

「グラフと組み合わせ」課題 5(解答例)

2014/5/12

1 数学的帰納法 1

自然数 n に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

解答例

1. $n=1$ の場合、左辺は $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1$ であり、右辺は $\frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3 = 1$ であり、公式が成り立つ。
2. ある n において成り立つと仮定する。 $n+1$ の場合を考える。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\{n(2n+1) + 6(n+1)\} \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)\{2(n+1) + 1\}\end{aligned}$$

従って、公式が成り立つ。

2 数学的帰納法 2

自然数 n に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。ここで、 $a \neq 1$ である。

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

解答例

1. $n=1$ の場合、左辺は $1+a$ であり、右辺は $(1-a^2)/(1-a) = 1+a$ であり、公式が

成り立つ。

2. ある n において成り立つと仮定する。 $n+1$ の場合を考えると、以下のように成り立つ。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} a^k &= \sum_{k=1}^n a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} \\ &= \frac{1}{1-a} (1-a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}) = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}\end{aligned}$$

3 グラフの記述

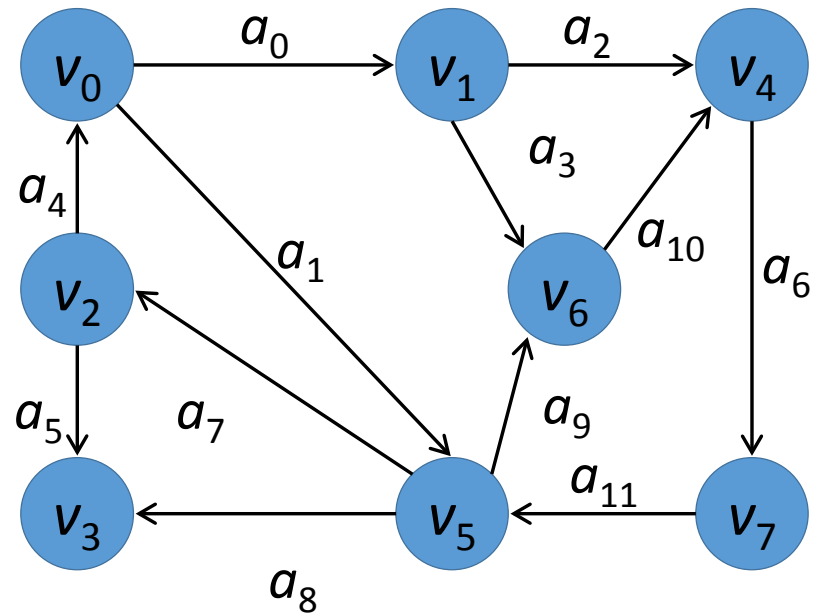
次のグラフを幾何学的に、つまり図形として表記しなさい。

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}\}$$

$$\begin{array}{cccc}\partial^+ a_0 = v_0 & \partial^- a_0 = v_1 & \partial^+ a_1 = v_0 & \partial^- a_1 = v_5 \\ \partial^+ a_2 = v_1 & \partial^- a_2 = v_4 & \partial^+ a_3 = v_1 & \partial^- a_3 = v_6 \\ \partial^+ a_4 = v_2 & \partial^- a_4 = v_0 & \partial^+ a_5 = v_2 & \partial^- a_5 = v_3 \\ \partial^+ a_6 = v_4 & \partial^- a_6 = v_7 & \partial^+ a_7 = v_5 & \partial^- a_7 = v_2 \\ \partial^+ a_8 = v_5 & \partial^- a_8 = v_3 & \partial^+ a_9 = v_5 & \partial^- a_9 = v_6 \\ \partial^+ a_{10} = v_6 & \partial^- a_{10} = v_4 & \partial^+ a_{11} = v_7 & \partial^- a_{11} = v_5\end{array}$$

解答例



4 探索

講義で説明した以下のアルゴリズム

$L \subseteq V$: 道が経由する頂点

```
道探索( $v \in V, L$ ) {  
  forall( $a \in \delta^+v$ ) {  
     $w = \delta^-a$   
    if( $w \notin L$ ) {  
       $L \leftarrow L \cup \{w\}$   
      道探索( $w, L$ )  
       $L \leftarrow L \setminus \{w\}$   
    }  
  }  
}
```

を用いて、前問のグラフにおける v_0 からの道を探査しなさい。その結果の探索木を図示しなさい。

解答例

