

# 「グラフと組み合わせ」課題 8 (解答例)

2014/6/2

## 1 列挙

$n$  個の文字の集合

$$S = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$$

の全てからなる文字列、つまり同じ文字を含まない、長さ  $n$  の文字列を列挙する方法を考える。

1. 何通りの文字列があるかを答えなさい。また、そのことが正しいことを数学的帰納法で示しなさい。
2. 文字列を列挙する再帰的アルゴリズムを構築しなさい。
3.  $n=4$  の場合に、上記のアルゴリズムに従って文字列を列挙しなさい。列挙する途中の過程についても示しなさい。

## 解答例

1.  $n$  個の文字から構成され、同じ文字を含まない文字列の総数は  $n!$  である。このことを数学的帰納法で証明する。
  - $n=1$  の場合、明らか。
  - ある文字数  $n$  の時、文字列の総数が  $n!$  であると仮定する。各文字列に対して、新しい文字  $\alpha$  を加えた文字列を生成することを考える。文字の間が  $n-1$  箇所、それに先頭と末尾を加え、文字  $\alpha$  を加えて長さ  $n+1$  の文字列を作る方法は通りである。 $n!$  個のそれぞれに一文字加える方法が  $n+1$  通りあるため、 $(n+1) \times n! = (n+1)!$  通りの文字列が生成される。
2. アルゴリズムを `enumString(L, A)` とする。ここで、 $L$  は、文字列作成に既に使用した文字のリストとする。つまり、最後には生成された文字列となる。その初期値は空である。 $A$  は、文字列として未だ使用されていない文字のリストとする。その初期値は  $S$  である。

```

enumString(L, A){
  if (|A| == 0) {Lを印刷}
  else {
    BはAの複製
    forall (s ∈ A) {
      L ← L ∪ {s}
      B ← B \ {s}
      enumString(L, B)
      L ← L \ {s}
      B ← B ∪ {s}
    }
  }
}

```

3.  $S = \{a, b, c, d\}$  の場合の動作例を示す。再帰関数を  $f$  とする。

$f\{\{ \}, [a, b, c, d]\}$	$f\{[a], [b, c, d]\}$	$f\{[a, b], [c, d]\}$	$f\{[a, b, c], [d]\}$	$f\{[a, b, c, d], [ \ ]\}$
			$f\{[a, b, d], [c]\}$	$f\{[a, b, d, c], [ \ ]\}$
		$f\{[a, c], [b, d]\}$	$f\{[a, c, b], [d]\}$	$f\{[a, c, b, d], [ \ ]\}$
			$f\{[a, c, d], [c]\}$	$f\{[a, c, d, b], [ \ ]\}$
		$f\{[a, d], [b, c]\}$	$f\{[a, d, b], [c]\}$	$f\{[a, d, b, c], [ \ ]\}$
			$f\{[a, d, c], [d]\}$	$f\{[a, d, c, b], [ \ ]\}$
	$f\{[b], [a, c, d]\}$	$f\{[b, a], [c, d]\}$	$f\{[b, a, c], [d]\}$	$f\{[b, a, c, d], [ \ ]\}$
			$f\{[b, a, d], [c]\}$	$f\{[b, a, d, c], [ \ ]\}$
		$f\{[b, c], [a, d]\}$	$f\{[b, c, a], [d]\}$	$f\{[b, c, a, d], [ \ ]\}$
			$f\{[b, c, d], [a]\}$	$f\{[b, c, d, a], [ \ ]\}$

		$f\{[b,d],[a,c]\}$	$f\{[b,d,a],[c]\}$	$f\{[b,d,a,c],[ ]\}$
			$f\{[b,d,c],[a]\}$	$f\{[b,d,c,a],[ ]\}$
	$f\{[c],[a,b,d]\}$	$f\{[c,a],[b,d]\}$	$f\{[c,a,b],[d]\}$	$f\{[c,a,b,d],[ ]\}$
			$f\{[c,a,d],[b]\}$	$f\{[c,a,d,b],[ ]\}$
		$f\{[c,b],[a,d]\}$	$f\{[c,b,a],[d]\}$	$f\{[c,b,a,d],[ ]\}$
			$f\{[c,b,d],[a]\}$	$f\{[c,b,d,a],[ ]\}$
		$f\{[c,d],[a,b]\}$	$f\{[c,d,a],[b]\}$	$f\{[c,d,a,b],[ ]\}$
			$f\{[c,d,b],[a]\}$	$f\{[c,d,b,a],[ ]\}$
	$f\{[d],[a,b,c]\}$	$f\{[d,a],[b,c]\}$	$f\{[d,a,b],[c]\}$	$f\{[d,a,b,c],[ ]\}$
			$f\{[d,a,c],[b]\}$	$f\{[d,a,c,b],[ ]\}$
		$f\{[d,b],[a,c]\}$	$f\{[d,b,a],[c]\}$	$f\{[d,b,a,c],[ ]\}$
			$f\{[d,b,c],[a]\}$	$f\{[d,b,c,a],[ ]\}$
		$f\{[d,c],[a,b]\}$	$f\{[d,c,a],[b]\}$	$f\{[d,c,a,b],[ ]\}$
			$f\{[d,c,b],[a]\}$	$f\{[d,c,b,a],[ ]\}$

## 2 実装

前問で作成した再帰的アルゴリズムをプログラムとして実装し、動作を確認しなさい。

### 解答例

プログラムは別紙に示す。実行結果を以下に示す。各行の最後が列挙すべき長

さ 4 の文字列である。

a ab abc abcd

abd abdc

ac acb acbd

acd acdb

ad adb adbc

adc adcb

b ba bac bacd

bad badc

bc bca beca

bed beda

bd bda bdac

bdc bdca

c ca cab cabd

cad cadb

cb cba cbad

cbd cbda

cd cda cdab

cdb cdba

d da dab dabc

dac dacb

db dba dbac

dbc dbca

dc dca dcab

dcb dcba

24 strings are found.