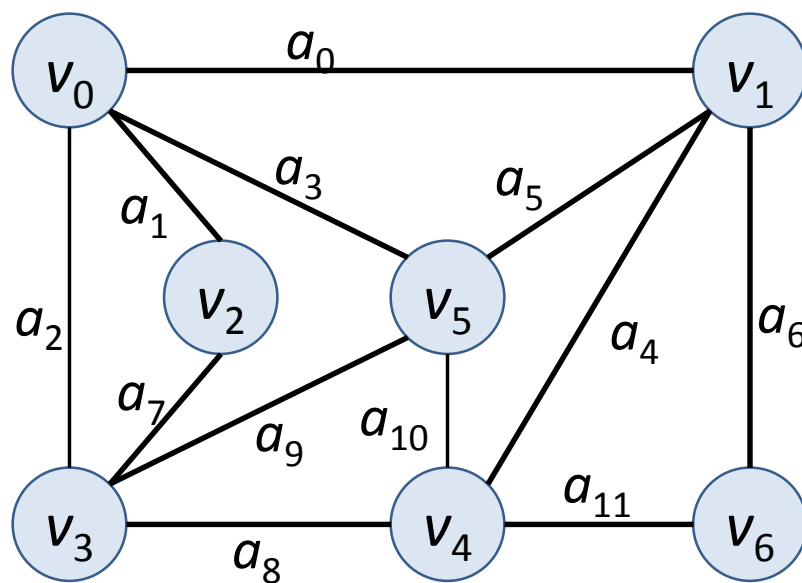


「グラフと組み合わせ」課題 3 (解答例)

2015/4/27

1 Euler 閉路

次のグラフ中の Euler 閉路 (一筆描き) を見つけなさい。



解答例

一つの例だけを示す

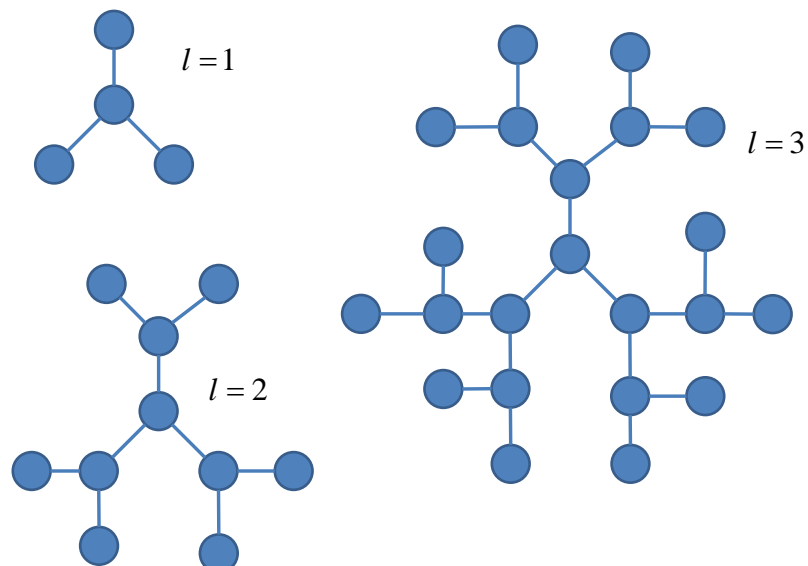
$$a_0 a_5 a_3 a_1 a_7 a_9 a_{10} a_{11} a_6 a_4 a_8 a_2$$

2 Cayley 木内の点間の距離

次数 $k > 2$ の Cayley 木を以下の手順で構成することにする。下の図は $k = 3$ の場合である。

1. 頂点の数が $k+1$ の最小の Cayley 木を作る (図中の $l=1$ の場合)。ここで l は、中心からの距離となる。
2. 外側の k 個のそれぞれの頂点から、新たに $k-1$ 本の弧を伸ばして新しい頂点を接続する (図中の $l=2$ の場合)。

3. 上記ステップを $l=L$ まで繰り返す。



このとき頂点の数 N を L で表しなさい。また、その表式が正しいことを証明しなさい。

解答例

$L=1$ の場合、頂点数は $N=k+1$ である。 $L=2$ の場合、外側の k 個の頂点から、それぞれ $k-1$ 本の弧が伸びる。従って、総頂点数は

$$N=1+k+k(k-1) \quad (1.1)$$

となる。 $L=3$ の場合は、 $L=2$ の Cayley 木の外側の頂点の数は $k(k-1)$ であ

り、そこからそれぞれ $k-1$ 本の弧が伸びる。従って、総頂点数は、以下のようになる。

$$N=1+k+k(k-1)+k(k-1)^2 \quad (1.2)$$

上記を繰り返すことで、次式を得る。

$$N(L)=1+k \sum_{i=0}^{L-1} (k-1)^i = 1+k \frac{1-(k-1)^L}{1-(k-1)} = \frac{2-k(k-1)^L}{2-k} \quad (1.3)$$

数学的帰納法による証明

数学的帰納法を用いて、式(1.3)を証明する。準備として、中心からの距離が L

である Cayley 木の葉の数 $H(L)$ と L の関係を証明する。上記の推論より、

$$H(L) = k(k-1)^{L-1} \quad (1.4)$$

となる。まず、これを証明する。

- $L=1$ の場合： $H(1) = k$ であり、式(1.4)が成り立つ。
- ある l で式(1.4)が成り立つと仮定する。距離 l の Cayley 木の葉 $H(l)$ のそれぞれから $k-1$ 個の葉が出て、距離 $l+1$ の Cayley 木が構成される。従って、距離 $l+1$ の Cayley 木の葉の数は次式で表される。

$$H(l+1) = H(l) \times (k-1) = k(k-1)^{l-1} \times (k-1) = k(k-1)^l$$

従って、任意の自然数 L に対して、式(1.4)が成り立つ。

次に式(1.3)を証明する。

- $L=1$ の場合： $N(1) = 1+k$ であり、明らか。
- ある l に対して式(1.3)が成り立つと仮定する。この時、葉の数は $H(l)$ である。 $l+1$ の Cayley 木を構成するには、 $H(l)$ 個の葉のそれぞれから $k-1$ 個の葉が新たに生成される。従って、頂点総数は、次式で表される。

$$\begin{aligned} N(l+1) &= N(l) + H(l) \times (k-1) = N(l) + k(k-1)^l \\ &= \frac{2-k(k-1)^l}{2-k} + k(k-1)^l = \frac{1}{2-k} \left[2-k(k-1)^l + k(2-k)(k-1)^l \right] \\ &= \frac{1}{2-k} \left[2+k(k-1)^l - k^2(k-1)^l \right] = \frac{2-k(k-1)^{l+1}}{2-k} \end{aligned}$$

よって、任意の自然数 L に対して式(1.3)が成り立つ。