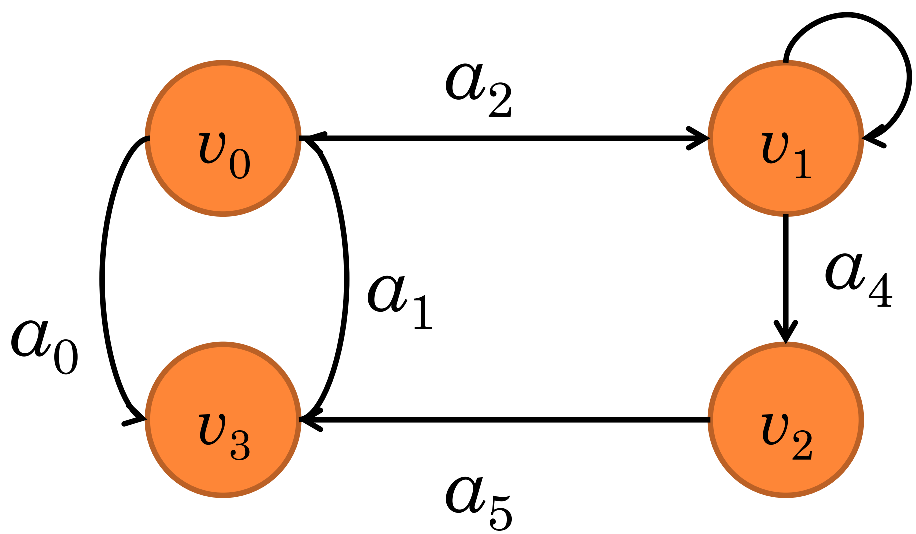
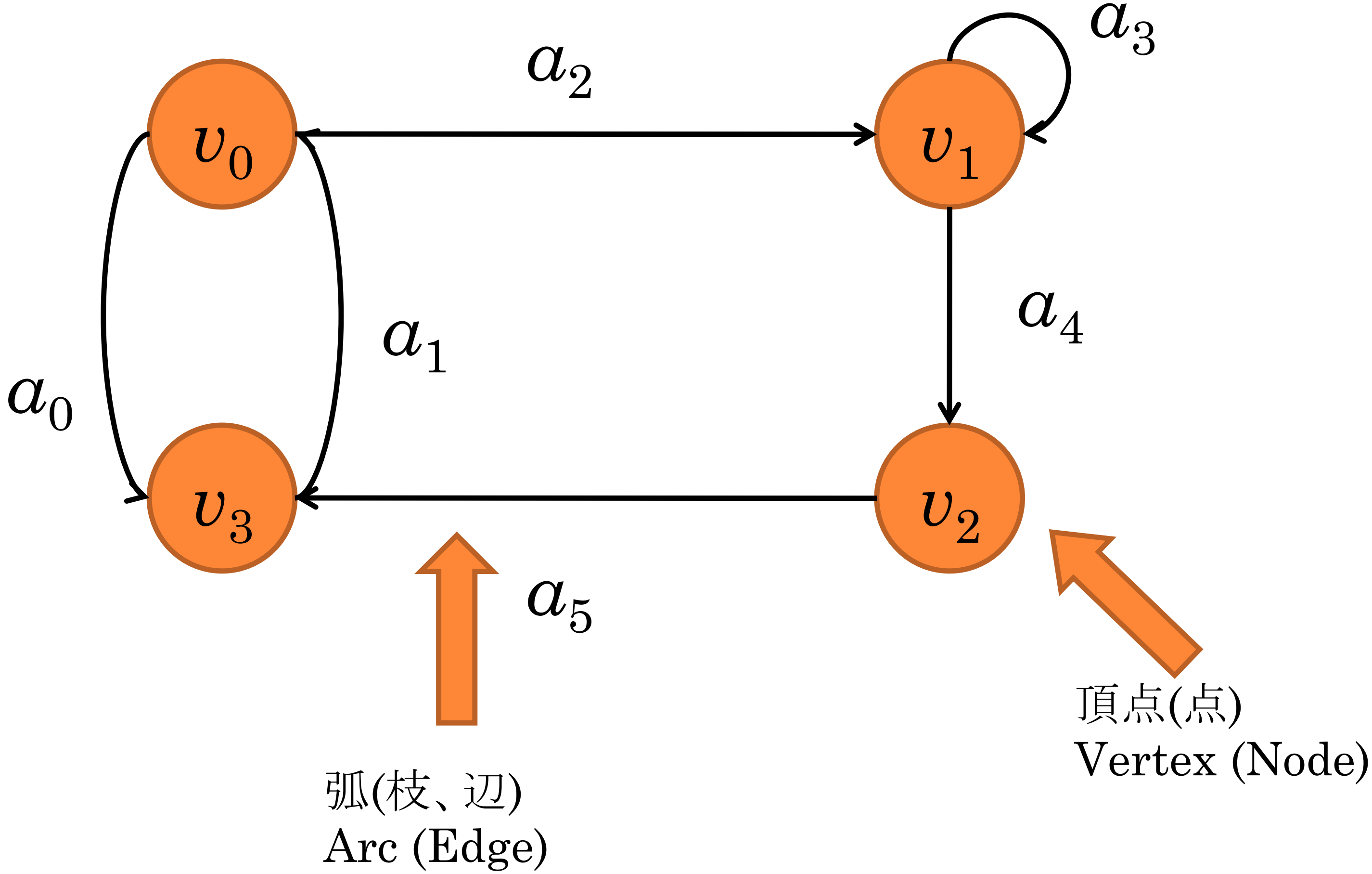
グラフを記述する

今日のテーマ

- グラフを数学の言葉で記述する
  - 対象を表す記号とその関係式
  - 図形表記と式表記の関係
  - アルゴリズムの対象となる
- グラフに関する基本用語の導入
  - グラフの構成要素に名前をつける
  - グラフ、頂点、弧



グラフの要素



グラフの定義

- 頂点(点)の集合 V : Vertex, Node
- 弧(枝、辺)の集合 A : Arc, Edge
- 弧からその始点への写像

$$\partial^+ : A \to V$$

- 弧からその終点への写像

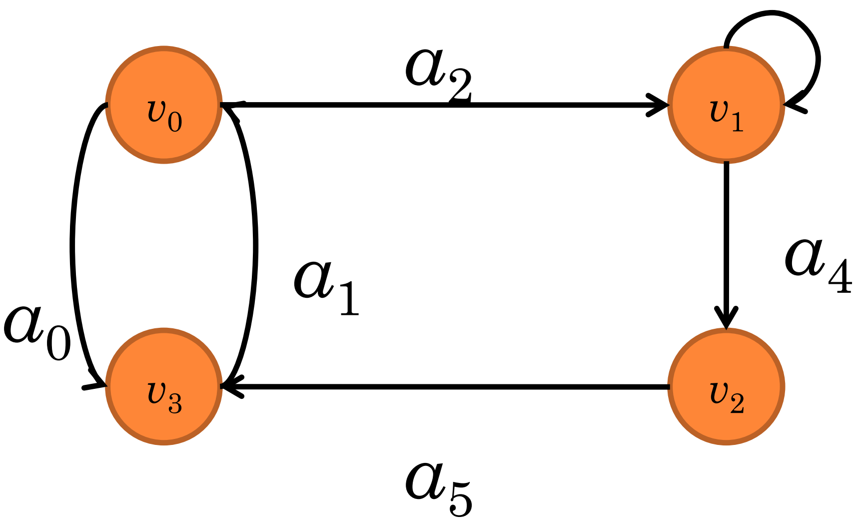
$$\partial^- : A \to V$$

- グラフの定義
  - 頂点の集合、弧の集合、弧から頂点への写像により定義

$$G = \left(V, A, \partial^+, \partial^-\right)$$

註:向きがある場合に弧(arc)、無い場合に辺(edge)と、区別することもある。

例1



$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$\partial^+ a_0 = v_0 \qquad \partial^- a_0 = v_3$$

$$\partial^+ a_1 = v_3 \qquad \partial^- a_1 = v_0$$

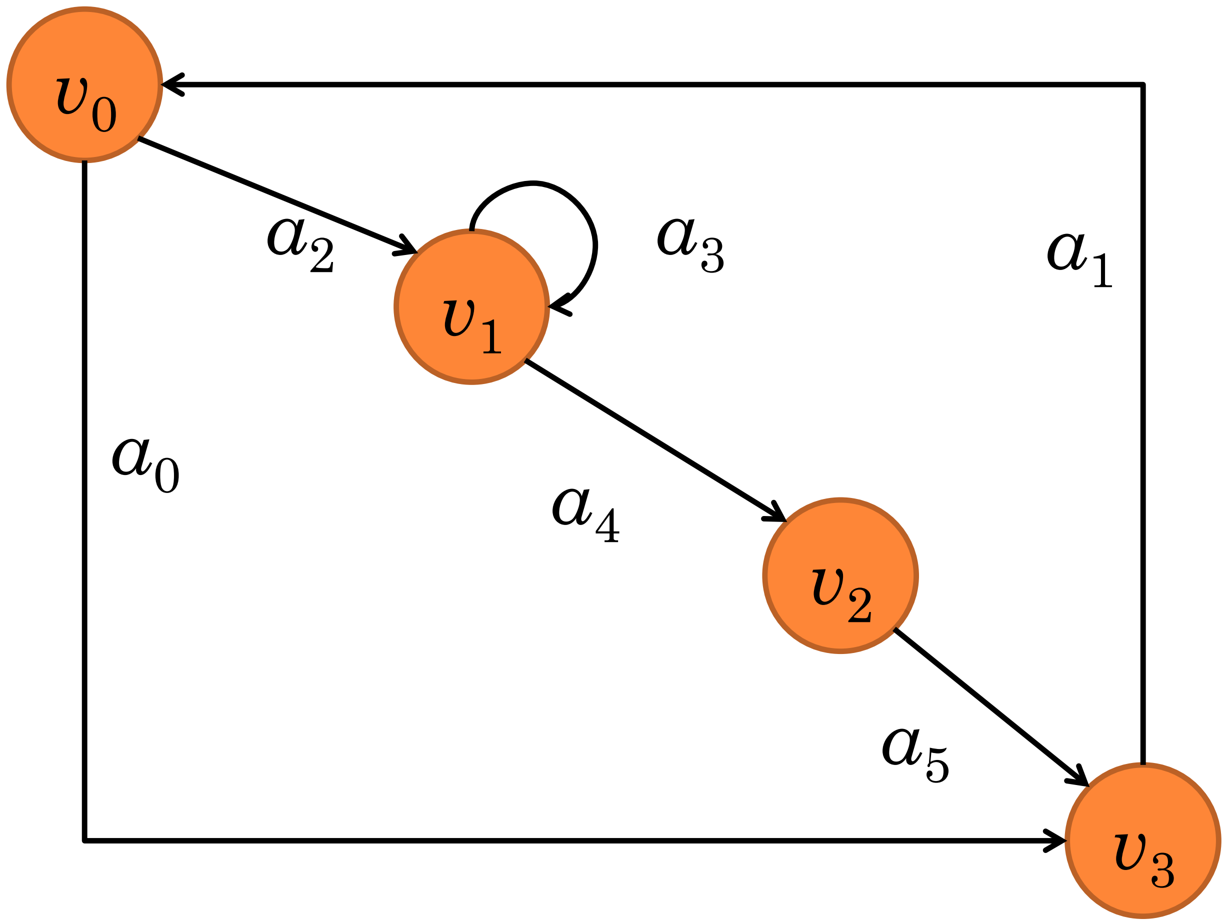
$$\partial^+ a_2 = v_0 \qquad \partial^- a_2 = v_1$$

$$\partial^+ a_3 = v_1 \qquad \partial^- a_3 = v_1$$

$$\partial^+ a_4 = v_1 \qquad \partial^- a_4 = v_2$$

$$\partial^+ a_5 = v_2 \qquad \partial^- a_5 = v_3$$

別の幾何学的表現



例2

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$$

$$\partial^+ a_0 = v_0 \quad \partial^- a_0 = v_1 \quad \partial^+ a_1 = v_0 \quad \partial^- a_1 = v_2$$

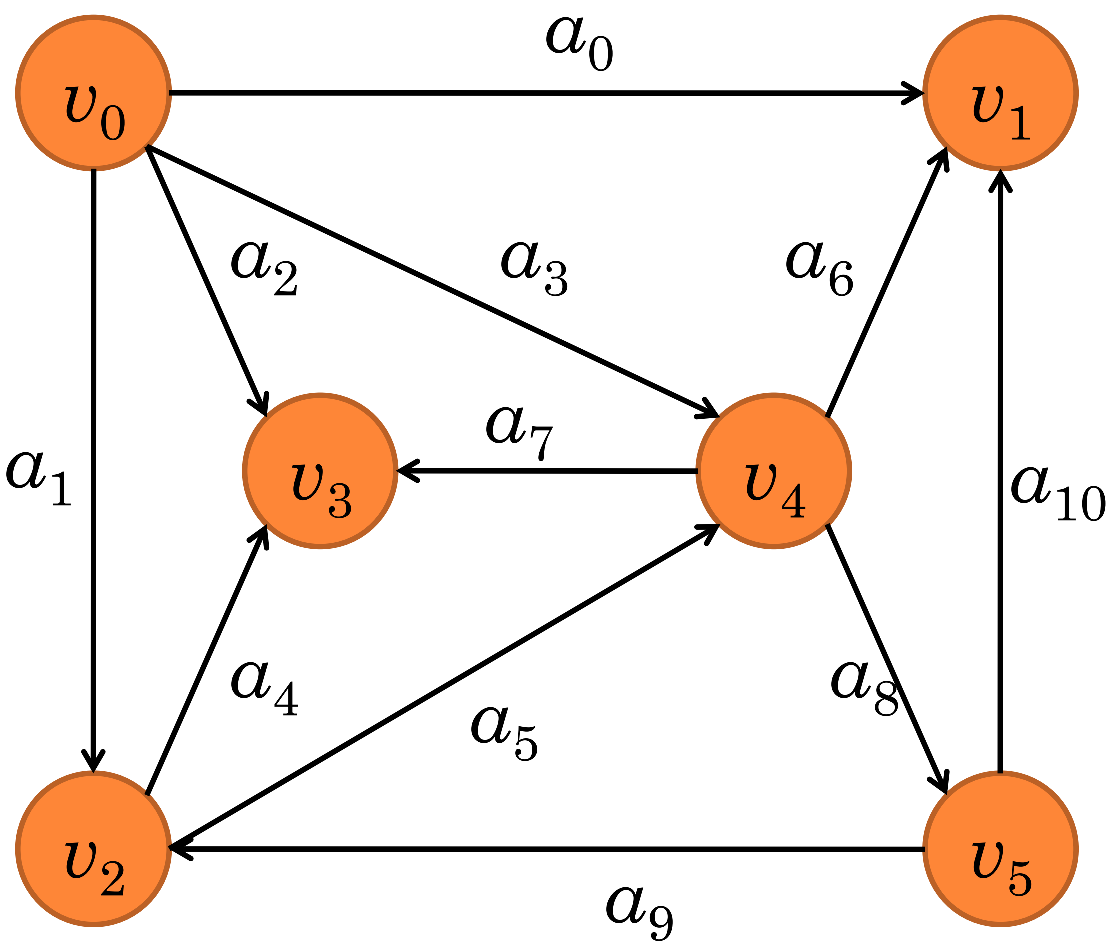
$$\partial^+ a_2 = v_0 \quad \partial^- a_2 = v_3 \quad \partial^+ a_3 = v_0 \quad \partial^- a_3 = v_4$$

$$\partial^+ a_4 = v_2 \quad \partial^- a_4 = v_3 \quad \partial^+ a_5 = v_2 \quad \partial^- a_5 = v_4$$

$$\partial^+ a_6 = v_4 \quad \partial^- a_6 = v_1 \quad \partial^+ a_7 = v_4 \quad \partial^- a_7 = v_3$$

$$\partial^+ a_8 = v_4 \quad \partial^- a_8 = v_5 \quad \partial^+ a_9 = v_5 \quad \partial^- a_9 = v_2$$

$$\partial^+ a_{10} = v_5 \quad \partial^- a_{10} = v_1$$

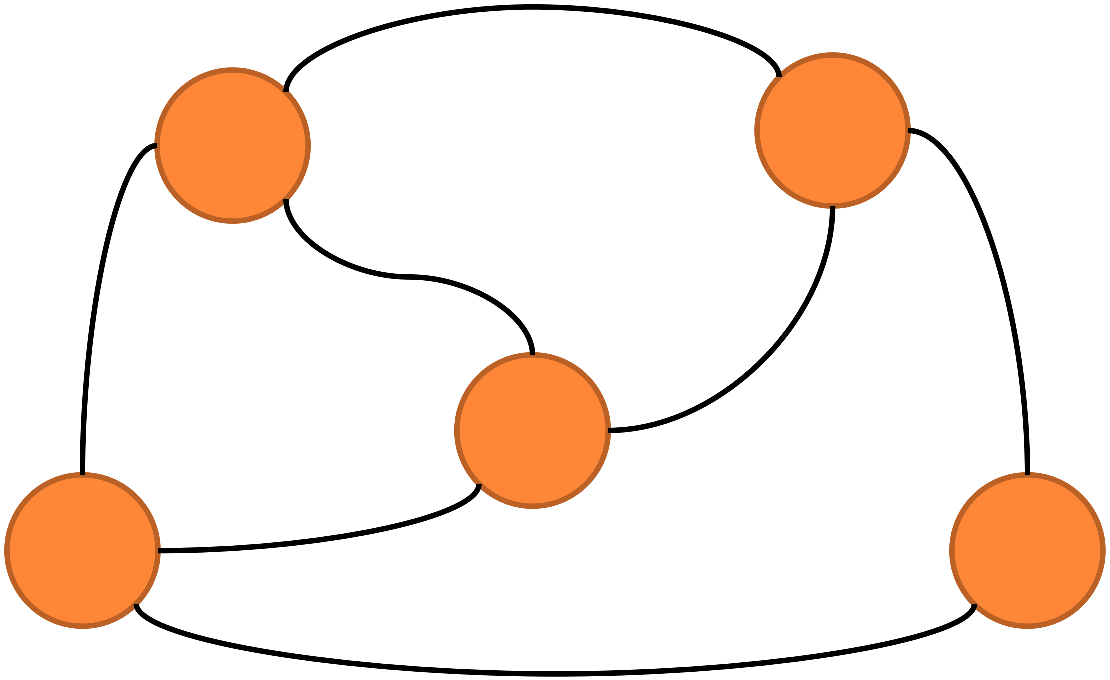

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
a_0
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_6
a_7
a_8
a_9
a_{10}

グラフの幾何学表現

- グラフの幾何学的表現 (Geometrical Representation)
  - 唯一ではない
    - 頂点の位置を変えることで、見た目は変わる
  - 頂点間の繋がり具合が問題
    - トポロジー (Topology) を問題にする
- 同形(Isomorphic)なグラフ
  - 頂点や弧の名前の付替で同じになるグラフ
  - “iso”
    - 同一、類似、等しい
  - “morphism”
    - 形

有向グラフと無向グラフ

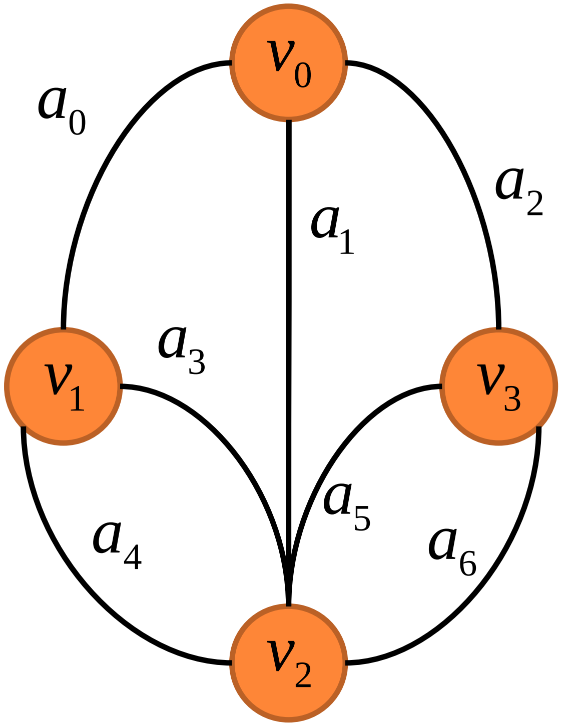
- 有向グラフ (directed graph)
  - 弧に向きがある
- 無向グラフ (undirected graph)
  - 弧に向きが無い



有向グラフと無向グラフの例

- 有向グラフ
  - Webページのリンク
  - 作業フロー
- 無向グラフ
  - インターネット接続
  - 鉄道網（例外あり）

例：Königsberg Bridges



$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

$$\partial a_0 = (v_0, v_1) \quad \partial a_1 = (v_0, v_2)$$

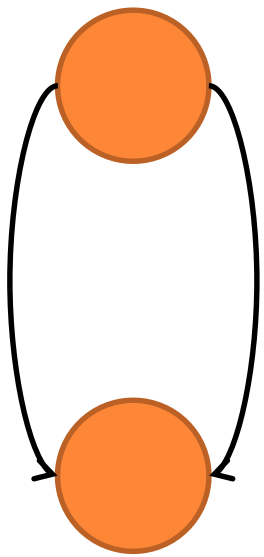
$$\partial a_2 = (v_0, v_3) \quad \partial a_3 = (v_1, v_2)$$

$$\partial a_4 = (v_1, v_2) \quad \partial a_5 = (v_2, v_3)$$

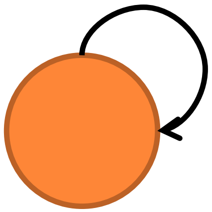
$$\partial a_6 = (v_2, v_3)$$

並列弧と孤立弧

- 並列弧



- 孤立弧



- 単純なグラフ
  - 並列弧と孤立弧が無い

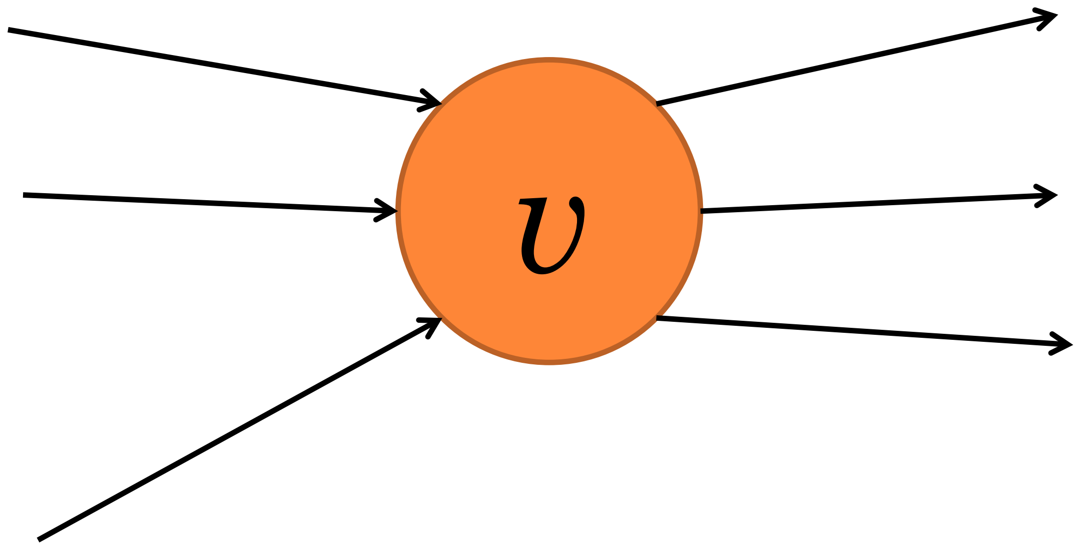
次数 (DEGREE)

- 頂点 v から出る弧の全体　$\delta^+ v = \{a \mid v = \partial^+ a\}$
- 頂点 v の正の次数: 頂点 v から出る弧の数 $|\delta^+ v|$

- 頂点 v に入る弧の全体　$\delta^- v = \{a \mid v = \partial^- a\}$
- 頂点 v の負の次数: 頂点 v に入る弧の数 $|\delta^- v|$

次数 (DEGREE)

$\delta^{-}v$



$\delta^{+}v$

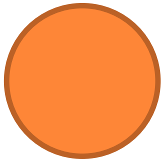
Negative Degree
In-degree

Positive Degree
Out-degree

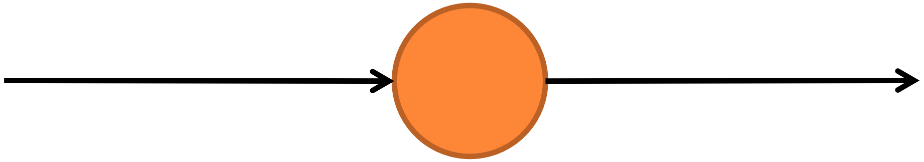
- 次数
  - 頂点に接続している弧の総数

$$k_v = \left|\delta^+ v\right| + \left|\delta^- v\right|$$

- 孤立点:次数0の点

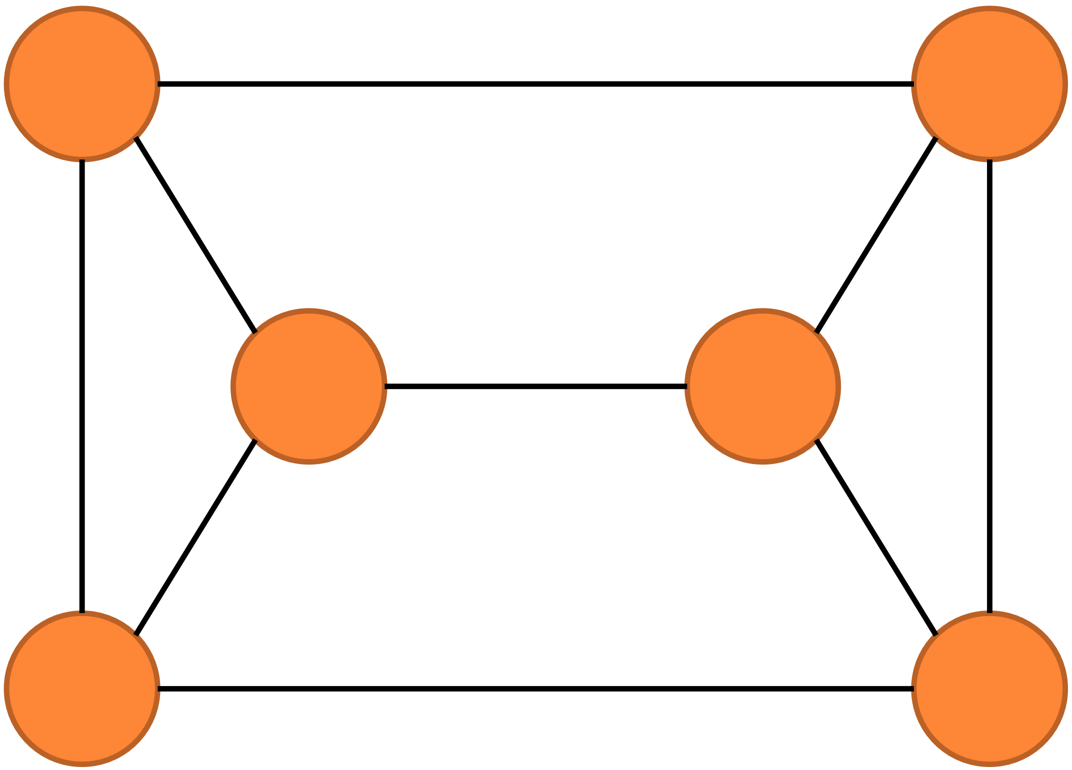


- 直列弧:次数2の頂点に接続する弧



正則グラフ (Regular Graph)

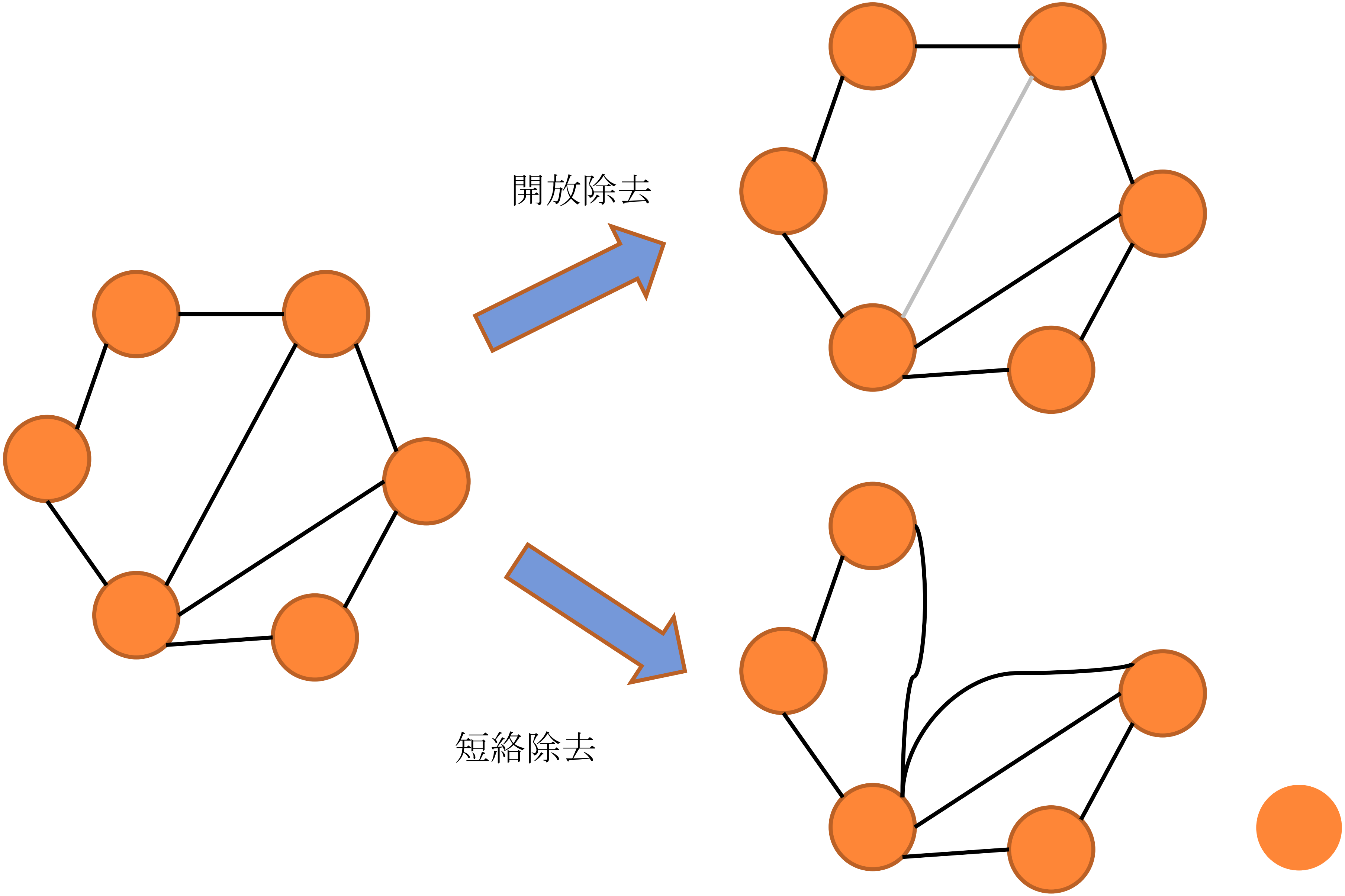
- 全ての頂点の次数が等しいグラフ



3-regular graph

弧の除去

- 開放除去(open-circuit, delete)
  - 単に弧を除去する
- 短絡除去(short-circuit, contract)
  - 除去した弧の両端の頂点を一つにまとめる


開放除去
短絡除去

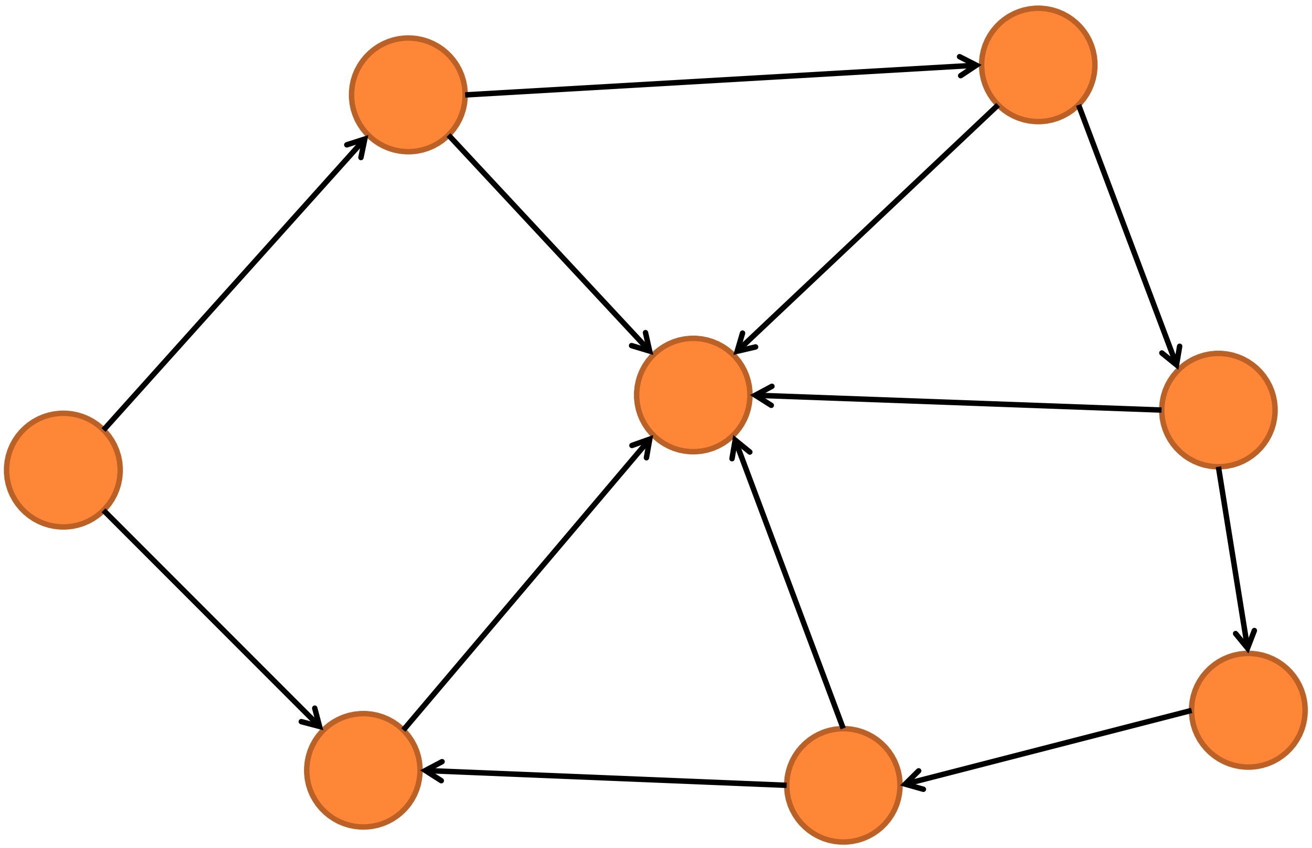
部分グラフ(SUB-GRAPH)

- グラフG のうち、頂点及び弧の一部から構成されるグラフをG の部分グラフと呼ぶ
- 部分グラフの構成
  - グラフG からいくつかの弧を開放除去する
  - グラフG からいくつかの孤立点を除去する

部分グラフの種類

- Gの全域部分グラフ(spanning sub-graph)
  - G と同じ頂点集合を持つ G の部分グラフ H
- G の誘導部分グラフ (induced sub-graph)
  - G の頂点集合 V の部分集合 U に対して、両端点がUに属する弧の全体集合を $A(U)$ とするとき、Uと$A(U)$ からなるグラフ。

Spanning Tree



Induced Subgraph