

「グラフと組み合わせ」課題 1(解答例)

2015/4/13

1 集合の演算

二つの集合

$$X = \{x \mid x \in N, x \leq 12\}$$

$$Y = \{x \mid x = 3n + 1, n \in N, n \leq 3\}$$

について、以下の集合を求め、要素を列挙することで答えなさい。

1. $X \cup Y$
2. $X \cap Y$
3. $X \setminus Y$

解答例

最初に X と Y を要素の列挙によって表現する。

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$Y = \{4, 7, 10\}$$

1. $X \cup Y$

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

4. $X \cap Y$

$$X \cap Y = \{4, 7, 10\}$$

5. $X \setminus Y$

$$X \setminus Y = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$$

2 数学的帰納法

自然数 n に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^n k(k-1)^2 = \frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n-2)$$

解答例

- $n=1$ の場合

$$\text{LHS} = \sum_{k=1}^1 k(k-1)^2 = 1 \cdot 0^2 = 0$$

$$\text{RHS} = \frac{1}{12} 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

従って等号が成り立つ。

- ある n に対して等号が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k-1)^2 &= \sum_{k=1}^n k(k-1)^2 + (n+1)n^2 \\ &= \frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n-2) + (n+1)n^2 \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)[(n-1)(3n-2) + 12n] \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2 + 7n + 2) = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1) \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3(n+1)-2) \end{aligned}$$

つまり、 $n+1$ に対しても成り立つことがわかる。従って、任意の自然数 n に対して成り立つ。