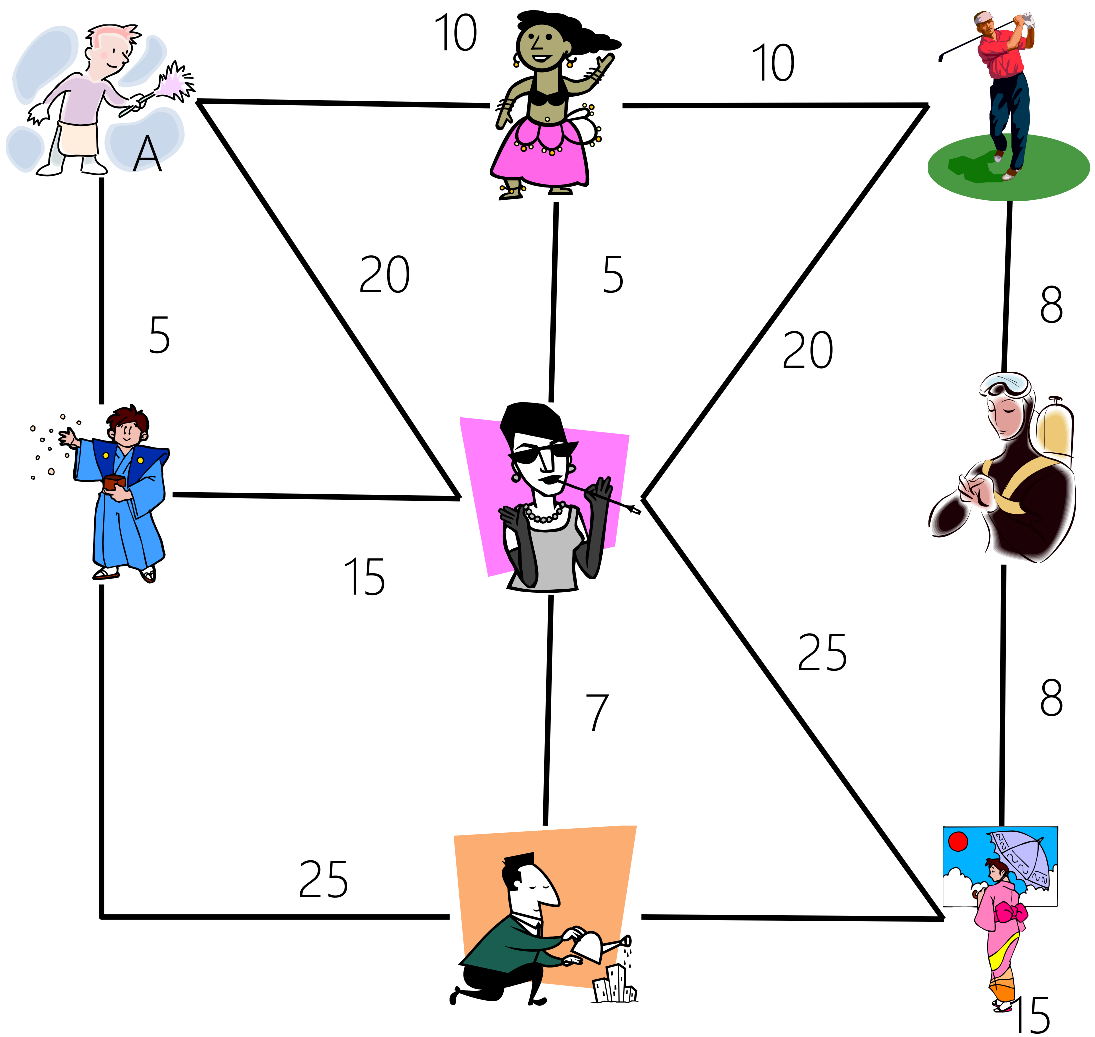
最小木問題
Minimum Tree Problem

ネットワーク(NETWORKS)

- 弧に長さ、重み、費用などの属性のあるグラフ
  - 都市とそれを結ぶ交通
    - 都市間の道路距離
    - 都市間の鉄道の運賃
    - 都市間の空路の最大輸送可能人数
  - コンピュータとネットワーク:帯域
  - 作業工程:所用時間、遅れ

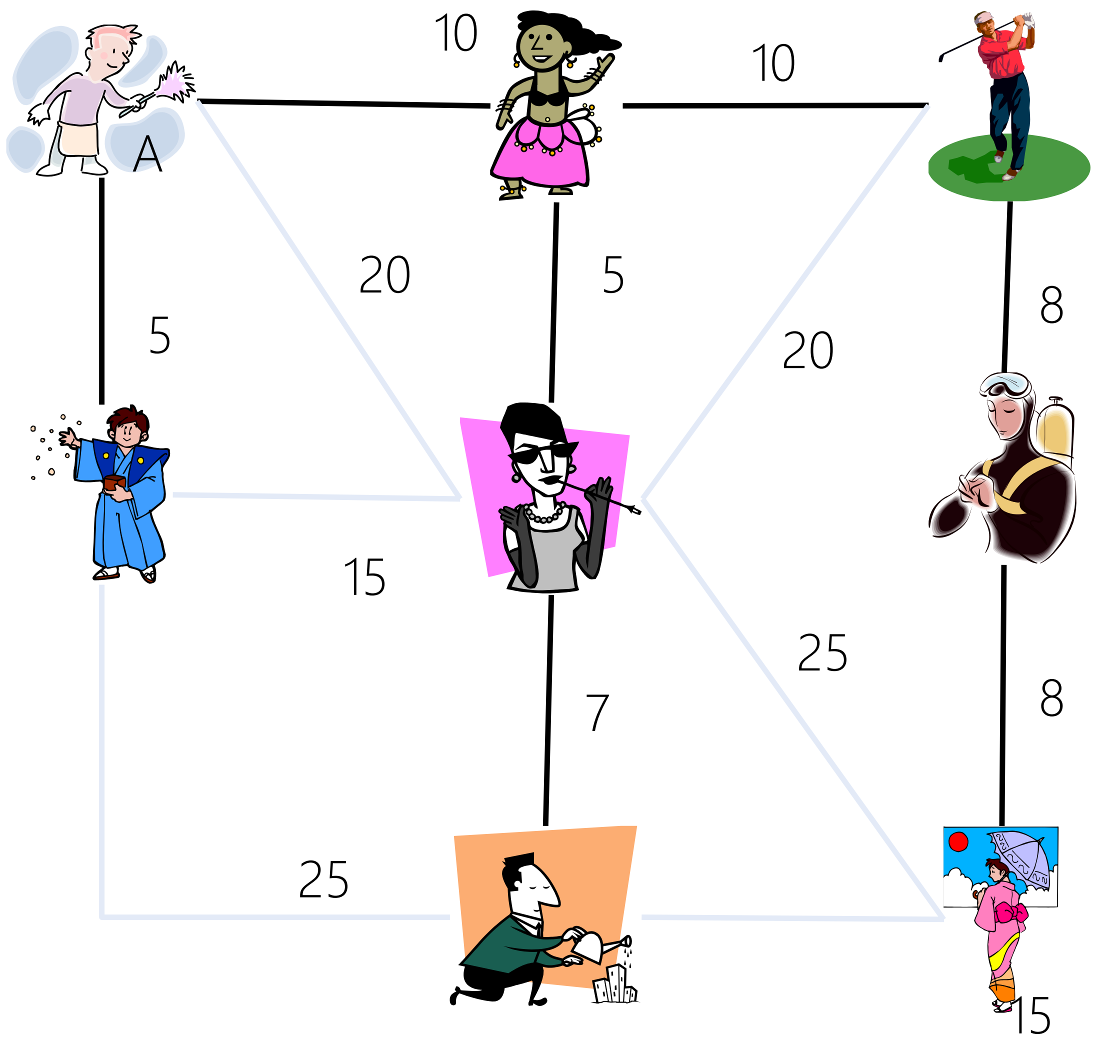
例:最安の連絡経路



Aから全員に最も安く連絡する経路
総経費を考える

経路の経費が
定義されている

例：最安の連絡経路：解



最小木問題(Minimum Tree Problem)

- 連結無向グラフ$G = (V, A)$
  - 弧に向きが無い
- 重み関数$w: A \to R$
  - 各弧に実数が対応：重み、距離、etc.
  - 弧の重みは正$\forall a: w(a) > 0$
- G の極大木$T \subseteq A$
  - 重みが最小になる極大木Tを見付ける

$$\min_T w(T)$$

$$w(T) = \sum_{a \in T} w(a)$$

最小木問題の応用

- 油井(ゆせい)から精油所へパイプラインを引く
  - 最短(経費の最も安い)のパイプラインで一カ所に原油を集める
- 最小のコストでコンピュータを繋ぐ
- 通信コストを最小にして事業所を繋ぐ

KRUSKAL法 (貪欲法、GREEDY法)

- 重み最小の弧を順に選ぶ
- 構成途中は木になっていない(部分木の集合)
- 閉路ができないように制限しながら弧を選択する

貪欲アルゴリズム (Greedy algorithm, Kruskal algorithm)

$T = \emptyset$

$H : G$ の弧の重みに関するヒープ

while (T は G の極大木ではない) {

    $a = H.\mathrm{poll}()$ ヒープから最小要素を取得

    $a_{\mathrm{new}} = \mathrm{null}$

    while($a_{\mathrm{new}} == \mathrm{null}$){

        if ($T \cup \{a\}$ は閉路を持たない) {

            $a_{\mathrm{new}} = a$

        }else{

            $a = H.\mathrm{poll}()$

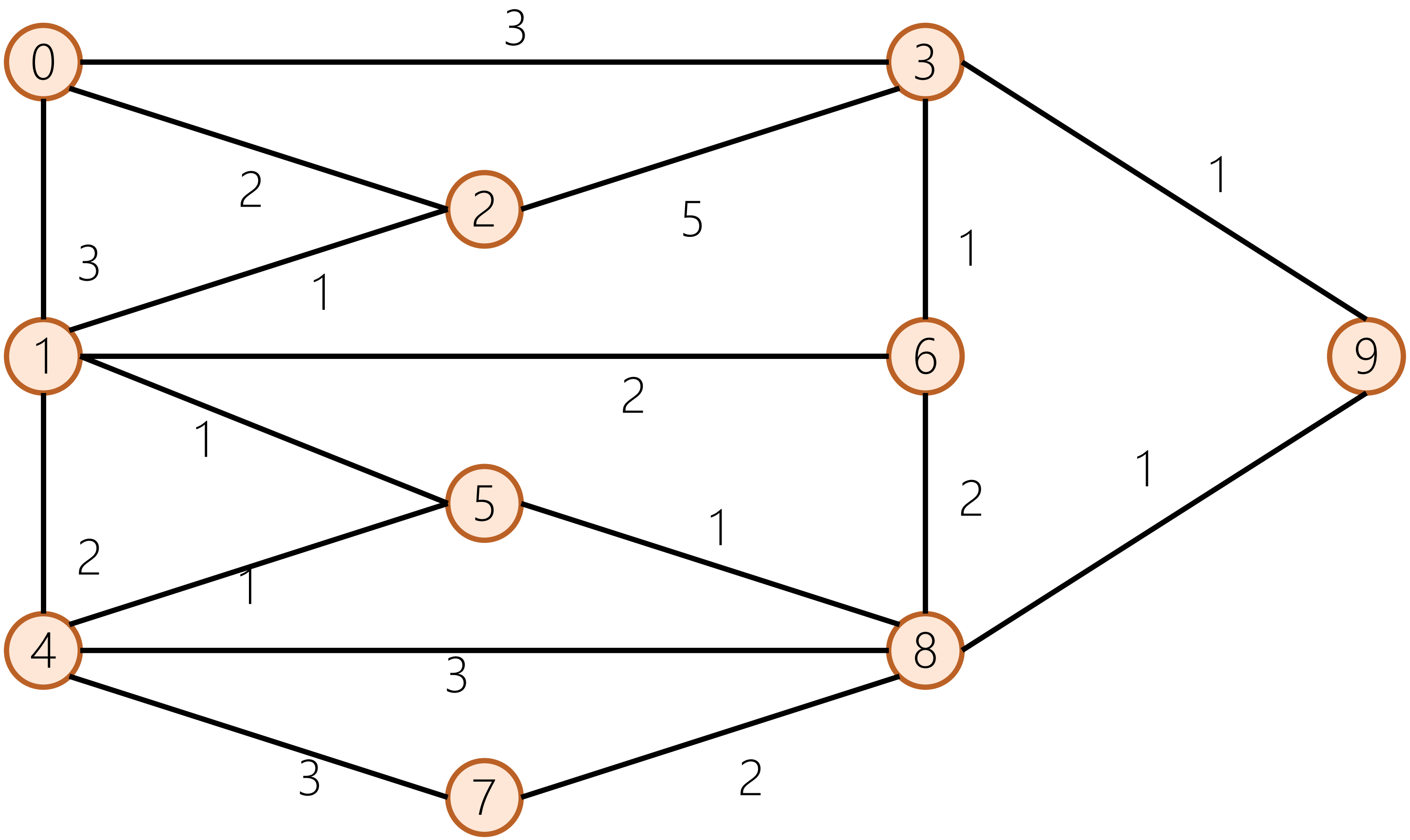
        }

    }

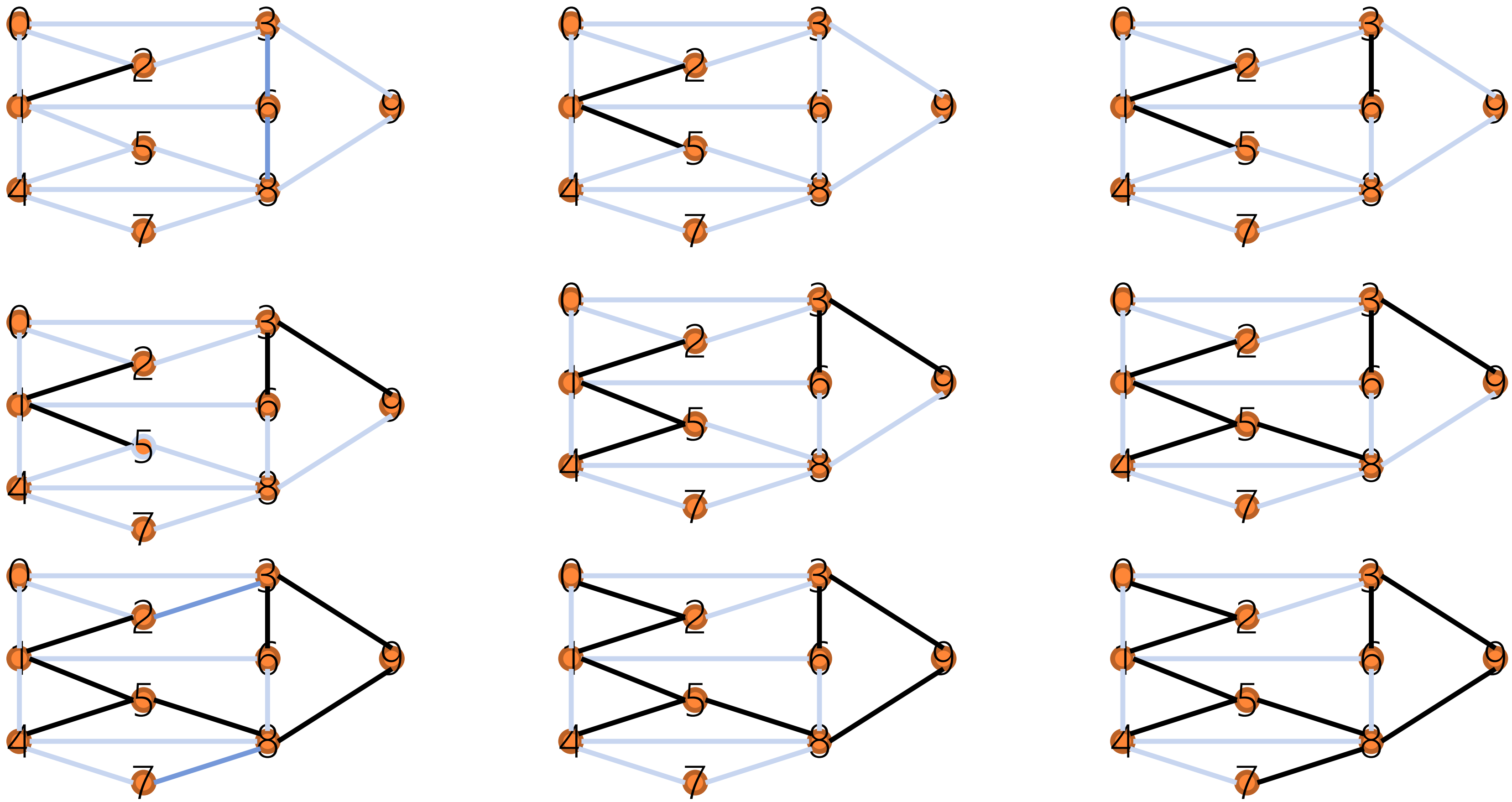
    $T = T \cup \{a_{\mathrm{new}}\}$

}

例1



例1:解の探索の様子



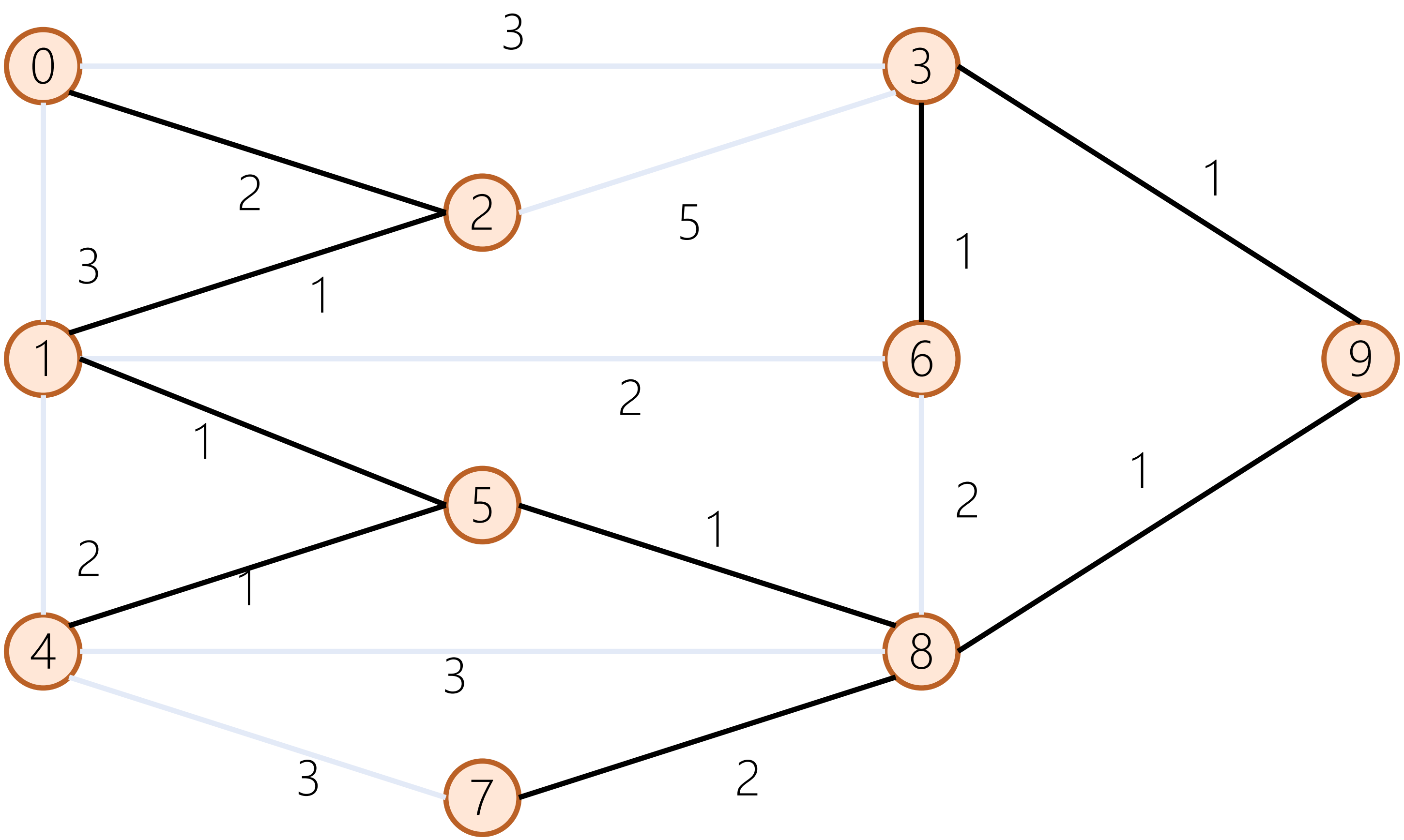
ここまでは、重み1の弧

重み2の弧 $e(v_0,v_2)$

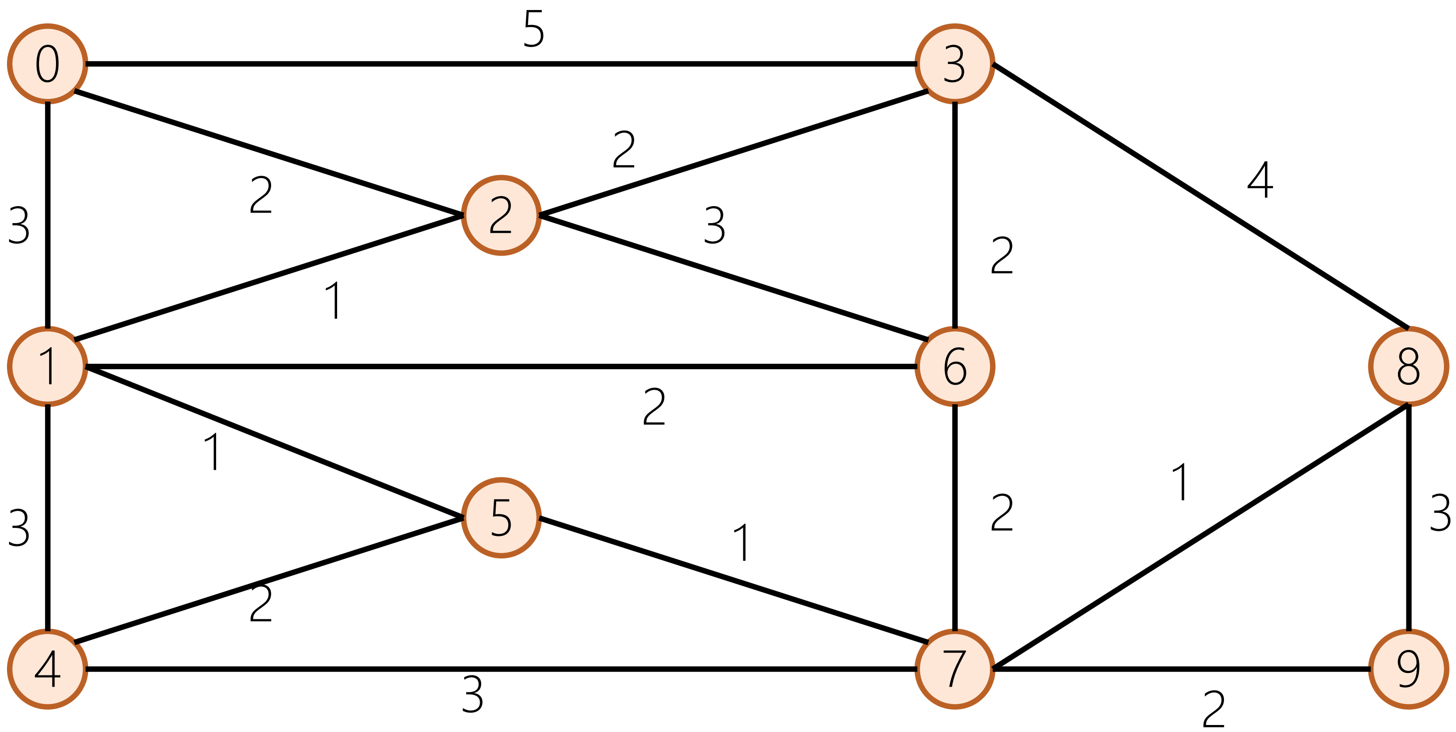
重み2の弧 $e(v_7,v_8)$

$e(v_1,v_6)$ を選択すると閉路ができる

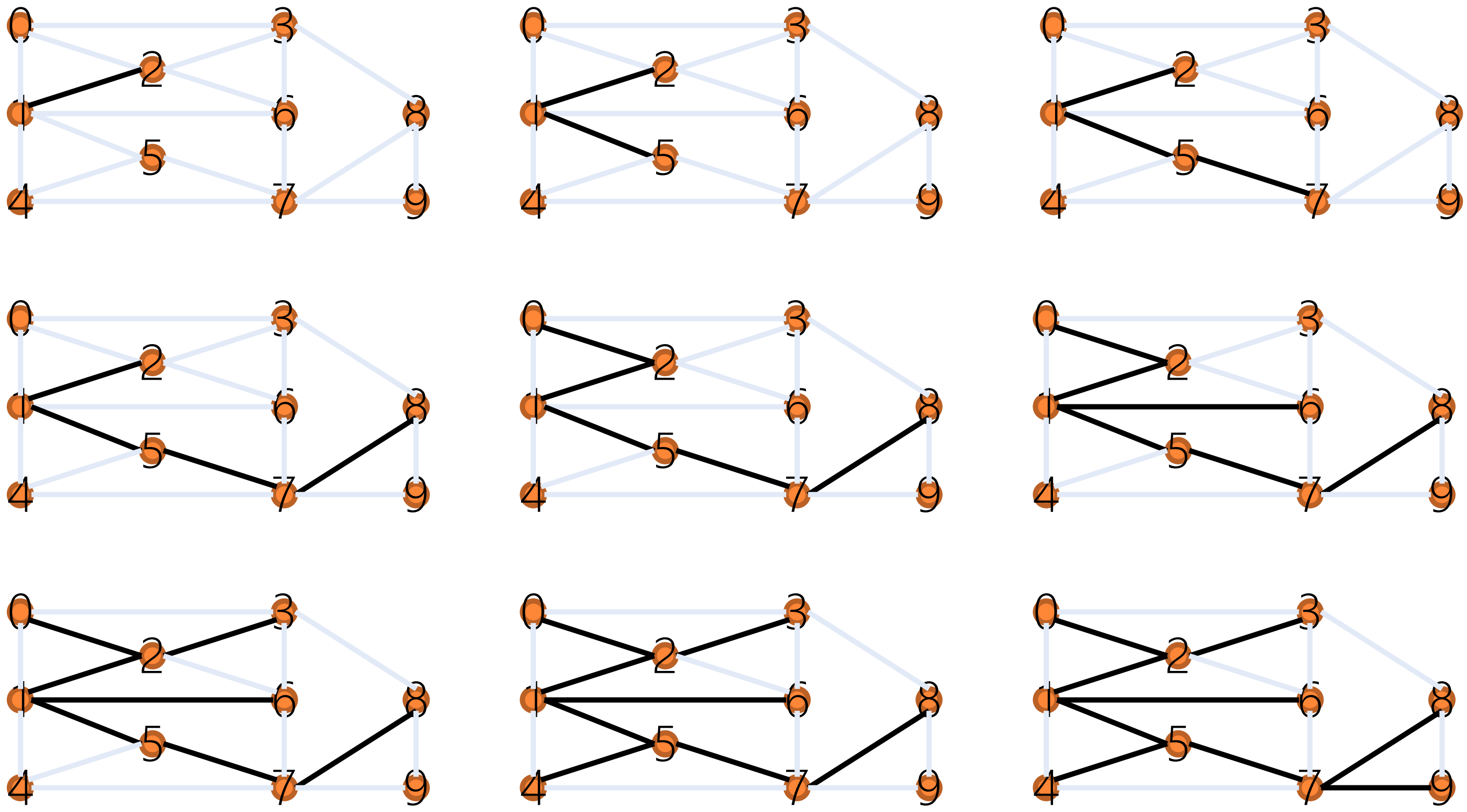
例1:結果

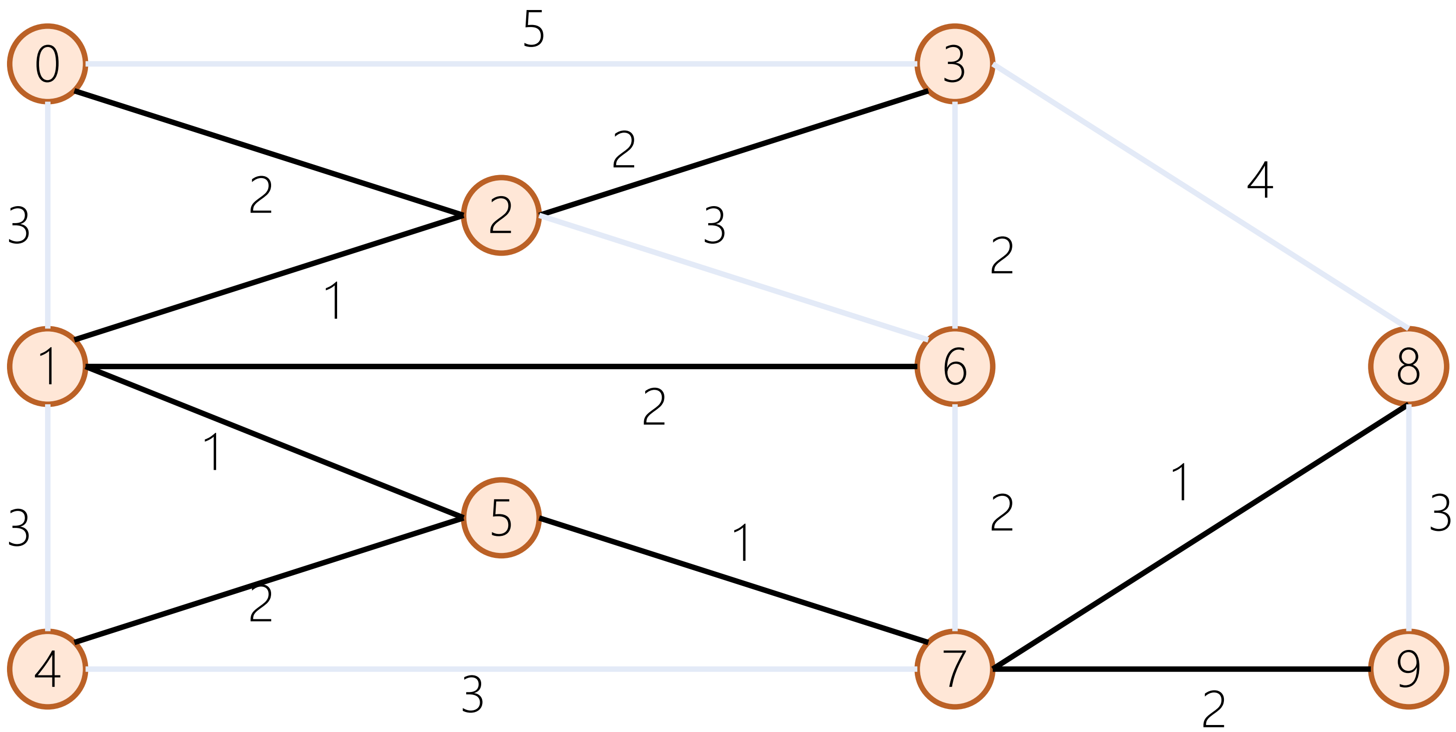


例2



例2：解の探索の様子




5
0
3
2
2
4
3
2
3
2
1
1
6
8
2
1
1
3
2
5
1
3
2
4
3
7
9
2

貪欲アルゴリズムが正しい理由

- 次の定理を証明すれば良い

「貪欲アルゴリズム実行中で得られるTは、弧数$|T|$を持ち、サーキットを含まない弧集合のうちで、その重みが最小である。」

  - 要するに、アルゴリズムの各段階で最小の重みのグラフであることを示す。

- 証明では、上記を性質(*)と呼ぶことにする。

数学的帰納法による証明

- $T = \emptyset$の時、自明
- 操作をi回行って、次の弧を選択する直前の弧集合Tが条件(*)を満たしていると仮定する。
- 次に選択された弧をaとする: $a \in A \setminus T$
- $|T| + 1$の弧を持ち、サーキットを有さない弧集合のうちで、重みの和が最小のものをSとする。
  - $W(S) = W(T) + w(a)$ならば性質(*)が成り立つ。
  - $W(S) < W(T) + w(a)$ は矛盾する(起こりえないことを示す)。

証明：準備

- T は$|T|$本の弧を持つサーキット(閉路)の無い弧集合の内で、重みが最小である。
  - 従って、Sから任意の弧bを取り除いた弧集合（$|T|$本の弧）の重みはTの重みより小さいことはない。

$$\forall b \in S,\ w\left(S \setminus \{b\}\right) = w(S) - w(b) \geq w(T)$$

- このことから、Sに含まれる任意の弧bとTにこれから追加する弧aの重みの大小関係がわかる。

$$w(S) < w(T) + w(a) \leq w(S) - w(b) + w(a)$$
$$\Downarrow$$
$$w(b) < w(a)$$

証明：矛盾の導出

- S とT はサーキットを含まず$|S| = |T| + 1$
- ある $a' \in S \setminus T$に対して$T \cup \{a'\}$ はサーキットを含まないとする。
  - a'はSの弧であることから、$w(a') < w(a)$
    - なぜなら、Tは(*)を満たすから
  - これより

$$w\left(T \cup \{a'\}\right) = w(T) + w(a') < w(T) + w(a)$$

- これはa の選び方に反する。
- よって矛盾する。つまり、そのようなSは存在せず、手続きに従って構成した$T \cup \{a\}$は、最小木である。

注意

- ある弧を選択した際に、それが閉路を作らないことの確認が必要
  - 加えようとして孤aの両端の頂点(v, w)
  - T 内にvからwへの道があるかを調べる
- 深さ優先、幅優先の探索アルゴリズムが必要

最大補木を求める方法

- 最小木を求めるために、重み最大の補木$A \setminus T$を求める

$T \leftarrow A$

$w_{\max} = 0$

While（T はG の極大木ではない）{

forall（$a \in T$）{

if（$T \setminus \{a\}$ はG の極大木を含む）{

if（$w(a) > w_{\max}$）{

$a_{\text{selected}} = a$

$w_{\max} = w(a)$

}

}

}

$T \leftarrow T \setminus \{a_{\text{selected}}\}$

}