

## 特殊なグラフ

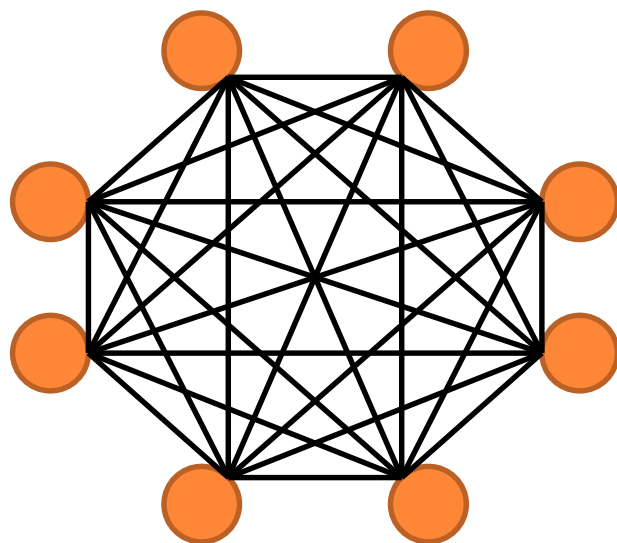
## 今回の目的: 特別な構造のグラフの導入

- 完全グラフ (complete graphs)
- 二部グラフ (bipartite graphs)
- 道 (paths)
- 閉路 (circles)
- 木 (trees)
- 平面グラフ (planer graphs)
- 双対グラフ (dual graphs)



# 完全グラフ (COMPLETE GRAPHS)

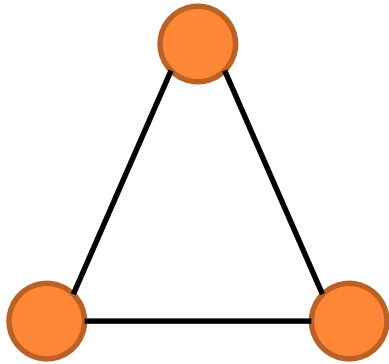
- 任意の相異なる頂点の組に必ず一つの弧が存在する無向グラフ



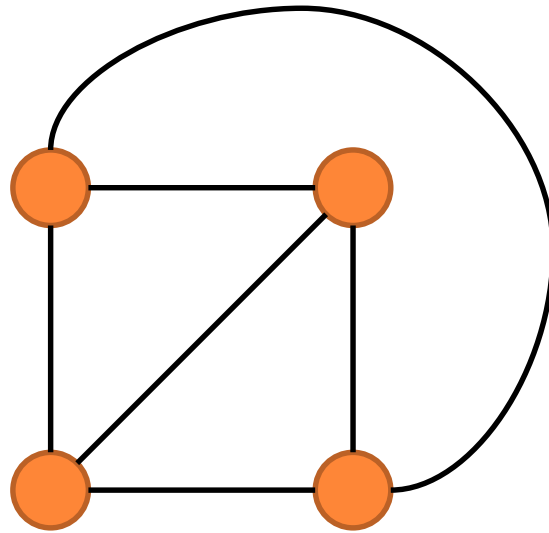
$K_8$

Komplett  
ドイツ語: 完全な





$K_3$



$K_4$



# 完全グラフの弧の数

○  $K_n$ の弧の数 
$$N_a(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

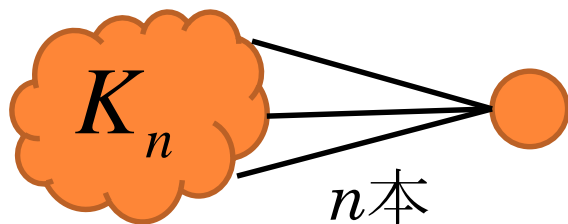
○ 数学的帰納法による証明

- $n=3$ の場合: 明らか
- ある $n$ で正しいと仮定する。頂点を一つ追加することは、その頂点から既存の頂点群に向かって、弧を $n$ 本追加することに対応する

$$N_a(n+1) = N_a(n) + n$$

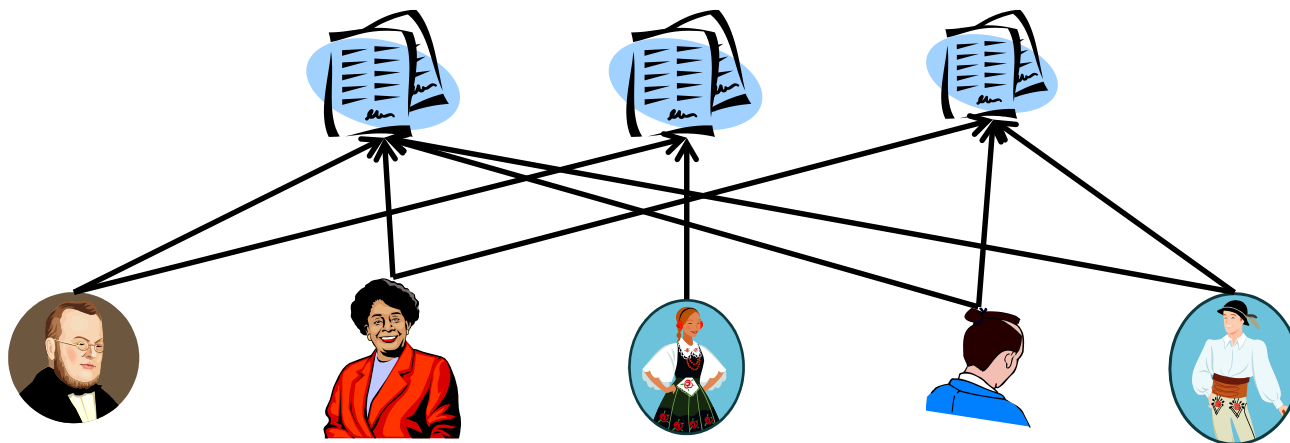
$$= \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1+2)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$



# 二部グラフ (BIPARTITE GRAPHS)

- 二種類のモノの関係を表す
  - 俳優→映画
  - 研究者→論文
- ここから、以下のような関係を得ることができる
  - 俳優間の共演関係
  - 研究者間の共同研究の関係



## 例: 共演関係のグラフ

- ケビン・ベーコンゲーム
  - 俳優の「距離」を測る
  - <http://oracleofbacon.org>
  - 映画俳優のデータベース
    - <http://www.imdb.com>
- グラフの可視化
  - <http://www.math.ucsd.edu/~fan/complex/>
- 参考書
  - 増田直紀「私たちはどうつながっているのかーネットワークの科学を応用する」(中公新書、2007)
  - 安田雪「『つながり』を突き止める」(光文社新書、2010)



## 二部グラフ (BIPARTITE GRAPHS)

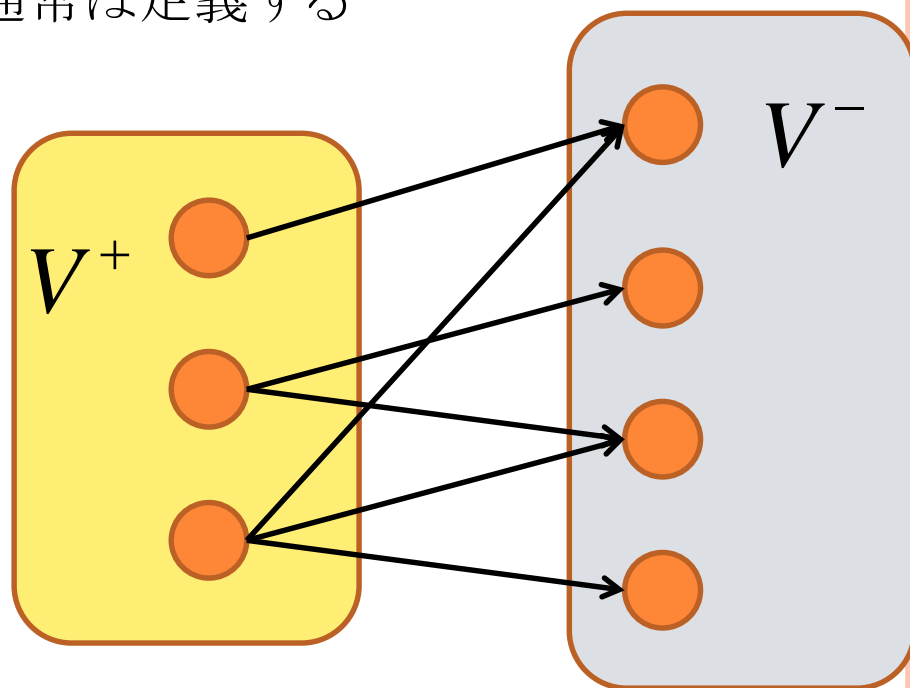
- グラフの頂点集合が二つに分割されている

$$V = V^+ \cup V^-, \quad V^+ \cap V^- = \emptyset$$

- 各弧がその二つの集合の頂点を結ぶ
  - 弧の向きは $V^+$  から $V^-$  へと、通常は定義する

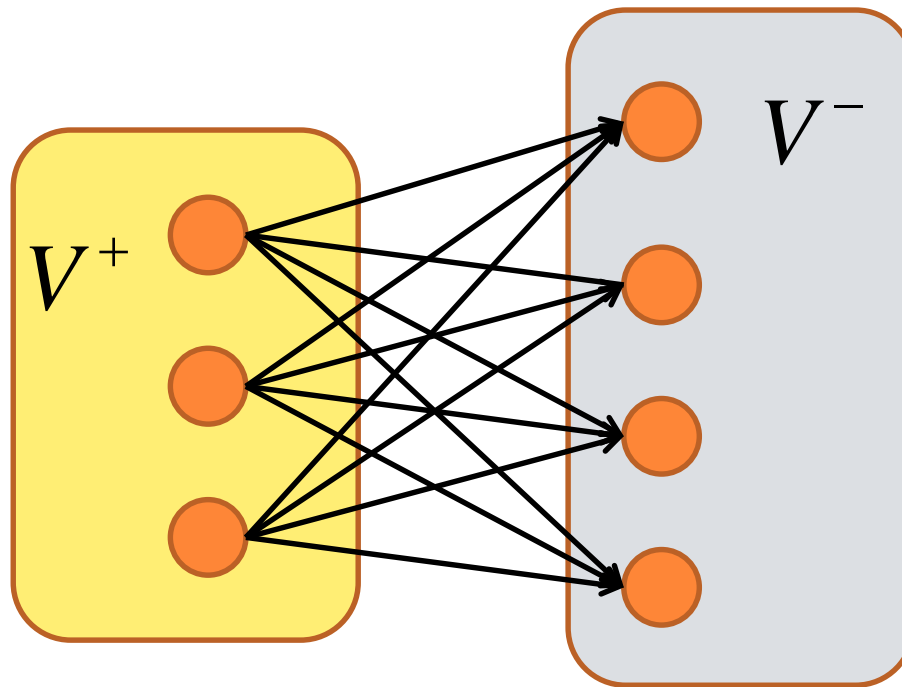
$$\forall a \in A$$

$$\partial^+ a \in V^+ \wedge \partial^- a \in V^-$$



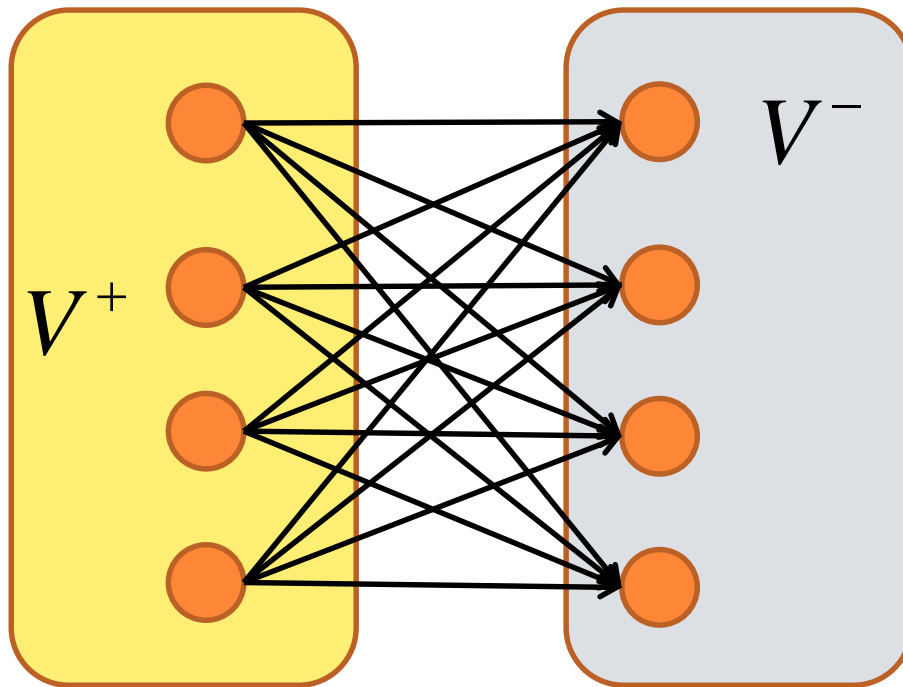


# 完全二部グラフ (COMPLETE BIPARTITE GRAPHS)



$K_{3,4}$  任意の頂点の組  $\{(v, w) \mid v \in V^+, w \in V^-\}$  に対して辺がある



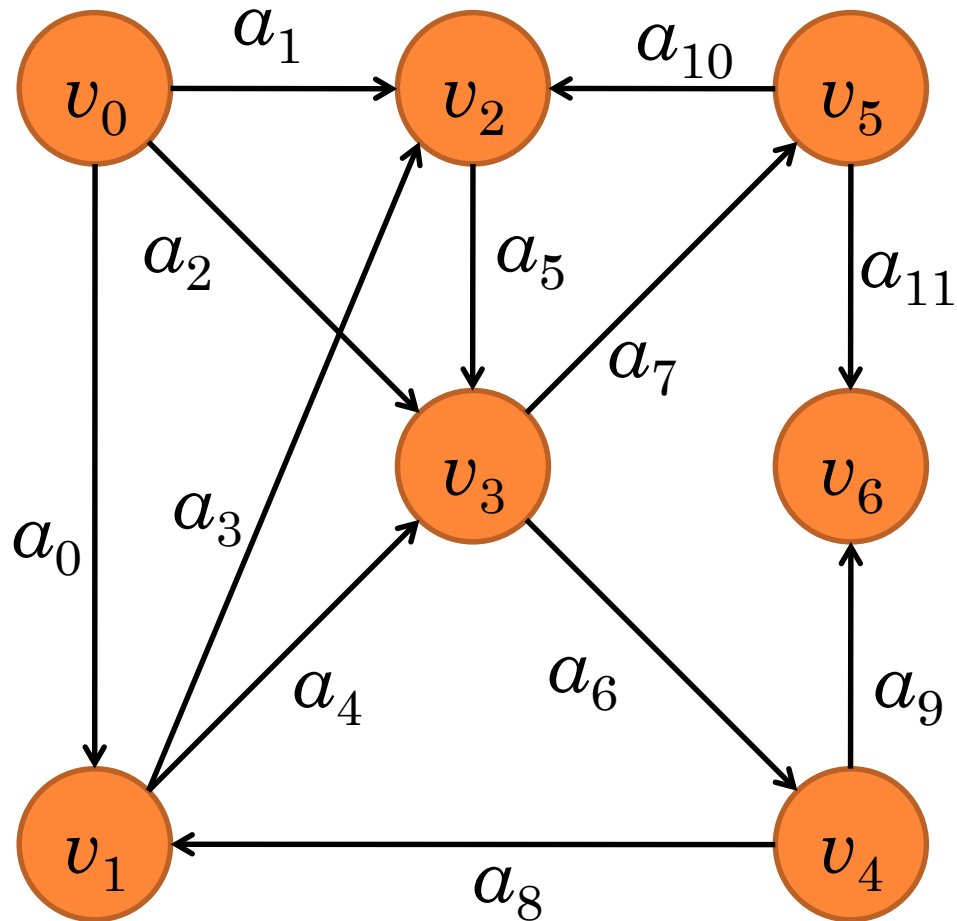


$K_{4,4}$



# 道 (PATHS)

- 始点から終点までの経路を「道」と言う



$v_0$ から $v_6$ への道

$a_0 a_3 a_5 a_7 a_{11}$

$a_0 a_3 a_5 a_6 a_9$

$a_0 a_4 a_7 a_{11}$

$a_0 a_4 a_6 a_9$

$a_1 a_5 a_7 a_{11}$

$a_1 a_5 a_6 a_9$

...



- 通常、「道」は弧の向きを無視して考えるが
- 弧の向きが揃っている場合
  - 有向道 (directed path)
- 同じ弧を一度しか通らない道
  - 単純な道 (simple path)
- 同じ頂点を一度しか通らない道
  - 初等的な道 (elementary path)
- 始点と終点と同じ道
  - 閉路 (closed path)

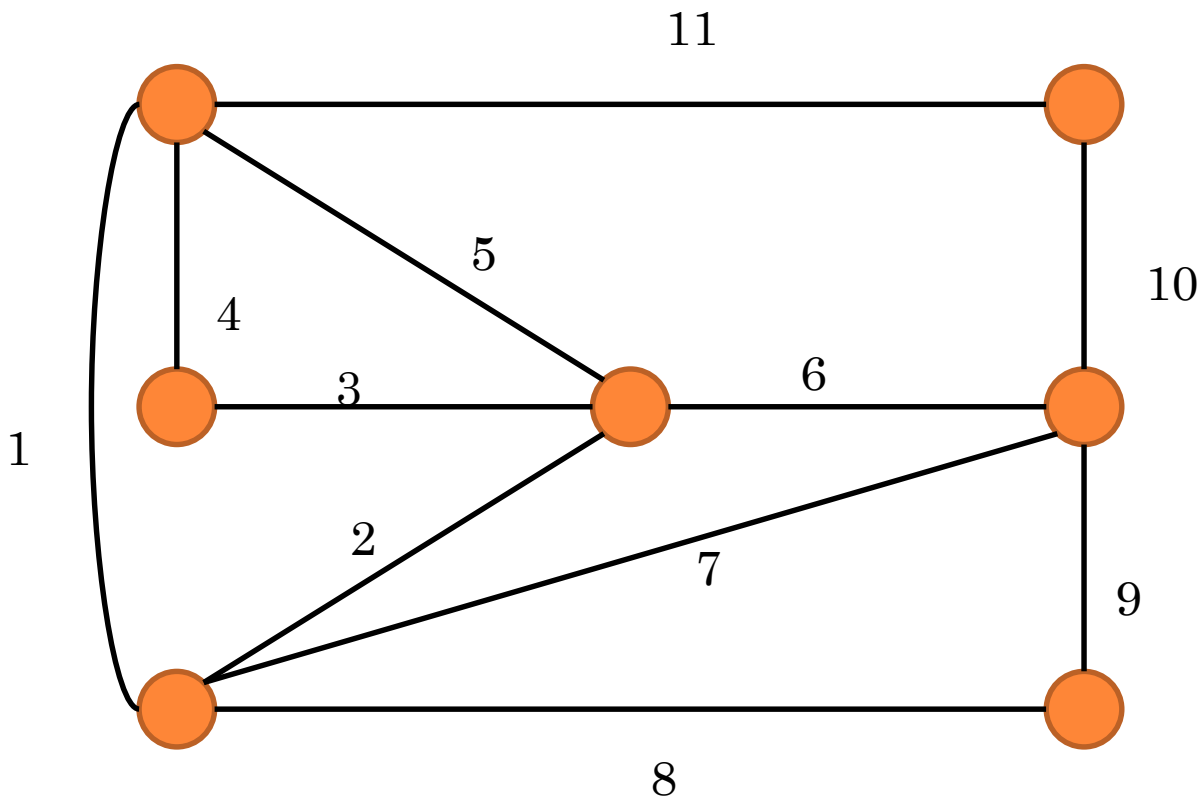


# 閉路 (CLOSED PATH, CIRCLES)

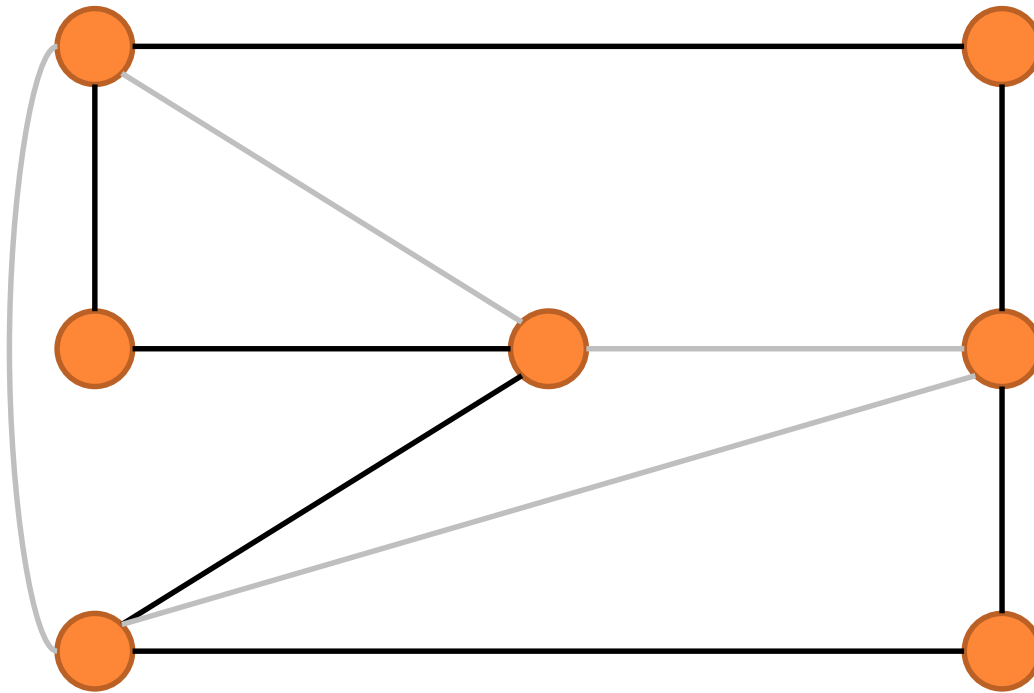
- 始点と終点が同じ道を「閉路」と呼ぶ
- Euler閉路
  - 全ての弧を一度ずつ経由する閉路
  - 一筆書き
- Hamilton閉路
  - 全ての頂点を一度ずつ経由する閉路
- 無閉路グラフ (acyclic graphs)
  - 閉路を含まないグラフ



# EULER閉路

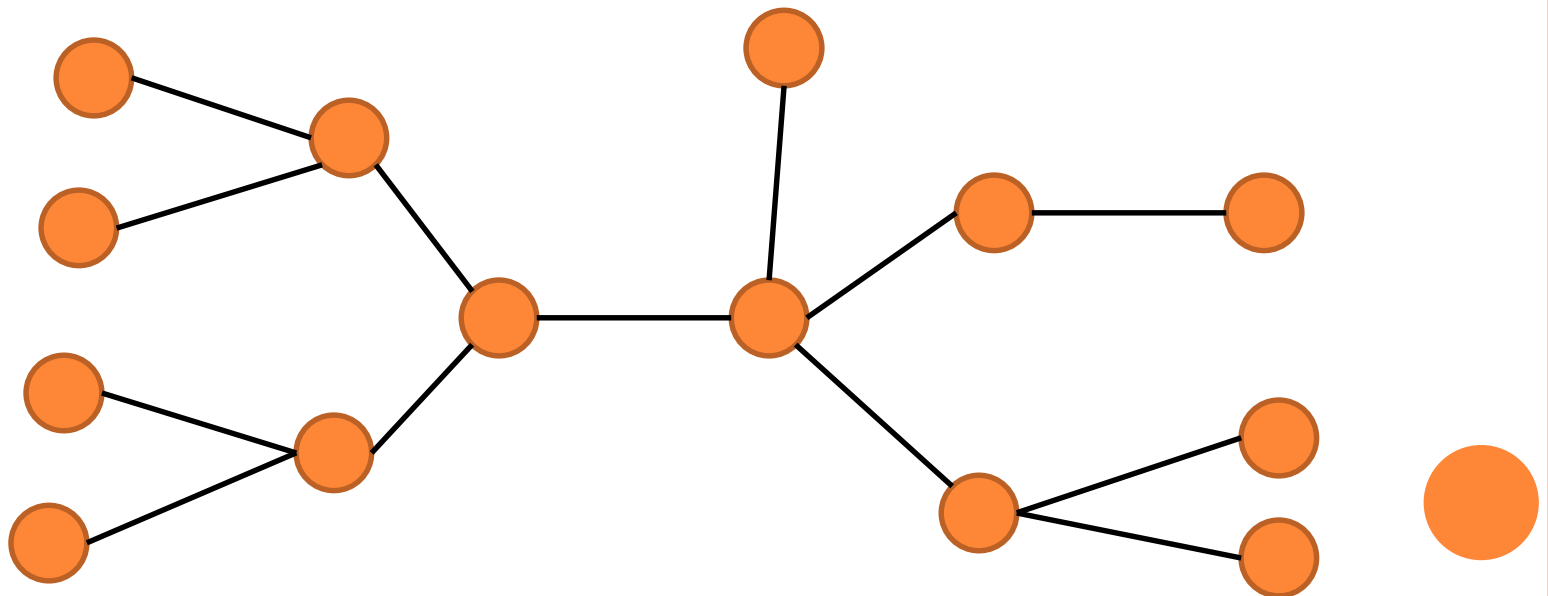


# HAMILTON閉路



# 木 (TREE)

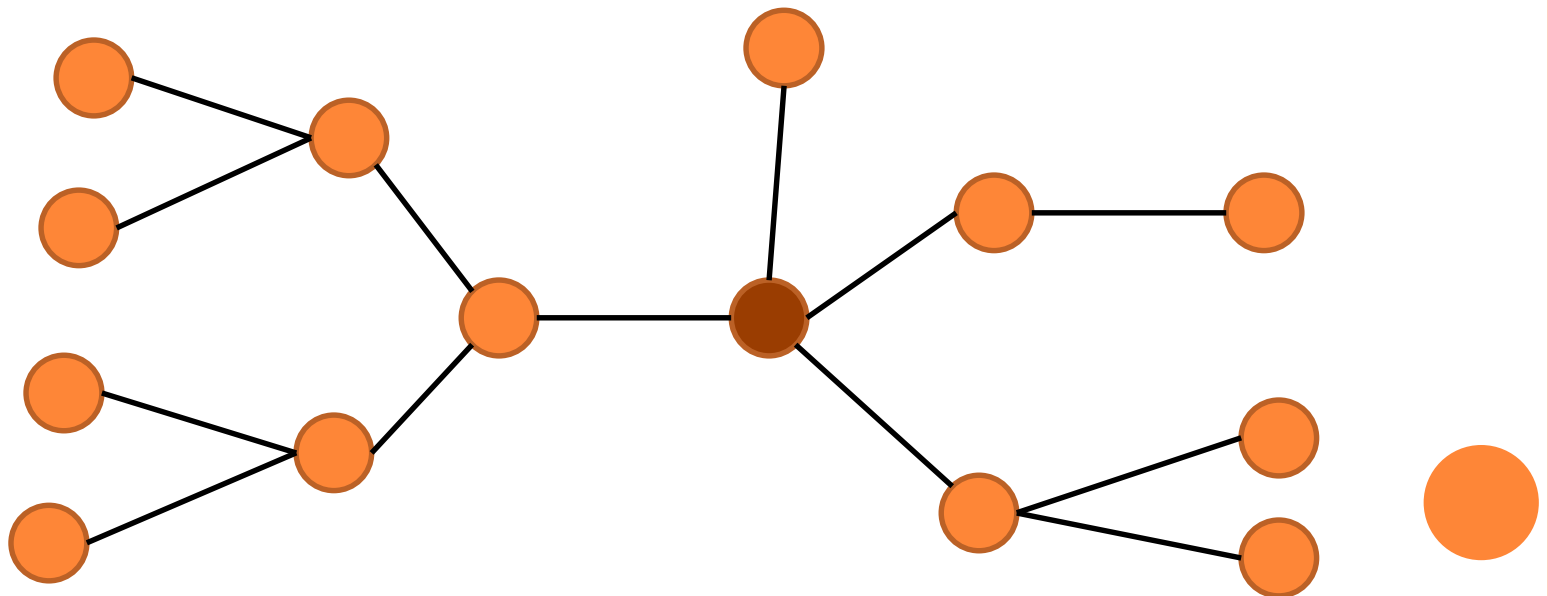
- 閉路を含まない連結なグラフ
  - 「木」の形
  - 通常は無向グラフ
  - 葉 (leaf) : 次数が1である点



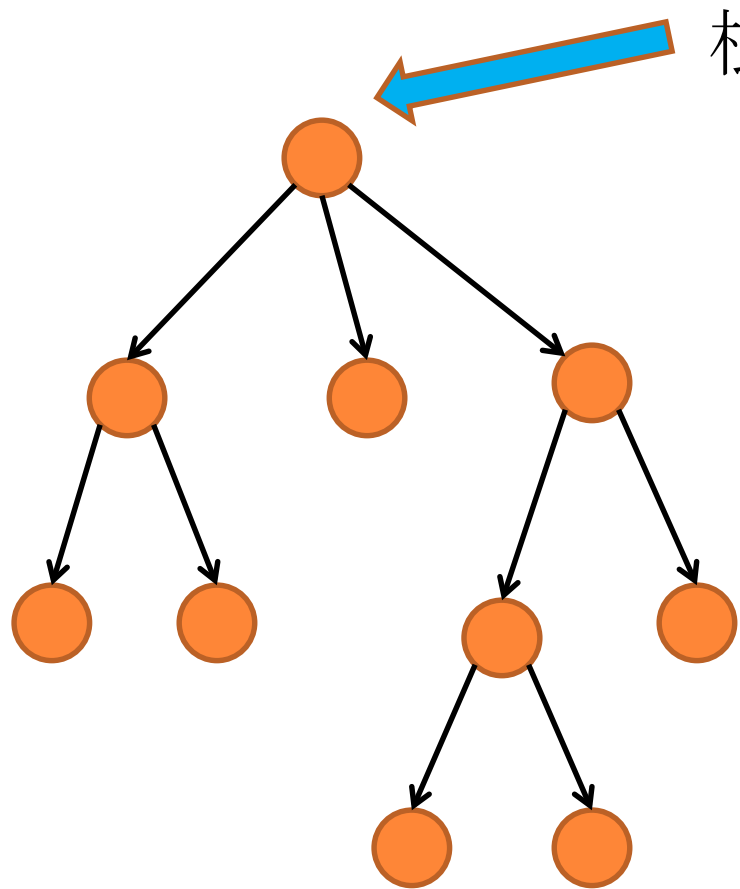


# 木 (TREE)

- 無向木では、任意の点を選んで根(root)とできる

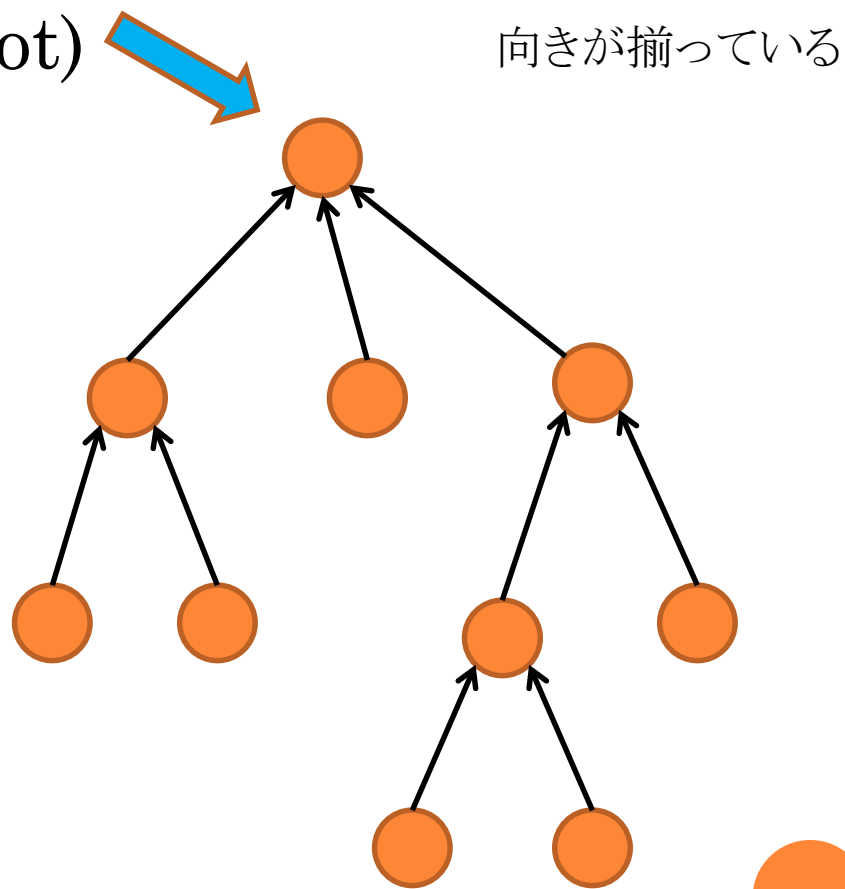


# 有向木(DIRECTED TREE)



外向木(out-tree)

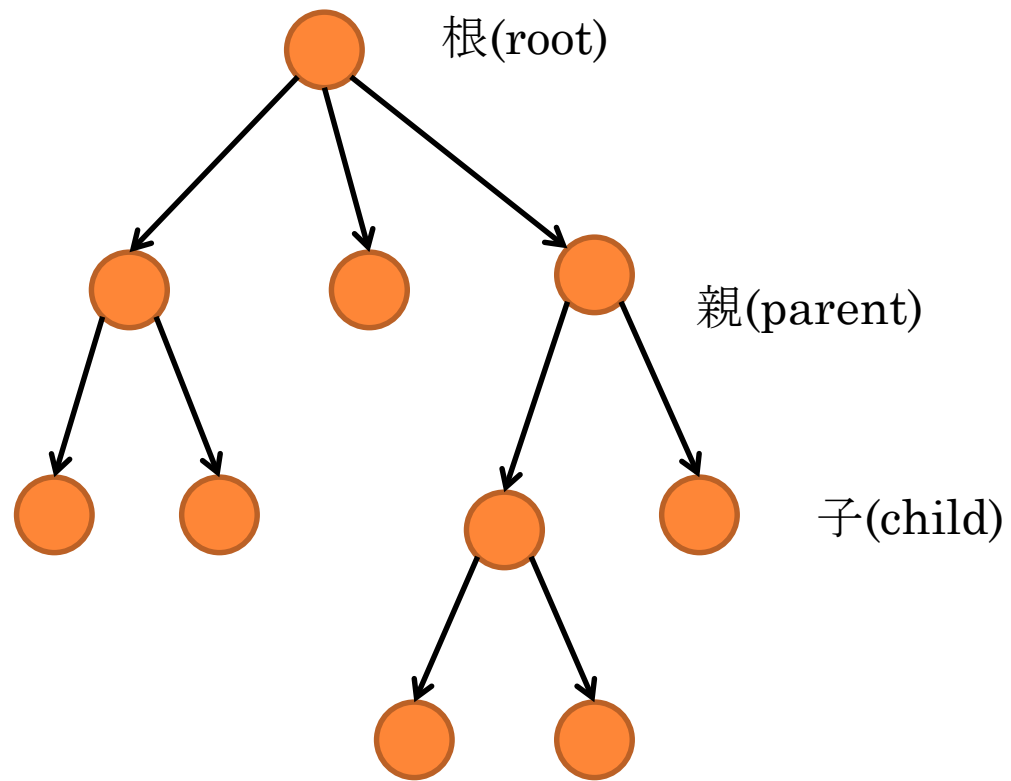
根(root)



向きが揃っている

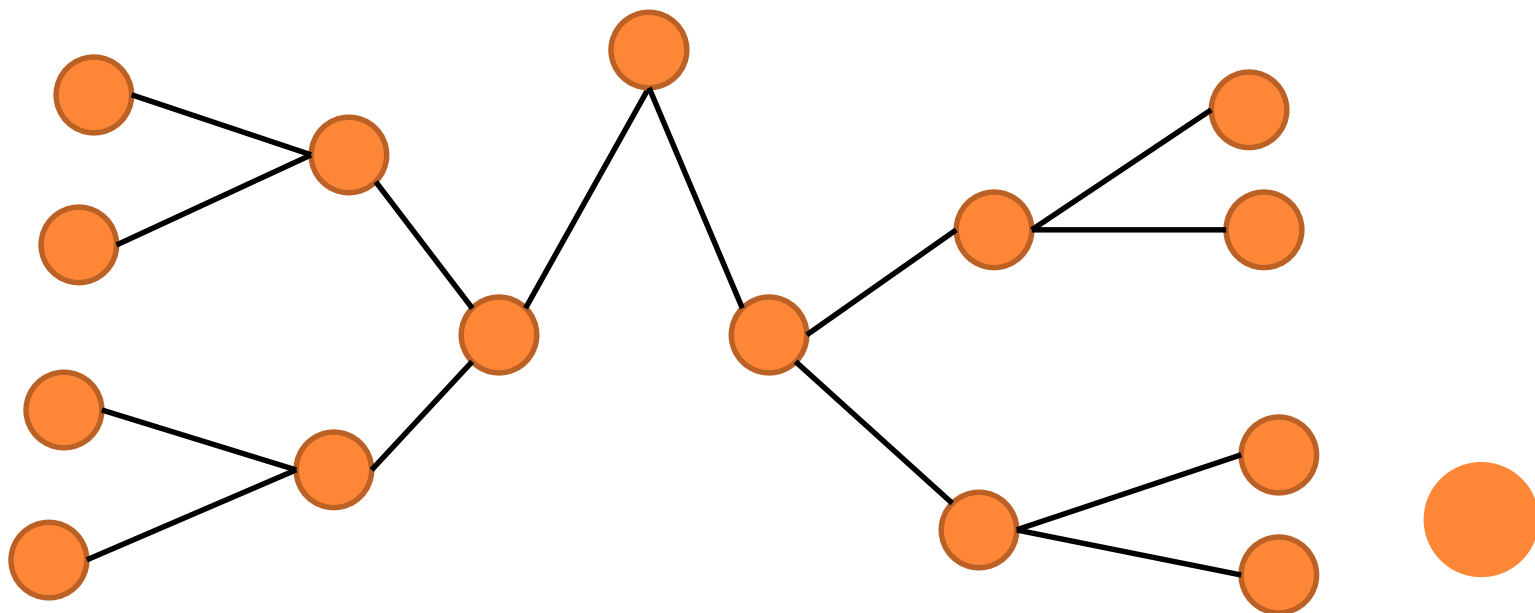
内向木(in-tree)





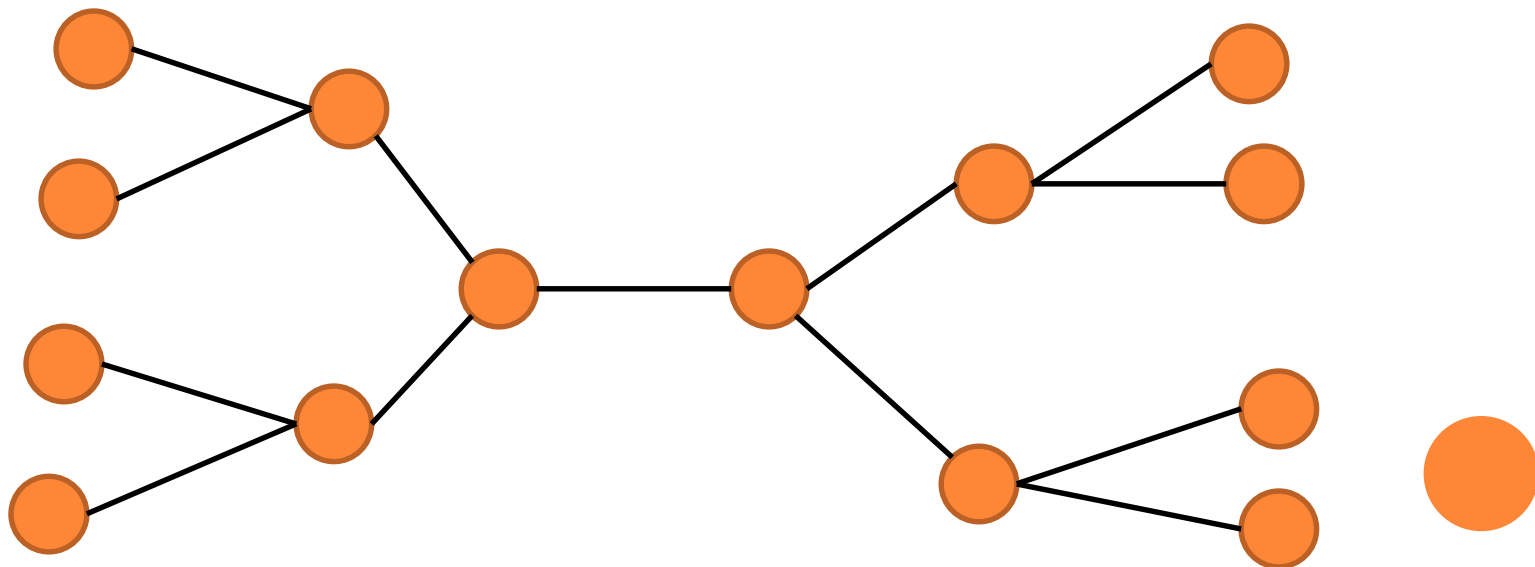
# 二分木(BINARY TREE)

- 葉以外の点が、二個の子を持つ木



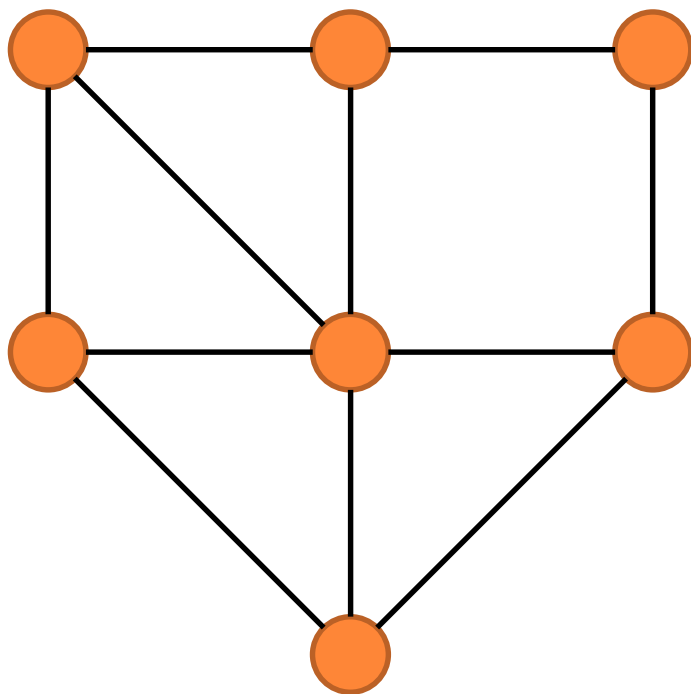
# ケーリー木(CAYLEY TREE)

- 葉以外の点の次数が等しい木



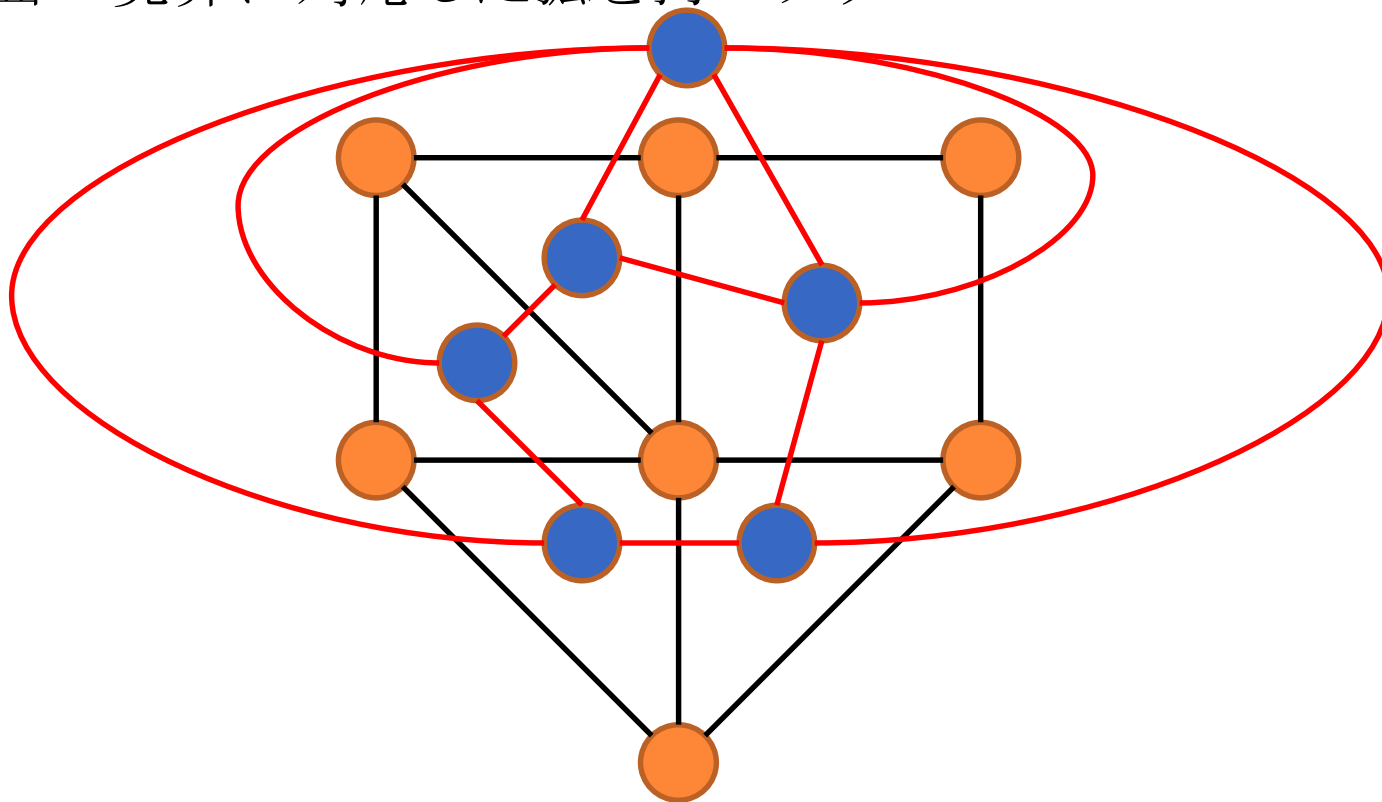
## 平面グラフ(PLANER GRAPH)

- 頂点の配置によって、弧が交差しないように描くことができるグラフ



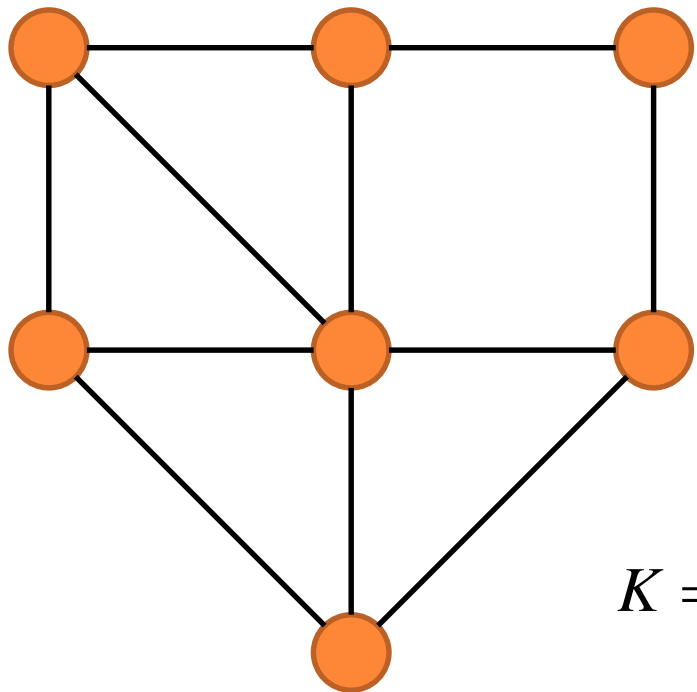
## 平面グラフの双対グラフ(DUAL GRAPH)

- 平面グラフの弧で囲まれた面ごとに、一つの頂点を置き、面の境界に対応した弧を持つグラフ

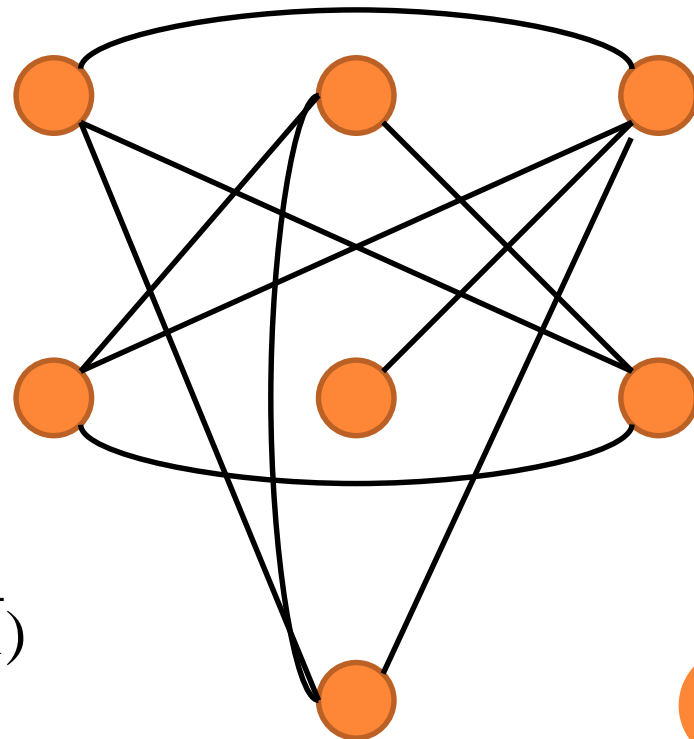


# 補グラフ (COMPLEMENT)

$$G = (V, A)$$



$$\bar{G} = (V, \bar{A})$$



$$K = (V, A \cup \bar{A})$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

