

「グラフと組み合わせ」課題6 (解答例)

2015/5/25

1 列挙

n 個の文字の集合

$$S = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$$

の全てからなる文字列、つまり同じ文字を含まない、長さ n の文字列を列挙する方法を考える。

1. 何通りの文字列があるかを答えなさい。また、そのことが正しいことを数学的帰納法で示しなさい。
2. 文字列を列挙する再帰的アルゴリズムを構築しなさい。
3. $n=4$ の場合に、上記のアルゴリズムに従って文字列を列挙しなさい。列挙する途中の過程についても示しなさい。

解答例

1. n 個の文字から構成され、同じ文字を含まない文字列の総数は $n!$ である。このことを数学的帰納法で証明する。
 - $n=1$ の場合、明らか。
 - ある文字数 n の時、文字列の総数が $n!$ であると仮定する。各文字列に対して、新しい文字 α を加えた文字列を生成することを考える。文字の間が $n-1$ 箇所、それに先頭と末尾を加え、文字 α を加えて長さ $n+1$ の文字列を作る方法は通りである。 $n!$ 個のそれぞれに一文字加える方法が $n+1$ 通りあるため、 $(n+1) \times n! = (n+1)!$ 通りの文字列が生成される。
2. アルゴリズムを `enumString(L, A)` とする。ここで、 L は、文字列作成に既に使用した文字のリストとする。つまり、最後には生成された文字列となる。その初期値は空である。 A は、文字列として未だ使用されていない文字のリストとする。その初期値は S である。

```

enumString(L, A){
  if (|A| == 0) {L を印刷}
  else {
    BはAの複製
    forall (s ∈ A) {
      L ← L ∪ {s}
      B ← B \ {s}
      enumString(L, B)
      L ← L \ {s}
      B ← B ∪ {s}
    }
  }
}

```

3. $S = \{a, b, c, d\}$ の場合の動作例を示す。再帰関数を f とする。

$f\{\{ \}, [a, b, c, d]\}$	$f\{[a], [b, c, d]\}$	$f\{[a, b], [c, d]\}$	$f\{[a, b, c], [d]\}$	$f\{[a, b, c, d], [\]\}$
			$f\{[a, b, d], [c]\}$	$f\{[a, b, d, c], [\]\}$
		$f\{[a, c], [b, d]\}$	$f\{[a, c, b], [d]\}$	$f\{[a, c, b, d], [\]\}$
			$f\{[a, c, d], [c]\}$	$f\{[a, c, d, b], [\]\}$
		$f\{[a, d], [b, c]\}$	$f\{[a, d, b], [c]\}$	$f\{[a, d, b, c], [\]\}$
			$f\{[a, d, c], [d]\}$	$f\{[a, d, c, b], [\]\}$
	$f\{[b], [a, c, d]\}$	$f\{[b, a], [c, d]\}$	$f\{[b, a, c], [d]\}$	$f\{[b, a, c, d], [\]\}$
			$f\{[b, a, d], [c]\}$	$f\{[b, a, d, c], [\]\}$
		$f\{[b, c], [a, d]\}$	$f\{[b, c, a], [d]\}$	$f\{[b, c, a, d], [\]\}$
			$f\{[b, c, d], [a]\}$	$f\{[b, c, d, a], [\]\}$

		$f\{[b,d],[a,c]\}$	$f\{[b,d,a],[c]\}$	$f\{[b,d,a,c],[]\}$
			$f\{[b,d,c],[a]\}$	$f\{[b,d,c,a],[]\}$
	$f\{[c],[a,b,d]\}$	$f\{[c,a],[b,d]\}$	$f\{[c,a,b],[d]\}$	$f\{[c,a,b,d],[]\}$
			$f\{[c,a,d],[b]\}$	$f\{[c,a,d,b][]\}$
		$f\{[c,b],[a,d]\}$	$f\{[c,b,a],[d]\}$	$f\{[c,b,a,d],[]\}$
			$f\{[c,b,d],[a]\}$	$f\{[c,b,d,a],[]\}$
		$f\{[c,d],[a,b]\}$	$f\{[c,d,a],[b]\}$	$f\{[c,d,a,b],[]\}$
			$f\{[c,d,b],[a]\}$	$f\{[c,d,b,a],[]\}$
	$f\{[d],[a,b,c]\}$	$f\{[d,a],[b,c]\}$	$f\{[d,a,b],[c]\}$	$f\{[d,a,b,c],[]\}$
			$f\{[d,a,c],[b]\}$	$f\{[d,a,c,b],[]\}$
		$f\{[d,b],[a,c]\}$	$f\{[d,b,a],[c]\}$	$f\{[d,b,a,c],[]\}$
			$f\{[d,b,c],[a]\}$	$f\{[d,b,c,a],[]\}$
		$f\{[d,c],[a,b]\}$	$f\{[d,c,a],[b]\}$	$f\{[d,c,a,b],[]\}$
			$f\{[d,c,b],[a]\}$	$f\{[d,c,b,a],[]\}$

2 実装

前問で作成した再帰的アルゴリズムをプログラムとして実装し、動作を確認しなさい。

解答例

プログラムは別紙に示す。実行結果を以下に示す。各行の最後が列挙すべき長

さ 4 の文字列である。

a ab abc abcd

abd abdc

ac acb acbd

acd acdb

ad adb adbc

adc adcb

b ba bac bacd

bad badc

bc bca becd

bed becd

bd bda bdac

bdc bdca

c ca cab cabd

cad cadb

cb cba cbad

cbd cbda

cd cda cdab

cdb cdba

d da dab dabc

dac dacb

db dba dbac

dbc dbca

dc dca dcab

dcb dcba

24 strings are found.