



序論:この講義の目的

担当:只木進一(工学系研究科)

グラフと組み合わせとは (IN RANDOM HOUSE DICTIONARY)

- “graph”
 - *Math.* A network of lines connecting points
- “network”
 - Any netlike combination of filaments, lines, veins, passages, or the like.
 - A system of interrelated buildings, offices, stations etc., esp. over a large area.
- “combination”
 - *Math.* The arrangement of a number of individuals into various groups.



グラフ理論

- グラフ、ネットワークの数学的性質を扱う
- 起源
 - 1736年に、Leonhard EulerがKönigsbergの橋の渡り方（一筆書きの一種）を解いた
- 近年
 - ランダムネットワーク
 - Erdős–Rényi モデル
 - 複雑ネットワーク
 - Scale-free ネットワーク
 - Barabási–Albertモデル



要素関係を記述するには

- 人と人の関係
 - 友人関係、取引関係、利害関係、組織系統
- 組織と組織の関係
 - 取引関係、依存関係、競合関係
- 都市と都市の関係
 - 地理的隣接、人の交流、交通機関での接続
- 作業の各工程
 - 依存・前後関係、重要度
- どのような方法が良い？

図示するのが良いでしょう



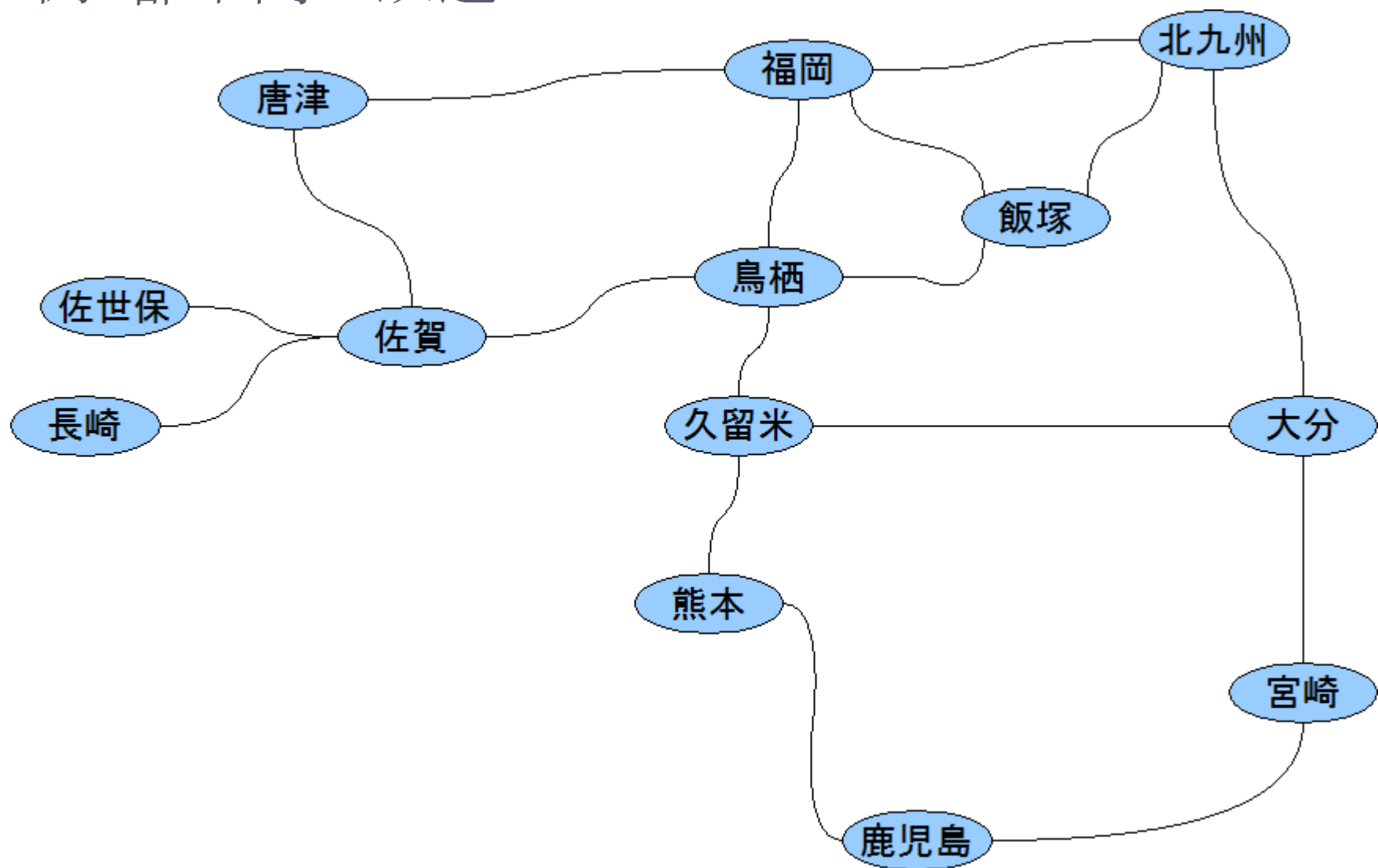
グラフ(GRAPH)とは

- 要素とその関係を図示する
 - 交通網:都市とそれを結ぶ交通
 - コンピュータとネットワーク
 - Webページ間のリンク
 - 部品の構成図
 - 組織構成・人の繋がり
 - 関係データベース
 - 食物連鎖
 - 代謝反応系
- 周囲にはグラフやネットワークが溢れている

具体的に想像しよう



例：都市間の鉄道



具体的な交通網

- JR九州路線図
- ANA路線図
- 佐賀市営バス路線図



ネットワークの例

- SINET
- An Atlas of Cyberspace
- www.opte.org/maps



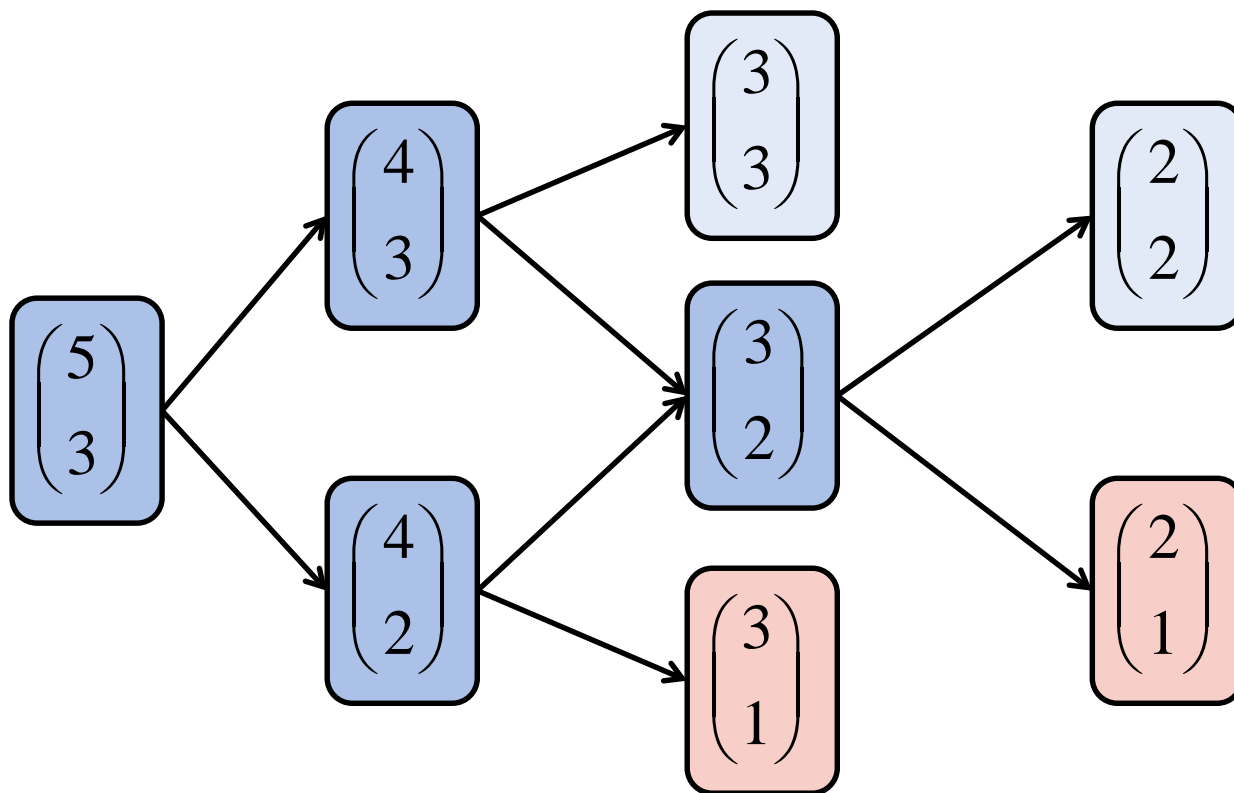
グラフ(GRAPH)とは:2

- 処理の流れを図示する
 - 処理の流れ
 - クラスオブジェクトとその呼出
 - 再帰的関数のスタック
 - 状態遷移図

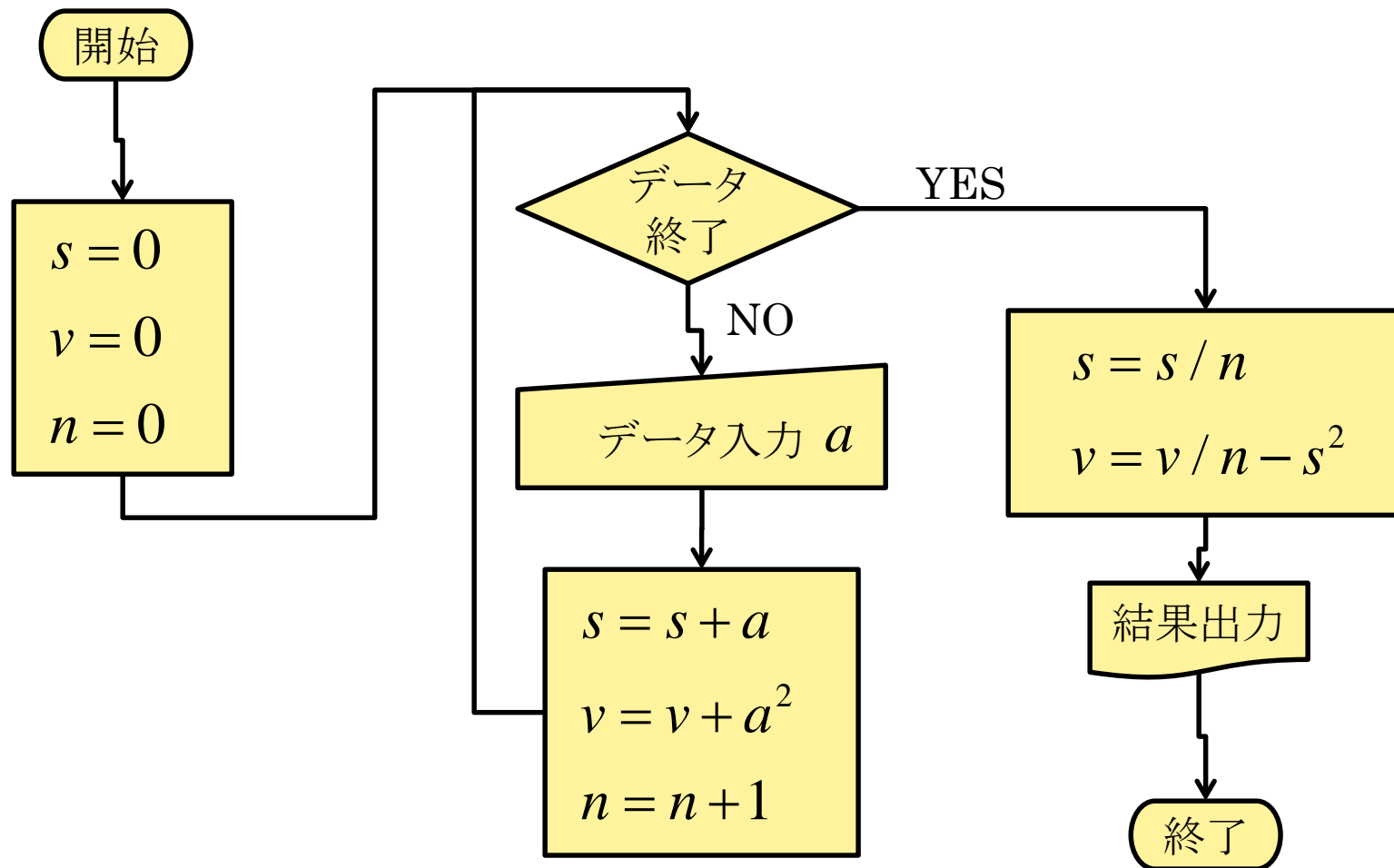


例：二項係数の漸化式

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$$



例：流れ図（平均と分散）



グラフとネットワークを使って問題を整理

- 我々人間は、式よりも図が理解しやすい
- 要素間の関係の整理
- 要素のグループ分け
- 最短経路を探す
- 最適な連絡網を探す
- 隘路を探す
- 重要な場所を探す



グラフを抽象化して考える

- 共通点は何か
 - 頂点と辺の集合
 - つながり方に注目している
- 数学の言葉で書く
 - モデル化
 - 抽象化と厳密化
 - 「意味」を消すことで見えるもの
- アルゴリズムを作る
 - 最適化、探索など
 - 問題解決手順を明確にする



グラフに付随する性質

- 頂点ごとの性質
 - 重要性
 - 寿命
- 弧ごとの性質
 - 距離
 - その弧を流れるモノの量



グラフの何を調べるのか

- 全ての経路を列挙する
- 最短の経路を探す
- 最も効率的な路線図を作る
- 冗長性のあるネットワークを構成する
- 探索の計算量を見積もる



必要な知識

- 集合
 - グラフは頂点の集合と弧の集合で構成される
- 順列・組合せ
 - 何通りの経路が可能か
- 数学的帰納法
- オブジェクト指向プログラミング
 - アルゴリズムをコード化
 - グラフを記述するデータ構造
 - List, Queue, Stack



復習：集合

- 有限集合 X Y
- 集合の要素数 $|X|$
- 集合の和

$$X \cup Y = \{e \mid e \in X \vee e \in Y\}$$

- 集合の共通部分

$$X \cap Y = \{e \mid e \in X \wedge e \in Y\}$$

- 差集合

$$X \setminus Y = \{e \mid e \in X \wedge e \notin Y\}$$



復習：特別な集合

- 自然数全体 N
- 整数全体 Z
- 実数全体 R
- 有理数全体 Q

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$



復習：数学的帰納法

- 自然数 n に関する命題 $S(n)$
- 証明
 - $S(1)$ は正しいことを示す
 - $S(n)$ が正しいと仮定すると、 $S(n+1)$ も正しいことを示す
 - よって任意の n に対して、命題 $S(n)$ は正しい
- 注意
 - “...”を証明には使わないこと。曖昧になる



数学的帰納法の例1: 等比級数 $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

○ $n=0$ LHS = $a^0 = 1$, RHS = $\frac{1-a^1}{1-a} = 1$

○ n に対して正しいと仮定する

○ $n+1$ に対して導く

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a^k &= \sum_{k=0}^n a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} && \leftarrow \text{代入} \quad \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \\ &= \frac{1}{1-a} (1-a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}) \\ &= \frac{1-a^{n+2}}{1-a} \end{aligned}$$



数学的帰納法の例2:漸化式

次の漸化式

$$P(1) = \frac{2}{3} \quad (1.1)$$

$$(k+2)P(k) = (k-1)P(k-1) \quad (k > 1) \quad (1.2)$$

を満たす数列 $P(k)$ ($k \geq 1$) は、以下の式で表される。

$$P(k) = \frac{4}{(k+2)(k+1)k} \quad (1.3)$$

- $k=1$ の場合、(1.3)式に $k=1$ を代入して、成り立つことが分かる。

$$P(1) = \frac{4}{3 \times 2 \times 1} = \frac{2}{3}$$

- ある k に対して(1.3)式が成り立つと仮定する。(1.2)式より、

$$P(k+1) = \frac{k}{k+3} P(k) = \frac{k}{k+3} \times \frac{4}{(k+2)(k+1)k} = \frac{4}{(k+3)(k+2)(k+1)} \quad (1.4)$$

となり、(1.3)式が $k+1$ に対しても成り立つ。



数学的帰納法例3

- 凸 n 多角形の内角の和は $2(n-2)\pi$ である
- $n=3$ の場合
 - 三角形の内角の和は 2π :証明省略
- ある凸 n 多角形の内角の和が $2(n-2)\pi$ であると仮定する
 - 頂点を一つ増やす = 三角形を一つ追加する
 - 内角の和は
 - $2(n-2)\pi + 2\pi = 2(n+1-2)\pi$

