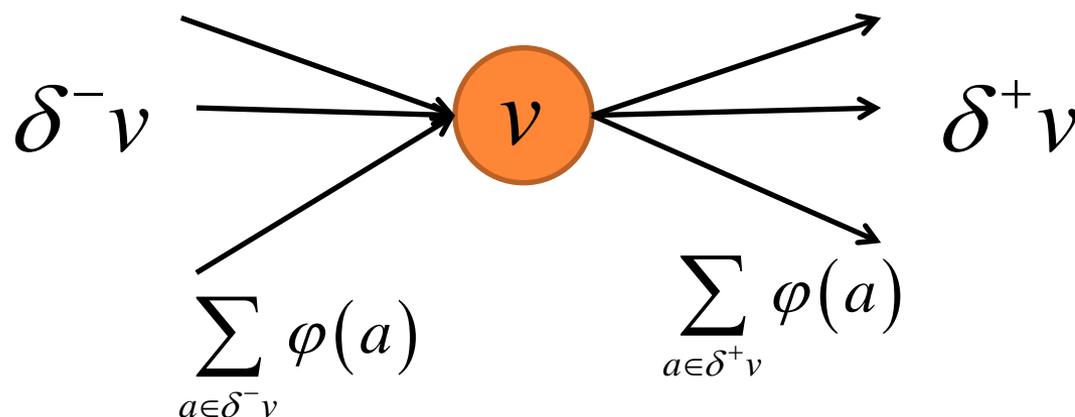
$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a)$$

- 流量保存則

- 頂点 v で「湧きだし」、「吸い込み」がない

$$\partial\varphi(v) \equiv \sum_{a \in \delta^+v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^-v} \varphi(a) = 0$$

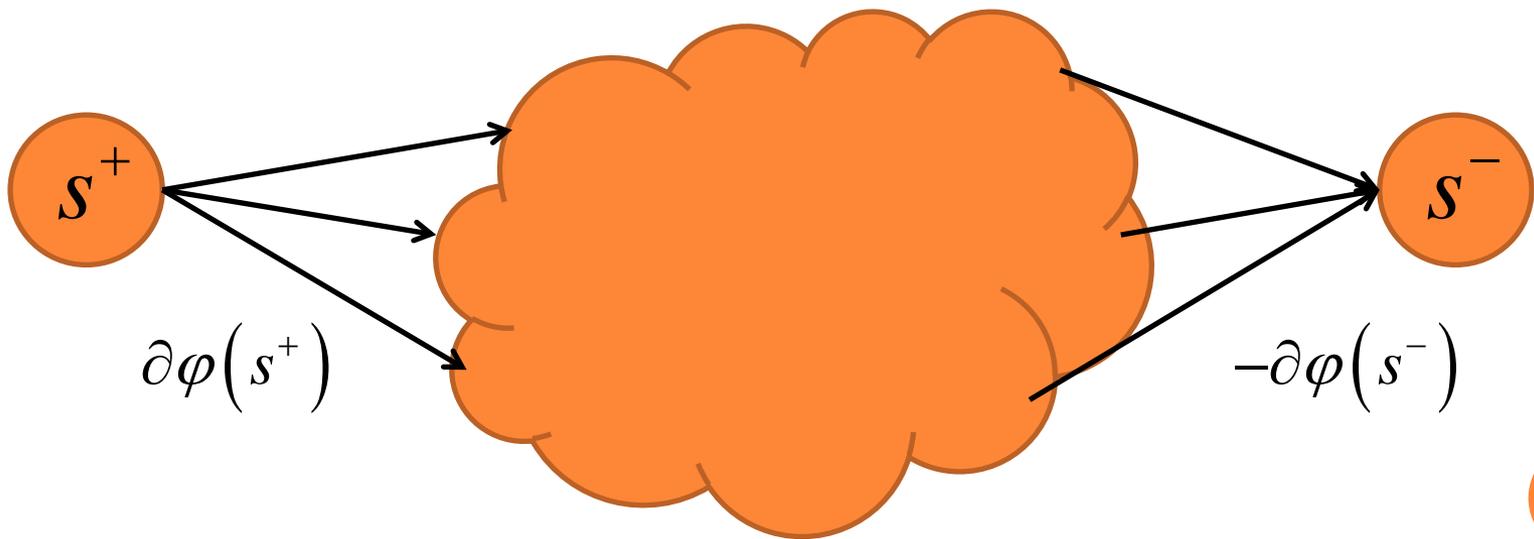
$$\forall v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$$



ネットワークフローのイメージ

- ネットワークの流量

$$Q(\varphi) = \partial\varphi(s^+) = -\partial\varphi(s^-)$$

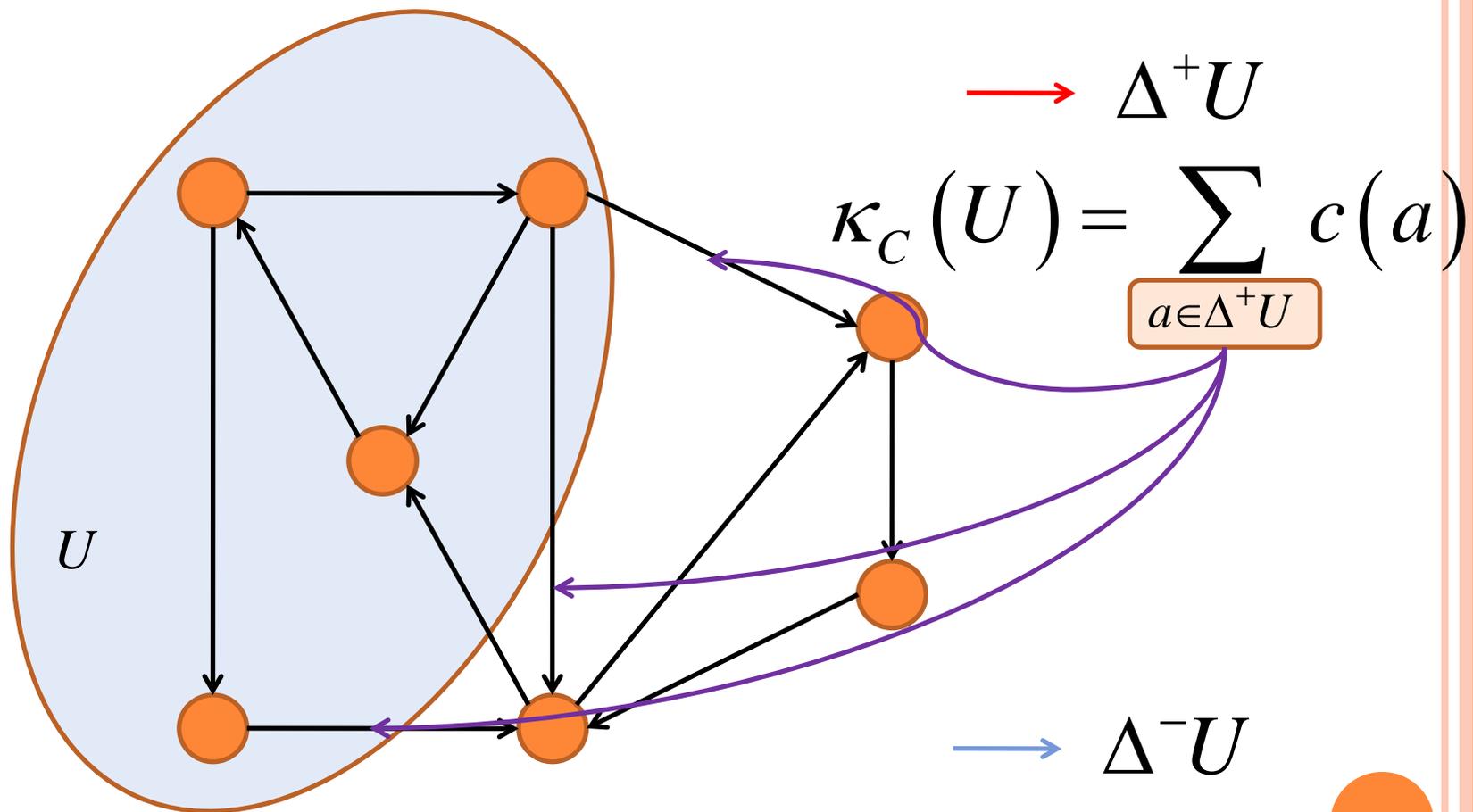


カット(CUT)

- ネットワークのカット $U \subseteq V$
 - $(s^+ \in U) \wedge (s^- \notin U)$ となる頂点の集合
- カットの容量
 - Δ^+U : U から出て、 $U \setminus V$ へ入る弧の全体

$$\kappa_C(U) = \sum_{a \in \Delta^+U} c(a)$$

カットとその境界



流量とカット

- N 中の任意のフロー φ と任意のカット U に対して次が成り立つ。

$$Q(\varphi) \leq \kappa_C(U)$$

- 証明

$$\begin{aligned} Q(\varphi) &= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\ &\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) - 0 \\ &= \kappa_C(U) \end{aligned}$$

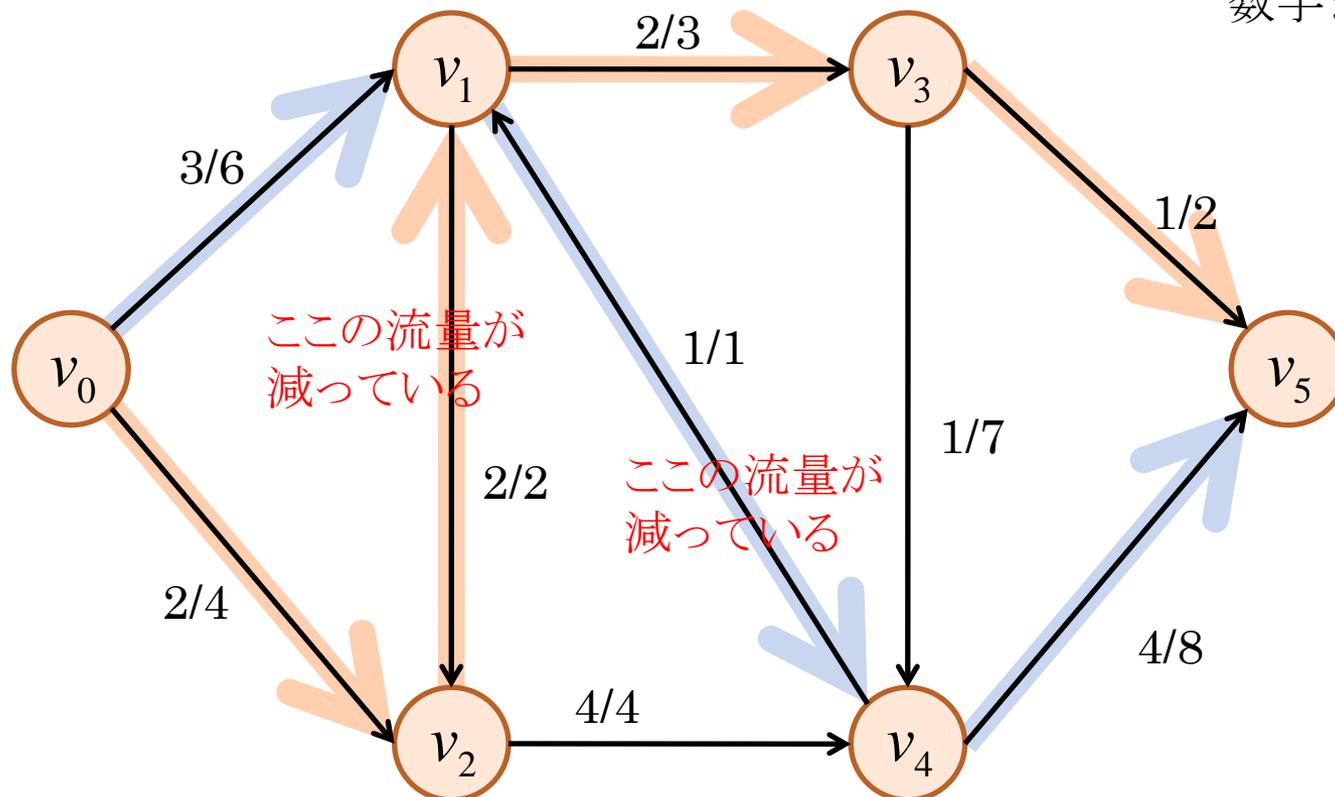
最大流量と最小カット

$$\max \{Q(\varphi)\} \leq \min \{\kappa_C(C)\}$$

- 実は、等号が成り立つ(後述)

最大フローを見付ける考え方

数字: 流量/容量



補助ネットワーク(AUXILIARY NETWORK)

$$N_A = (G_\varphi(V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi)$$

$$A_\varphi = A_\varphi^+ \cup A_\varphi^-$$

A_φ^+ : 順方向の容量に余裕のある弧の集合

A_φ^- : 元のネットワークと逆方向の弧の集合。ただし流量 0 の弧を除く

元のネットワークの $\forall a \in A$ に対して

- $\varphi(a) < c(a)$ ならば
 - $A_\varphi^+ \leftarrow A_\varphi^+ \cup \{a\}$: 弧の追加
 - $c_\varphi(a) = c(a) - \varphi(a)$: 容量の設定
- $\varphi(a) = c(a)$ である弧は A_φ^+ に追加されないことに注意

- $0 < \varphi(a)$ ならば

- $A_\varphi^- \leftarrow A_\varphi^- \cup \{b\}$: a と逆向きの弧 b を追加

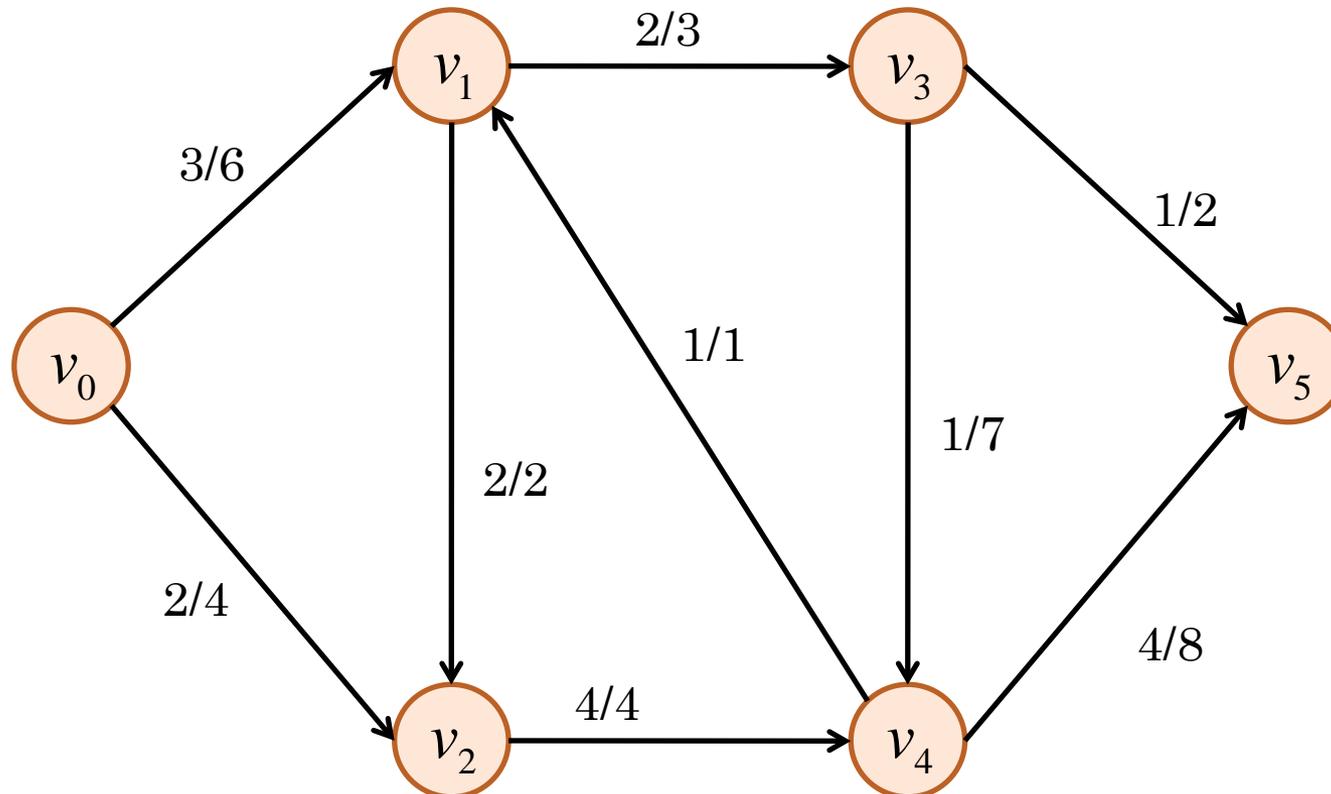
- $c_\varphi(b) = \varphi(a)$: 容量設定

- 流量が 0 の弧以外はすべて含まれることに注意

- 元のグラフと逆向きの弧であることに注意

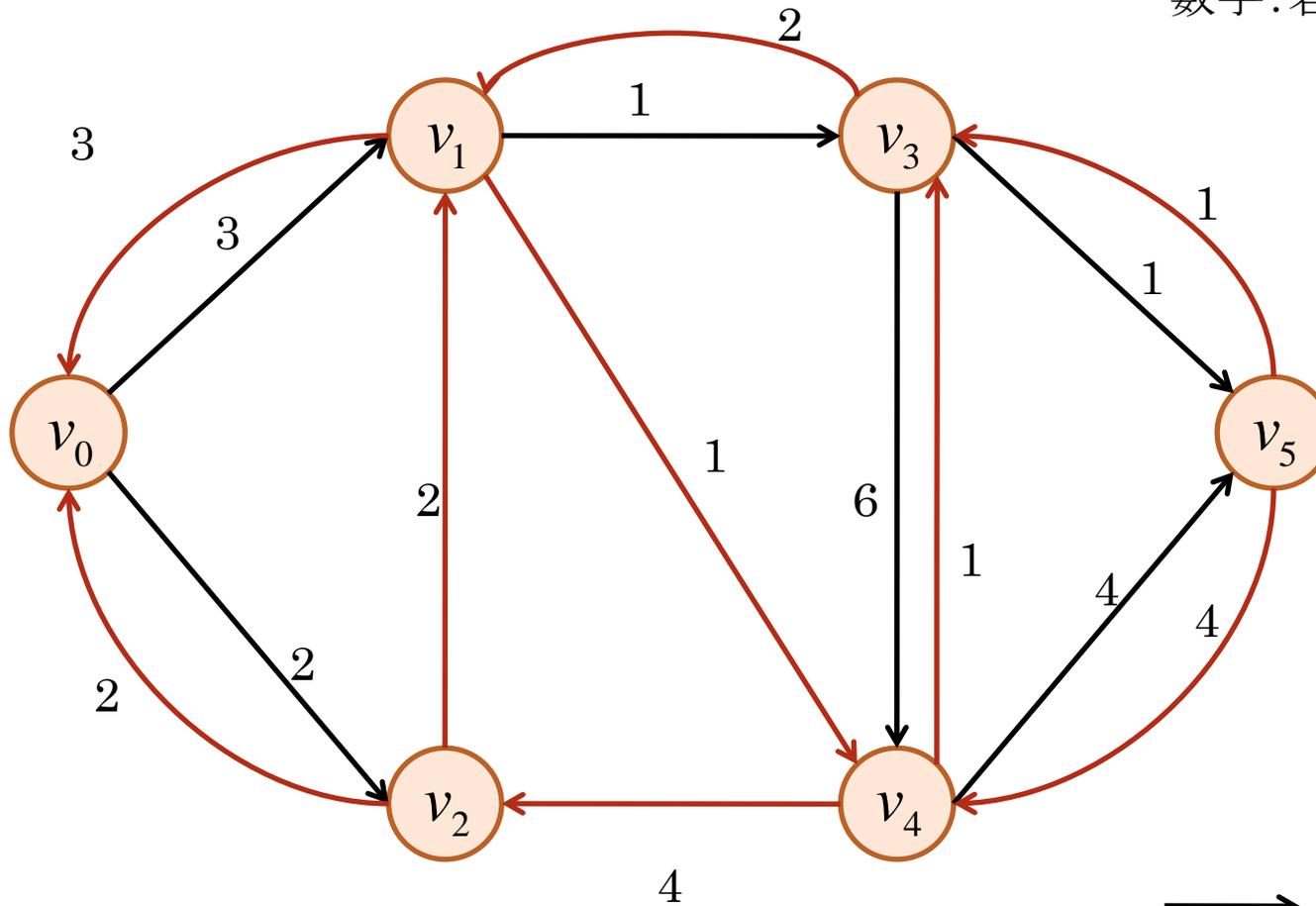
補助ネットワークの構成

数字:流量/容量



補助ネットワークの構成

数字:容量



$\longrightarrow A_\varphi^+$
 $\longrightarrow A_\varphi^-$

補助ネットワーク中に s^+ から s^- への有向道 P があれば以下の d だけ流量を増やすことができる。

$$d = \min(c_\phi(a) \mid a \in P) > 0$$

P を増加道と呼ぶことにする。

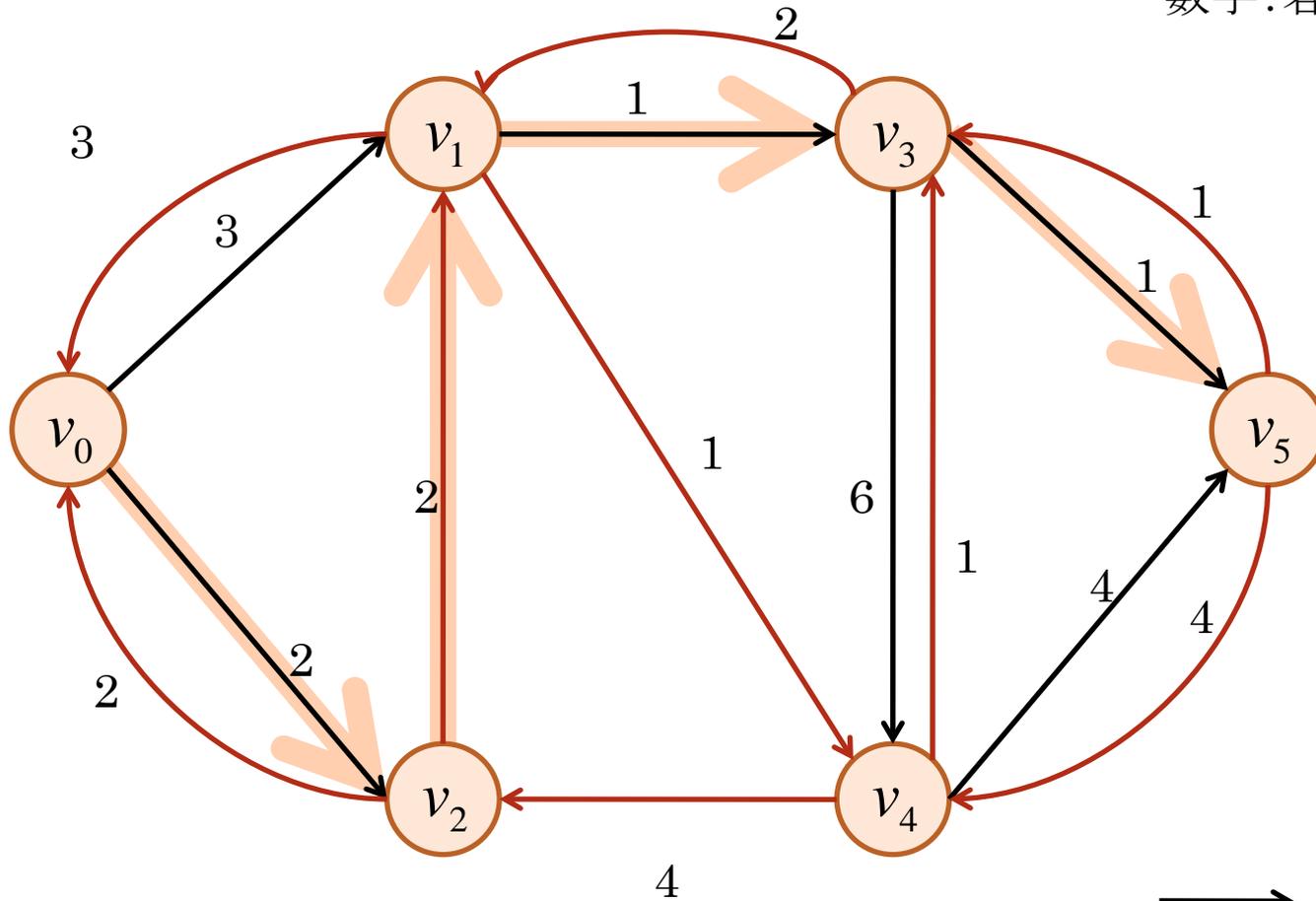
- このときの補助ネットワーク中の新しい流量

$$\varphi'(a) = \begin{cases} \varphi(a) + d & \text{for } a \in A_{\varphi}^+ \wedge a \in P \\ \varphi(a) - d & \text{for } a \in A_{\varphi}^- \wedge a \in P \\ \varphi(a) & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 容量 c が整数関数ならば、流量は整数

補助ネットワーク内の増加道

数字:容量

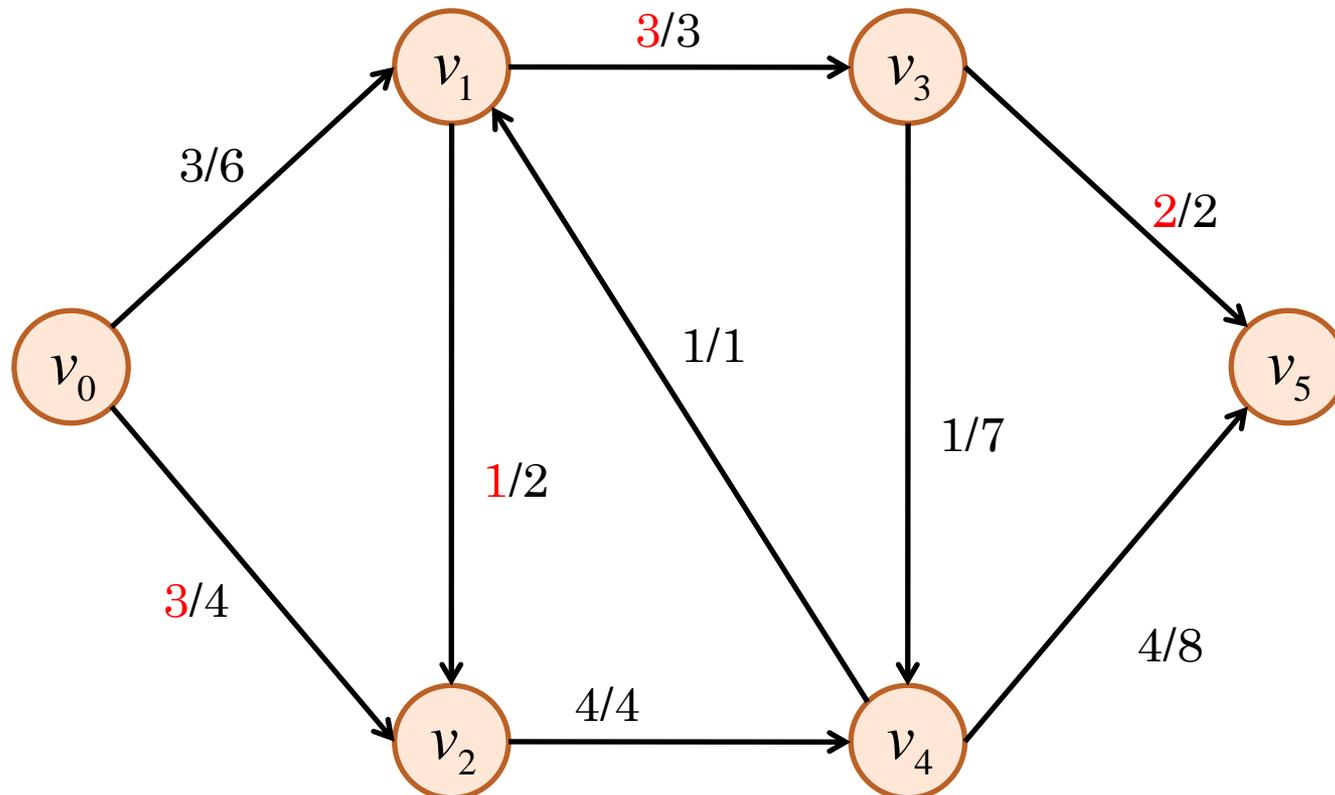


$d = 1$

$\longrightarrow A_\varphi^+$
 $\longrightarrow A_\varphi^-$

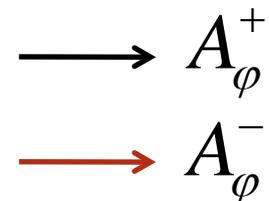
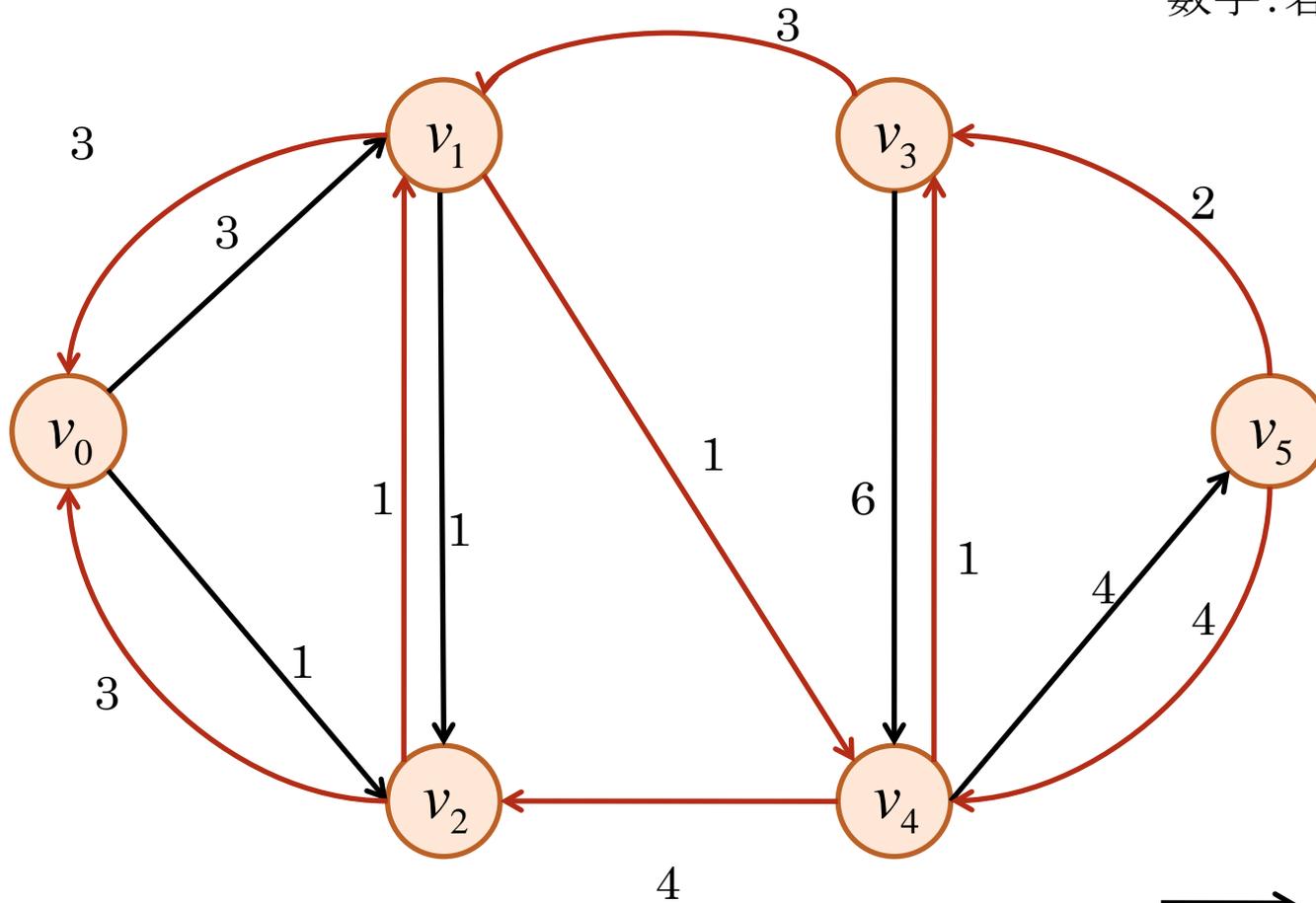
流量增加

数字:流量/容量



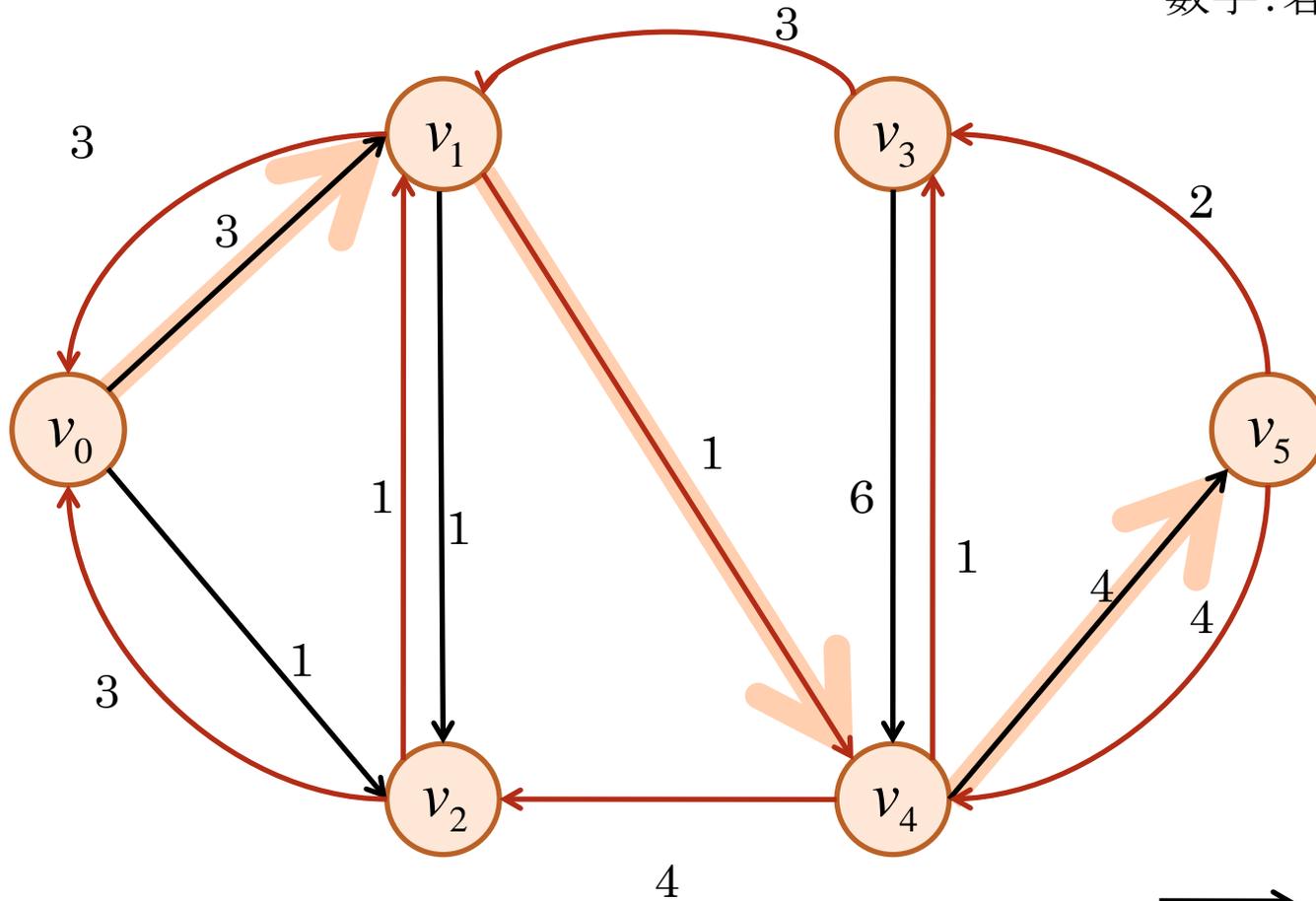
補助ネットワークの更新

数字:容量



補助ネットワーク内の増加道(再)

数字:容量

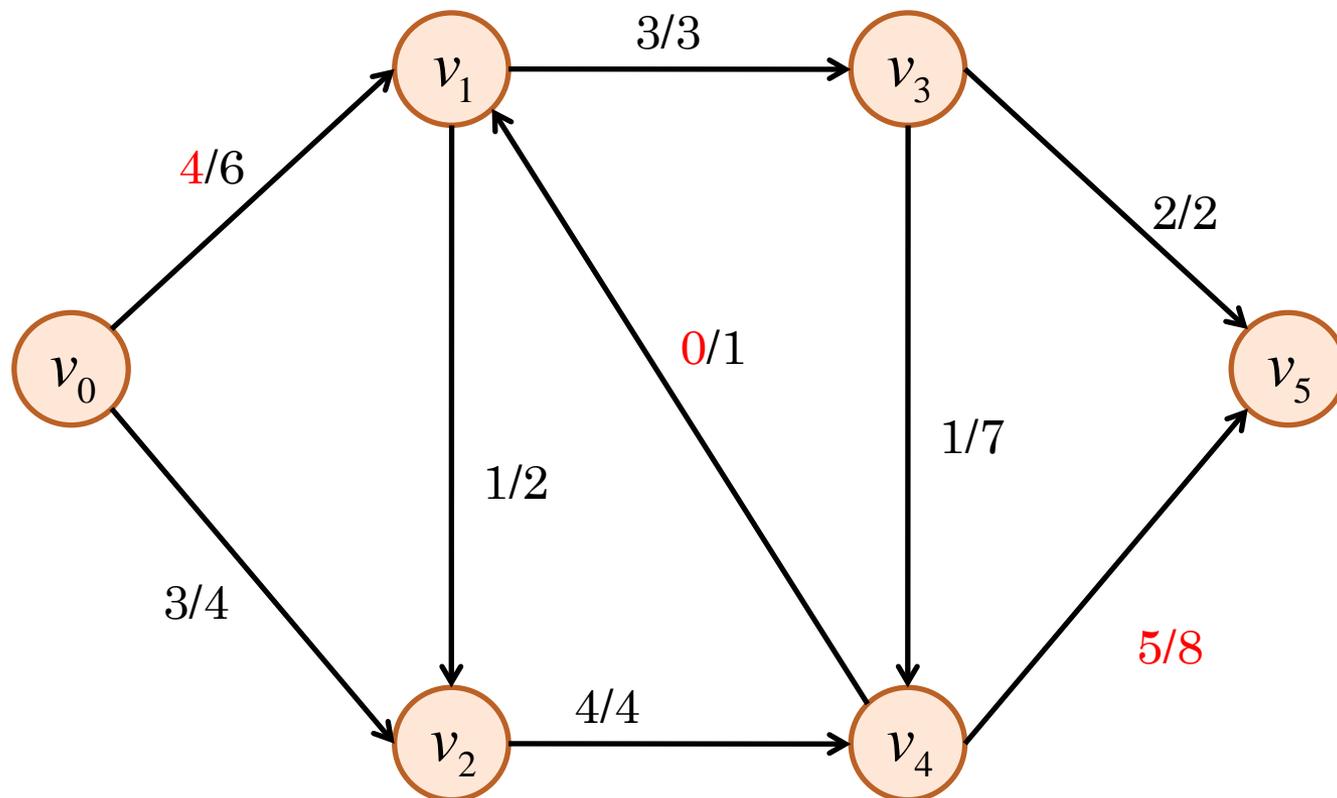


$d = 1$

$\longrightarrow A_{\varphi}^{+}$
 $\longrightarrow A_{\varphi}^{-}$

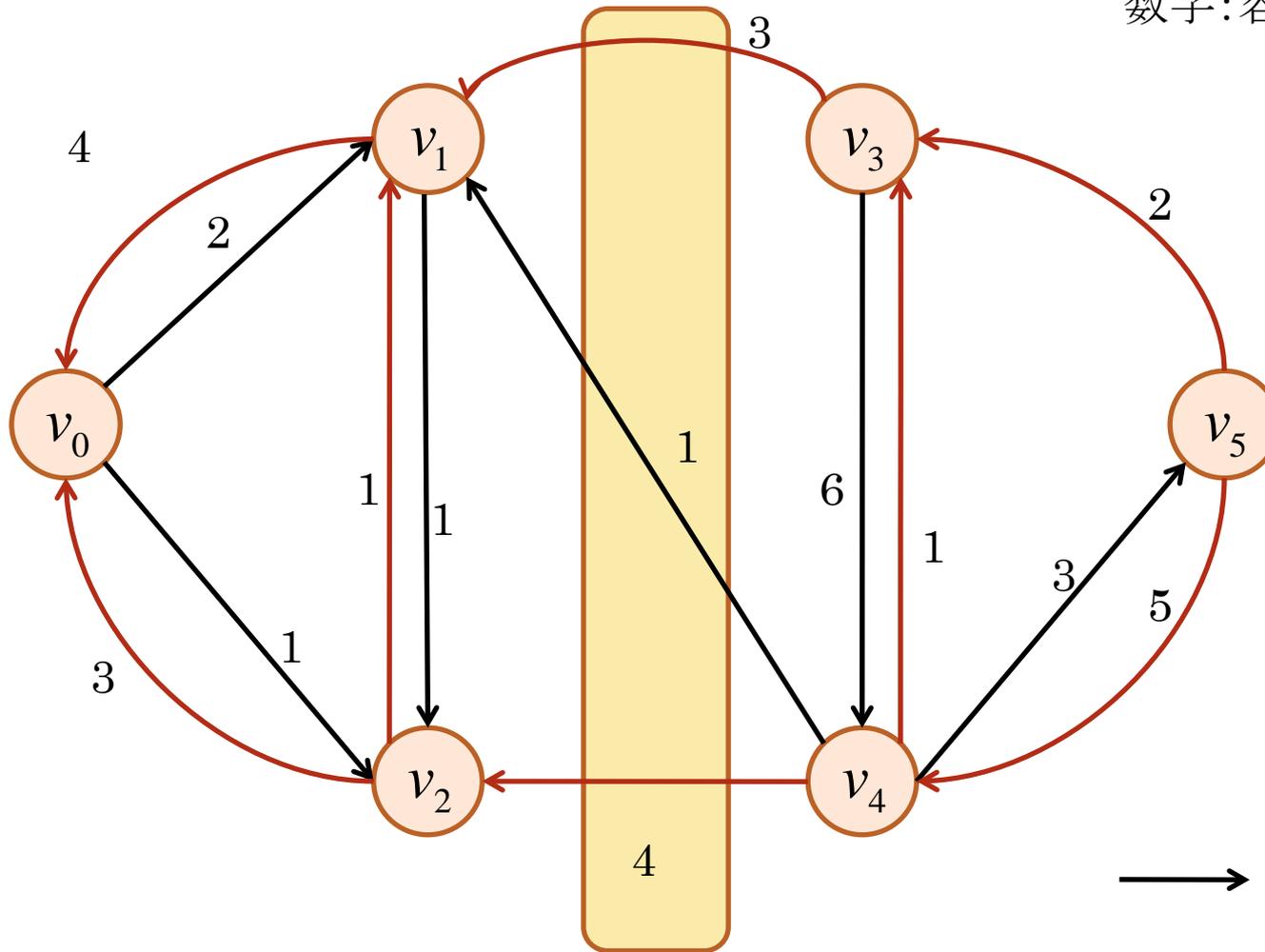
流量增加

数字:流量/容量



補助ネットワークの更新(再)

数字:容量

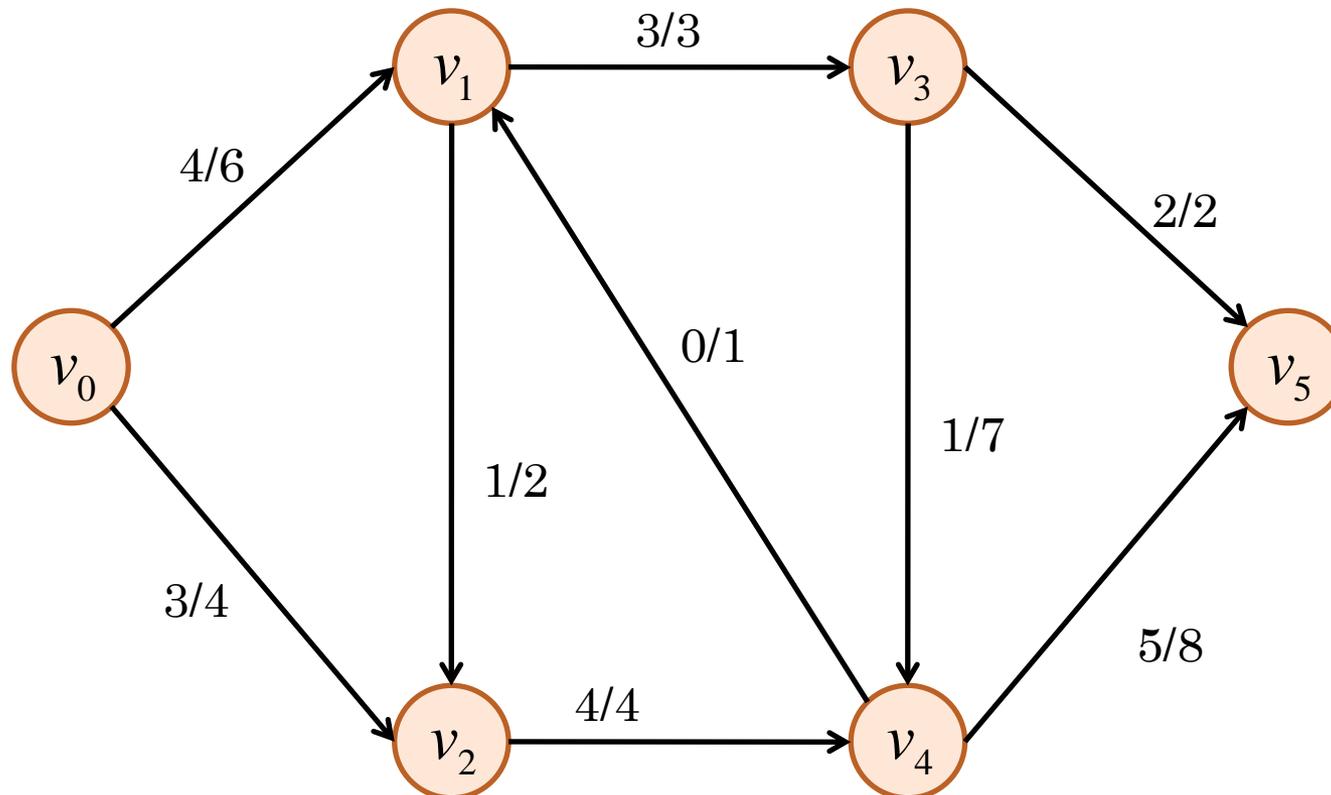


$\longrightarrow A_\varphi^+$
 $\longrightarrow A_\varphi^-$

終点への有向道が無い

最大流量の実現

数字:流量/容量



アルゴリズムとしての整理

補助ネットワーク N_A を作る

幅優先探索で始点から終点への道 P を得る

while($P \neq \text{null}$) {

$$d = \min(c_\phi(a) \mid a \in P)$$

update(N_A, P, d) : 補助ネットワーク更新

幅優先探索で始点から終点への道 P を得る

}

deploy(N_A) : 元のネットワークへ反映

補助ネットワーク更新アルゴリズム

```
update( $N_A, P, d$ ) {  
  foreach( $a \in P$ ) {  
     $c_\phi(a) \rightarrow c_\phi(a) - d$   
    if( $c_\phi(a) = 0$ ) {  $a$  を削除 }  
     $b : a \in A_\phi^\pm$  ならば対応する弧  $b \in A_\phi^\mp$   
    if( $b$  が存在しない)  $b$  を作る  
     $c_\phi(b) \rightarrow c_\phi(b) + d$   
  }  
}
```

元のネットワークへの反映アルゴリズム

N_A : 補助ネットワーク

N : 元のネットワーク

deploy(N_A) {

 foreach($a \in A$) { A は N の弧

$b \in A_\phi^-$ は対応する弧

$c(a) = c(b)$

 }

}

最大流量と最小カット: 等号が成り立つこと

ネットワーク N の最大流量 φ が実現しているとき、その補助ネットワーク N_A には、 s^+ から s^- への有向道は存在しない。

$W \subseteq V$: 補助ネットワーク N_A 中の、 s^+ から到達可能な頂点の集合 \rightarrow 補助ネットワーク N_A のカットの一つ

N_A 中には、 W からの外向きの弧は存在しない。 W への内向きの弧 a は、以下の何れかである。

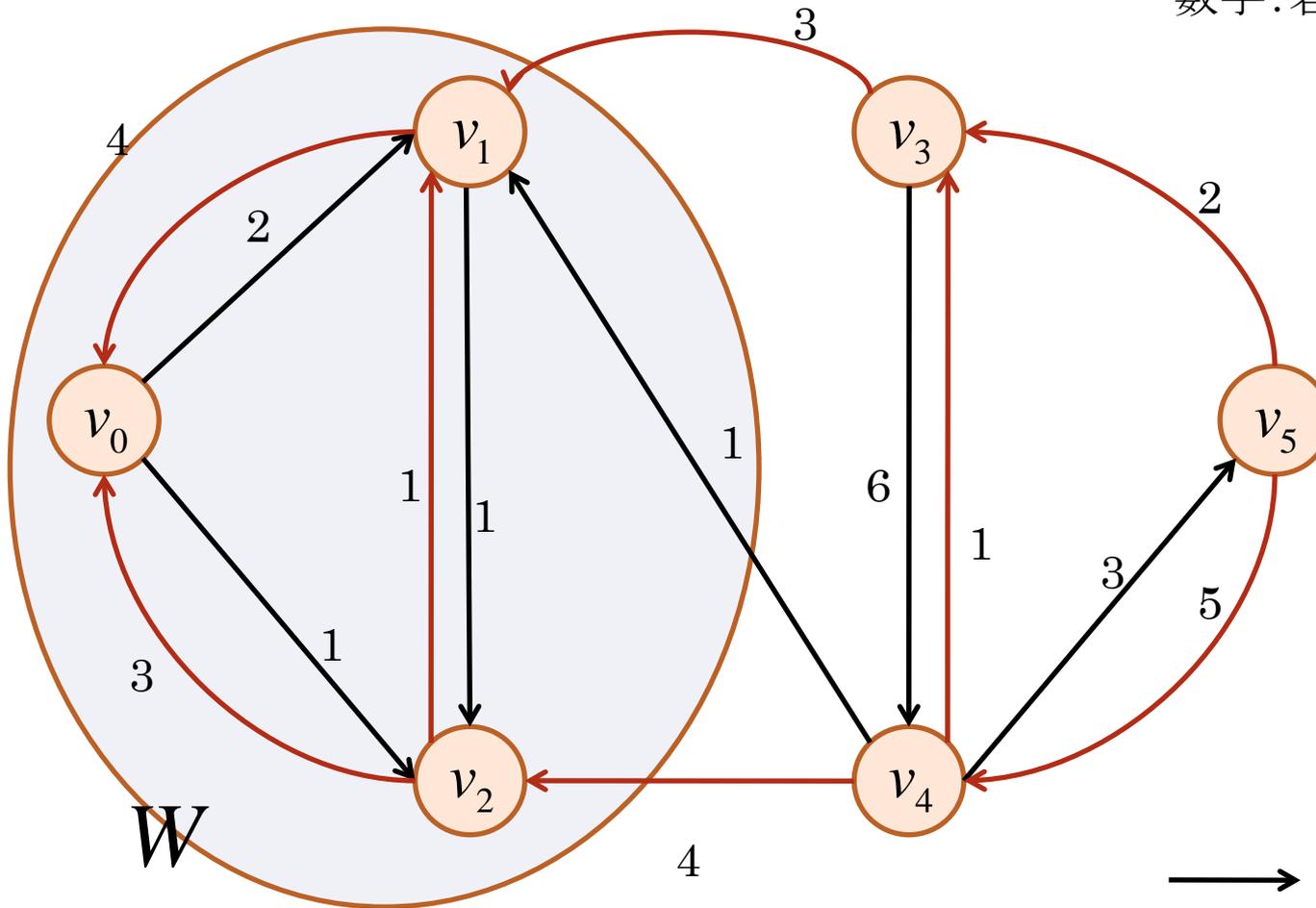
- $\forall a \in A_\varphi^-$: 対応する N 中の弧の容量を使い切っている $\rightarrow \varphi(a) = c(a)$
- $\forall a \in A_\varphi^+$: 対応する N 中の弧の流量はゼロ $\rightarrow \varphi(a) = 0$

以上より

$$\begin{aligned} Q(\varphi) &= \sum_{a \in \Delta^+ W} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} \varphi(a) \\ &= \sum_{a \in \Delta^+ W} c(a) - 0 \\ &= \kappa_C(W) \end{aligned}$$

補助ネットワークでのカット

数字:容量

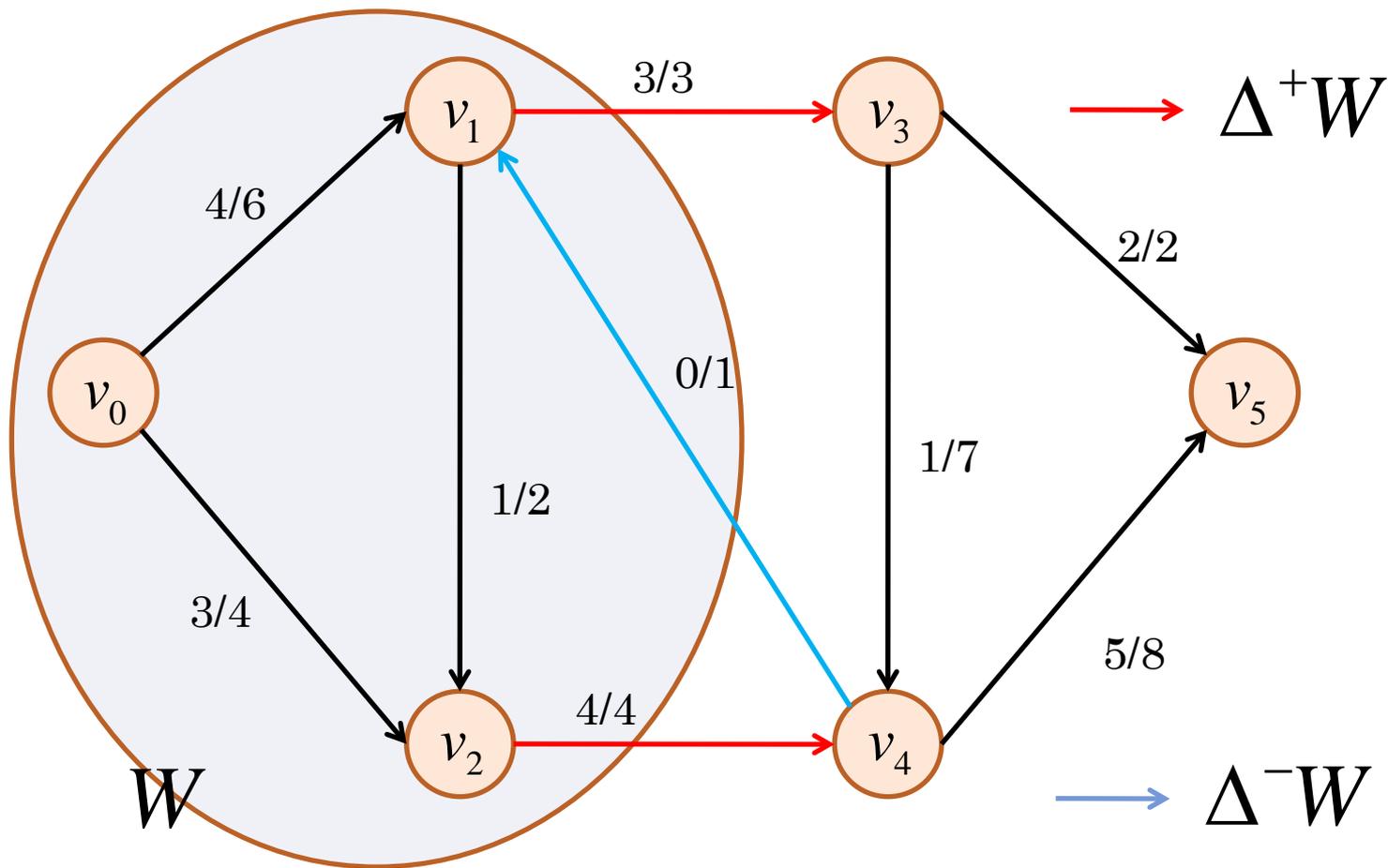


$\longrightarrow A_\varphi^+$
 $\longrightarrow A_\varphi^-$

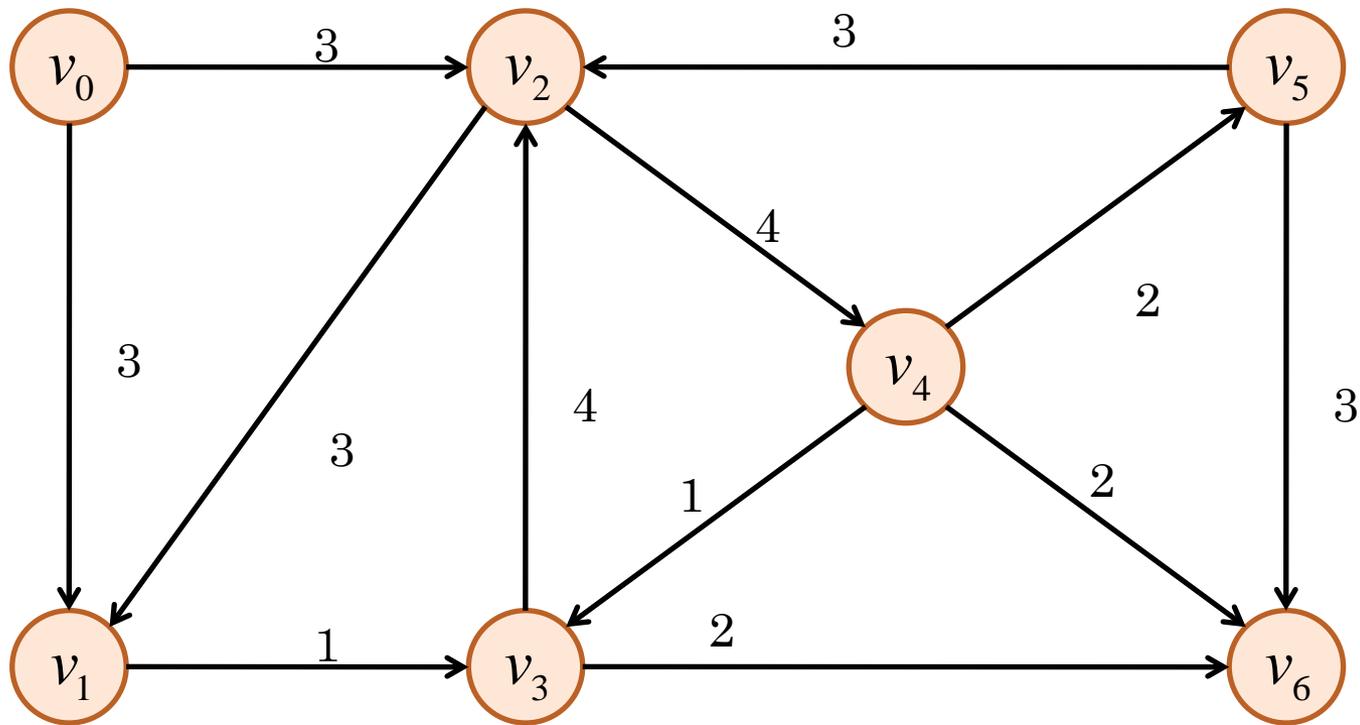
終点への有向道が無い

元のネットワークでのカット

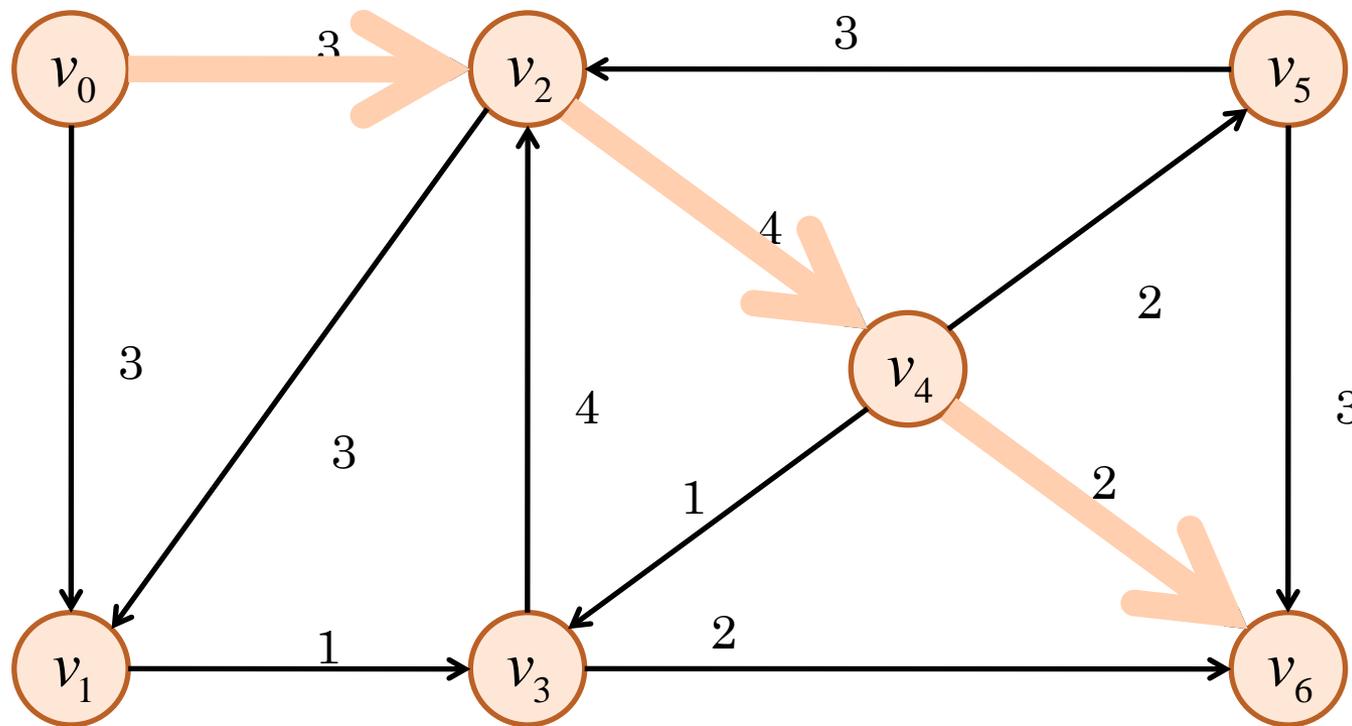
数字: 流量/容量



例2 $v_0 \rightarrow v_6$



例2 : 補助ネットワーク構築と増加道探索

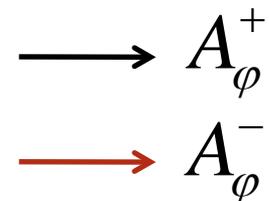
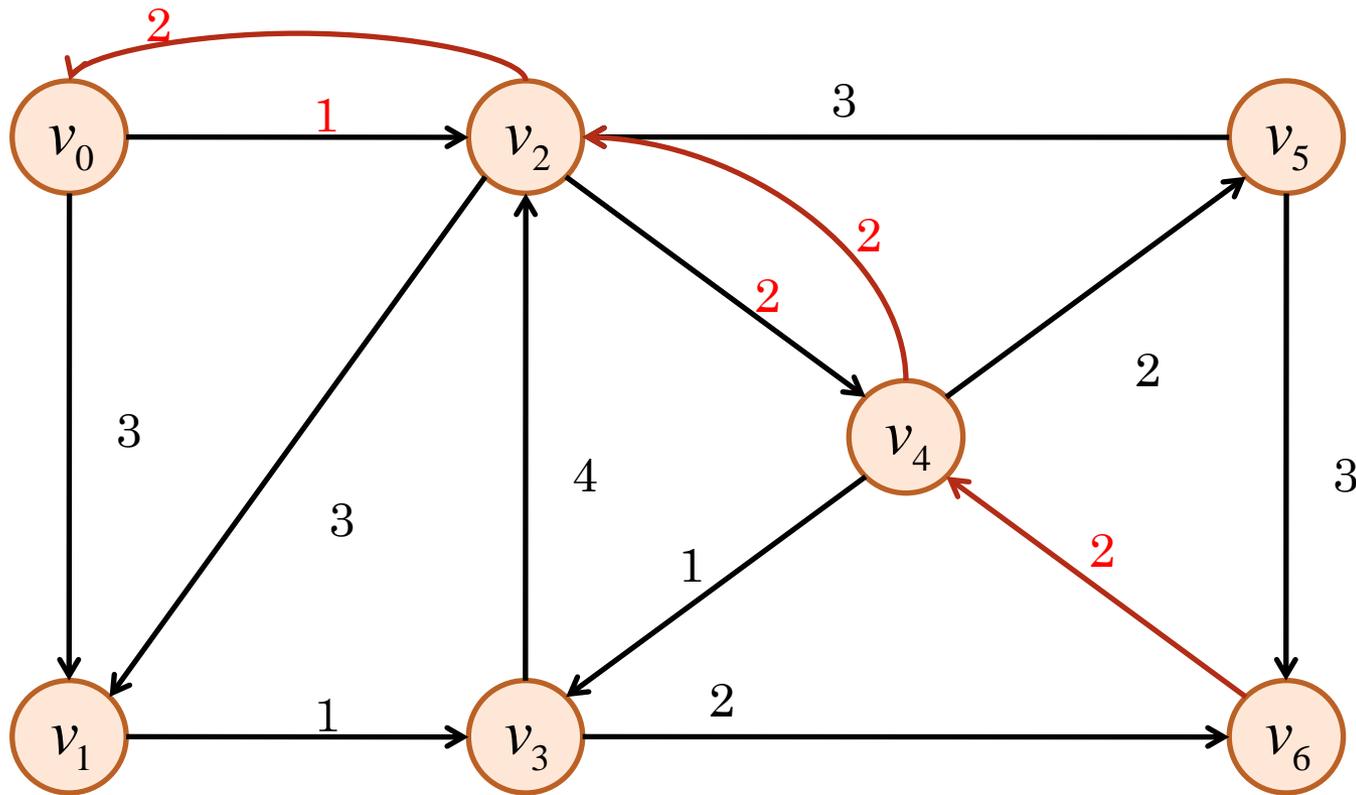


$d = 2$

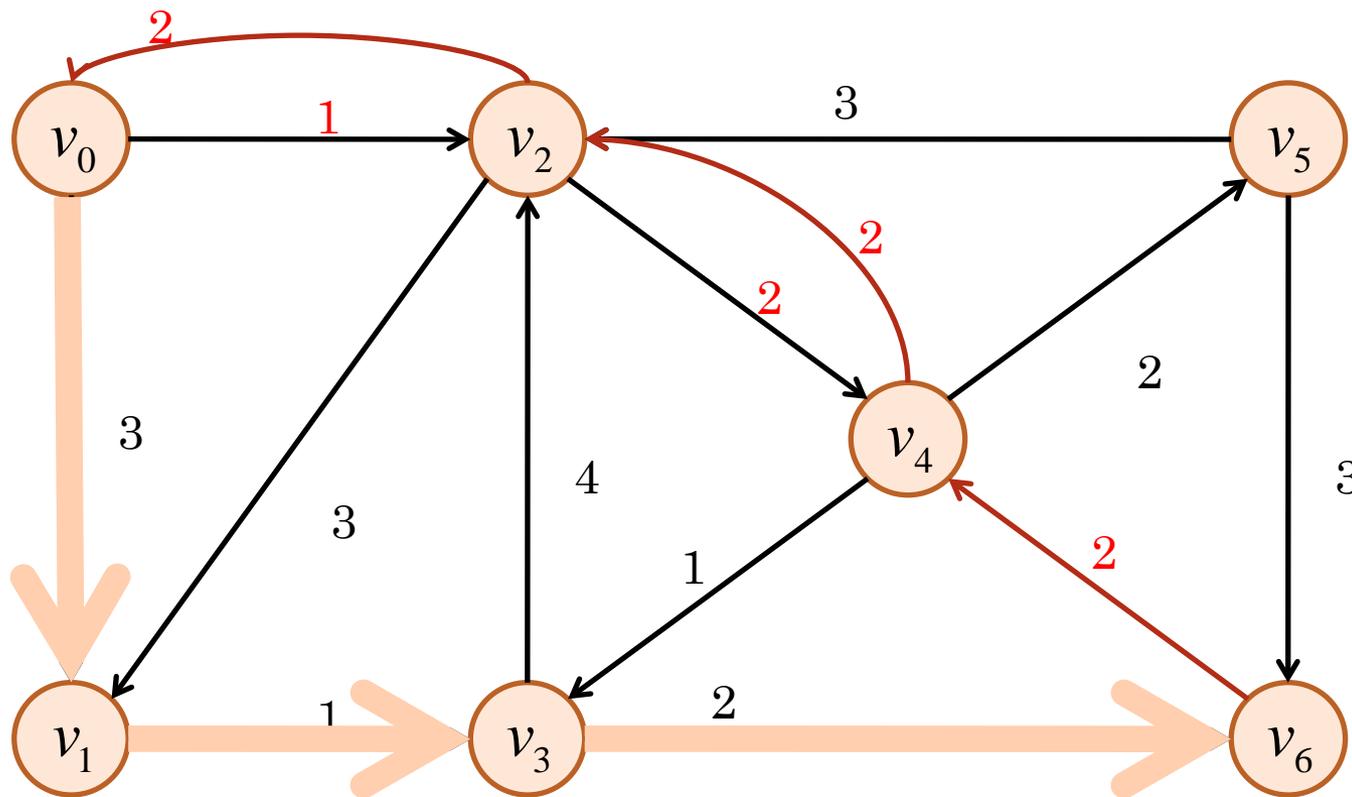
流量0なので、逆向きは存在しない

$\longrightarrow A_{\varphi}^{+}$
 $\longrightarrow A_{\varphi}^{-}$

例2: 補助ネットワーク更新



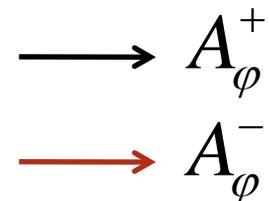
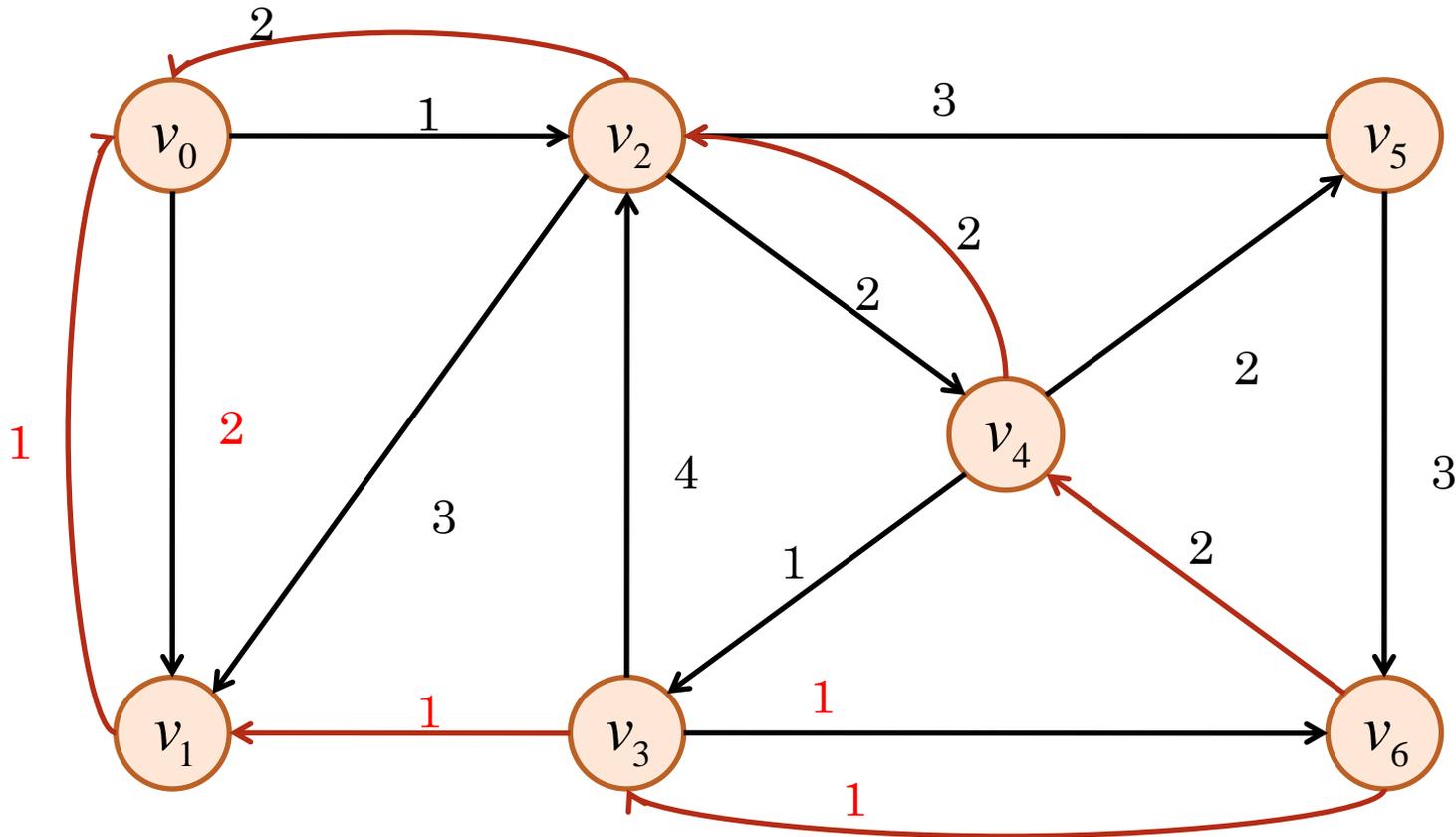
例2: 補助ネットワーク中の増加道探索



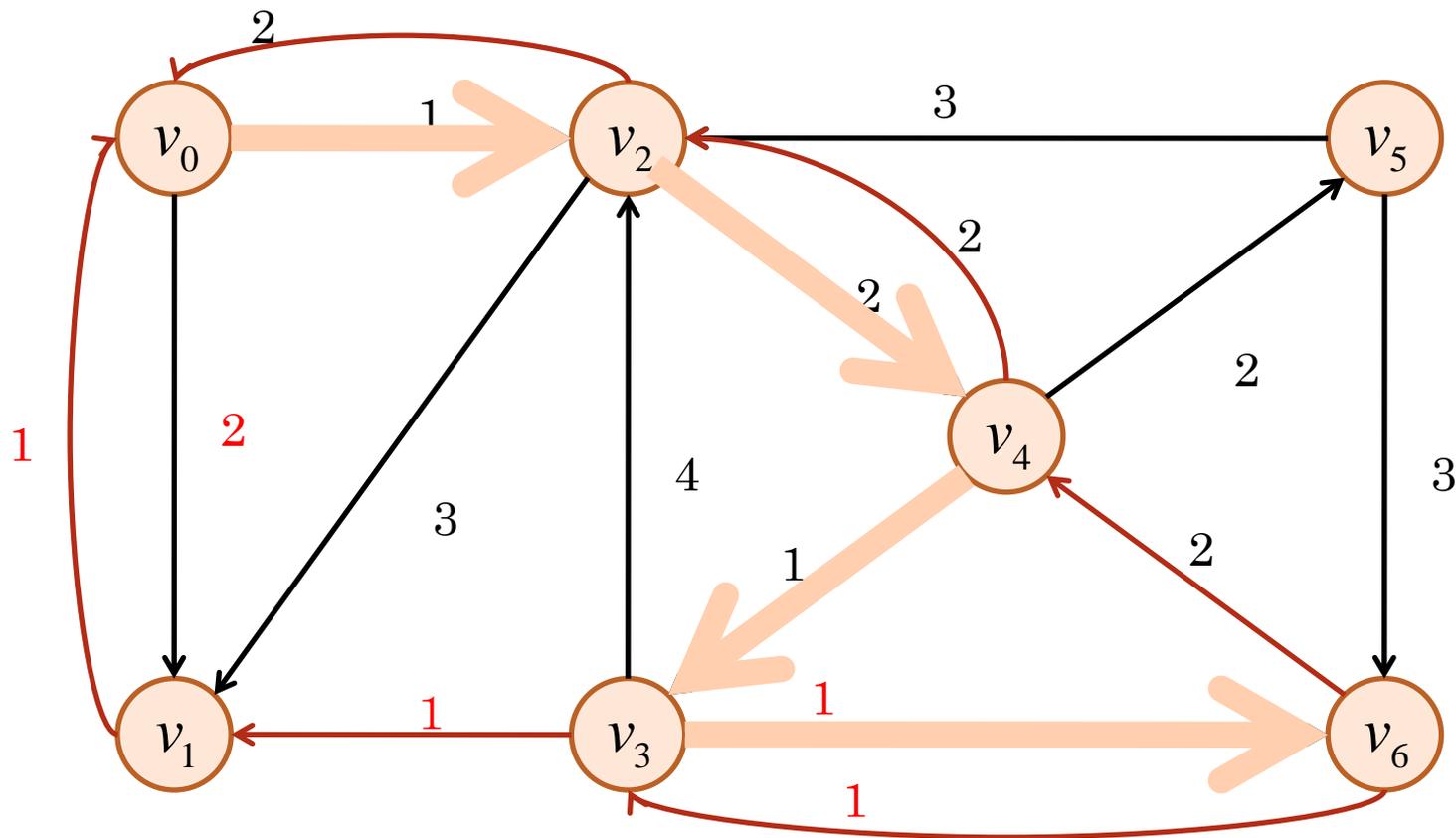
$d = 1$

$\longrightarrow A_{\varphi}^{+}$
 $\longrightarrow A_{\varphi}^{-}$

例2: 補助ネットワーク更新



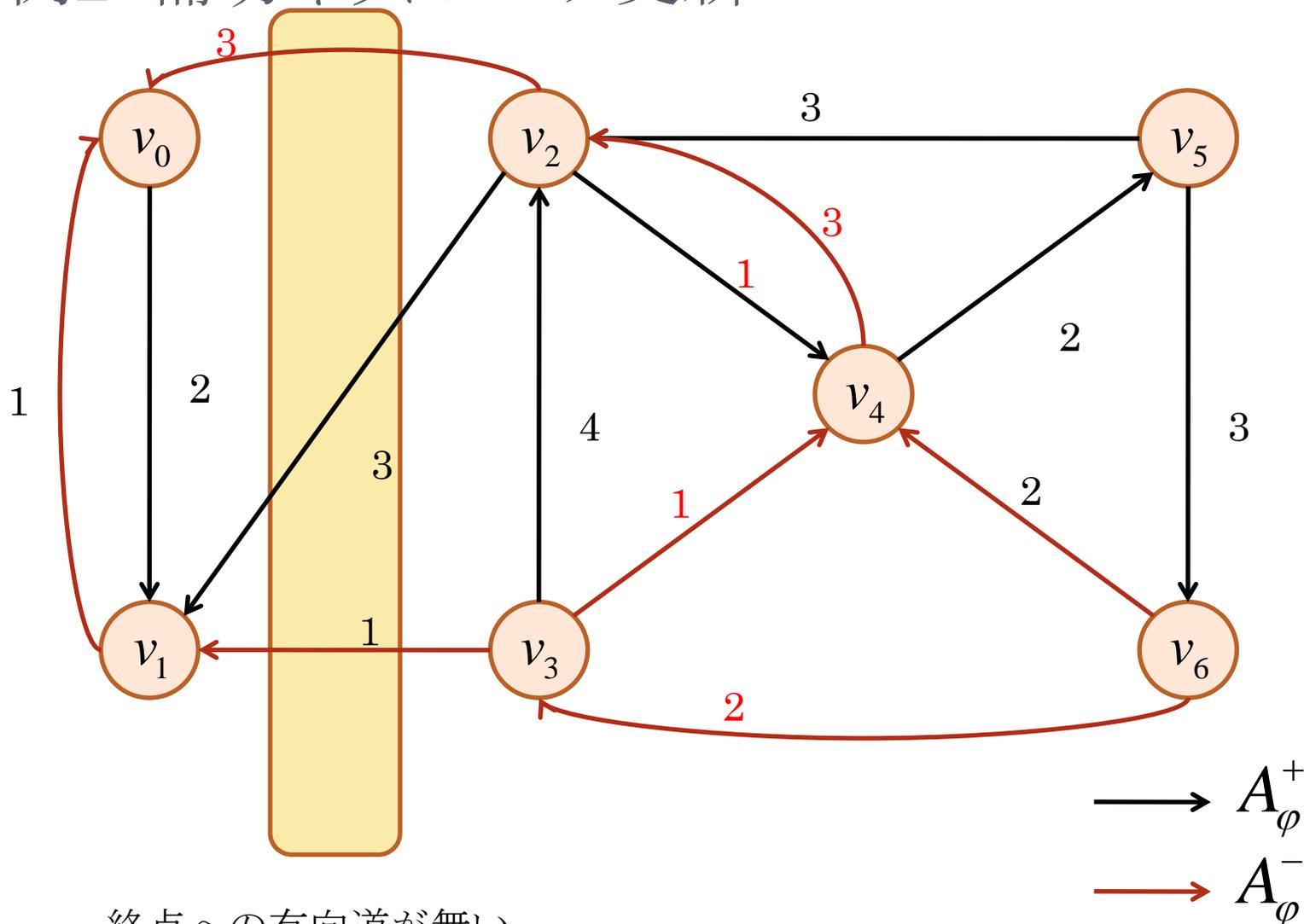
例2: 補助ネットワーク更新



$d = 1$

$\longrightarrow A_\varphi^+$
 $\longrightarrow A_\varphi^-$

例2: 補助ネットワーク更新



終点への有向道が無い

例2: 最大流量の実現

数字: 流量/容量

