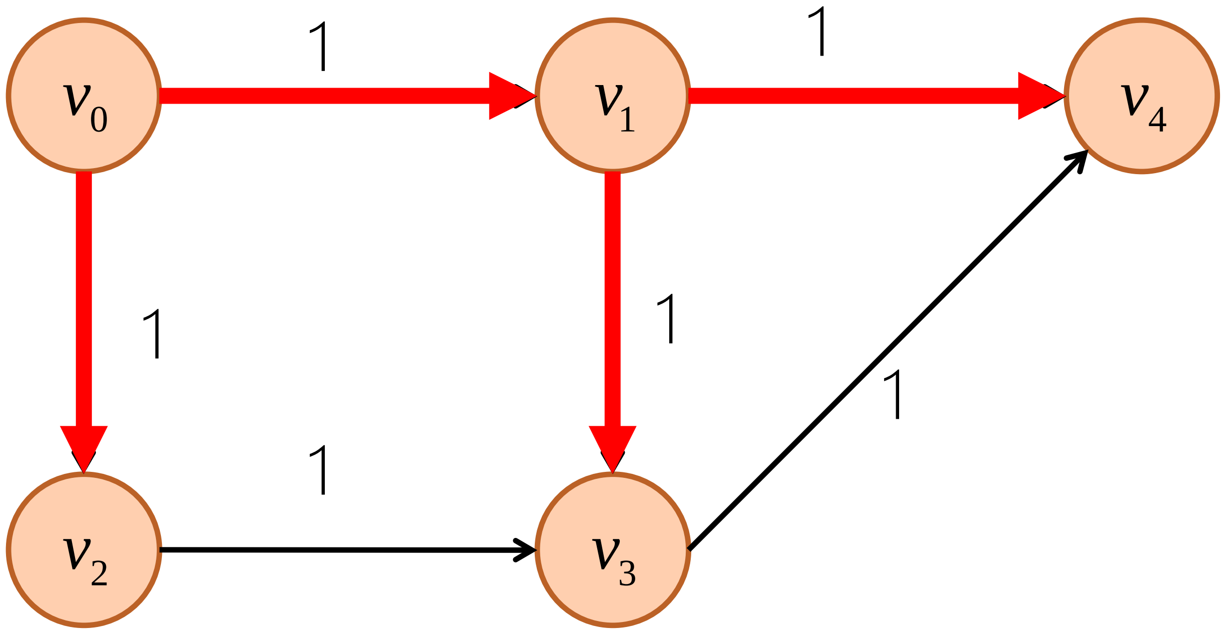
最短経路問題
Shortest Path Problem

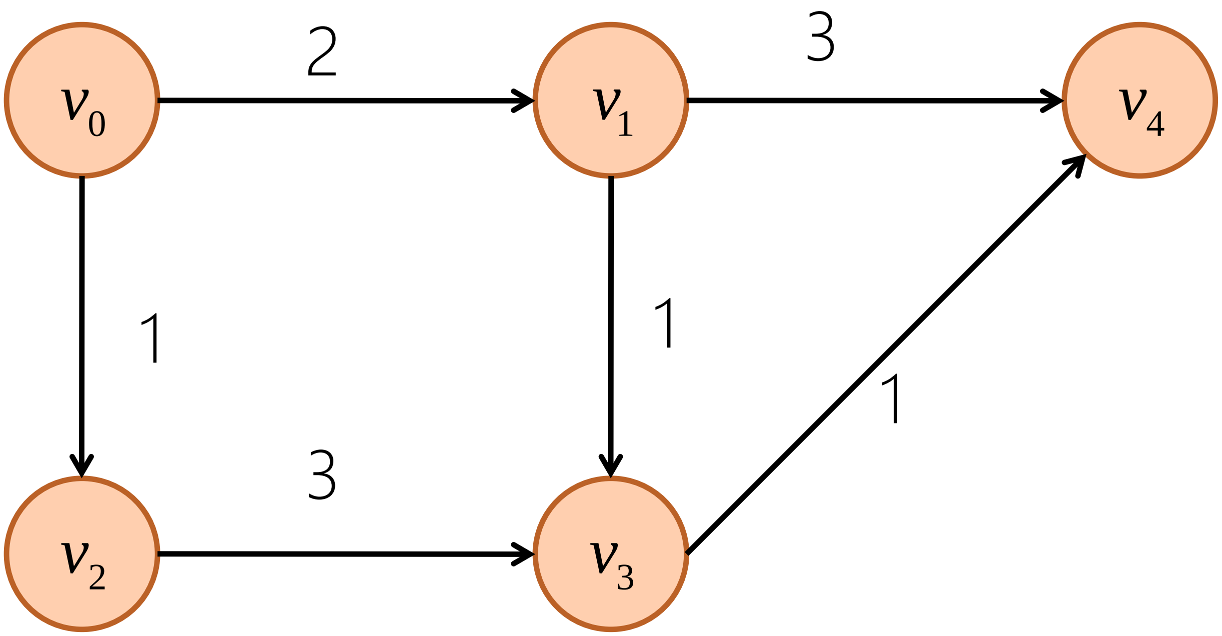
最短経路問題とは

- 有向ネットワーク
  - 各弧に距離やコスト(正の実数)が定義されている
- 始点から終点までの最短有向道を見つける
  - 弧の向きがそろった道
- 距離・コストの組み合わせ最適化問題

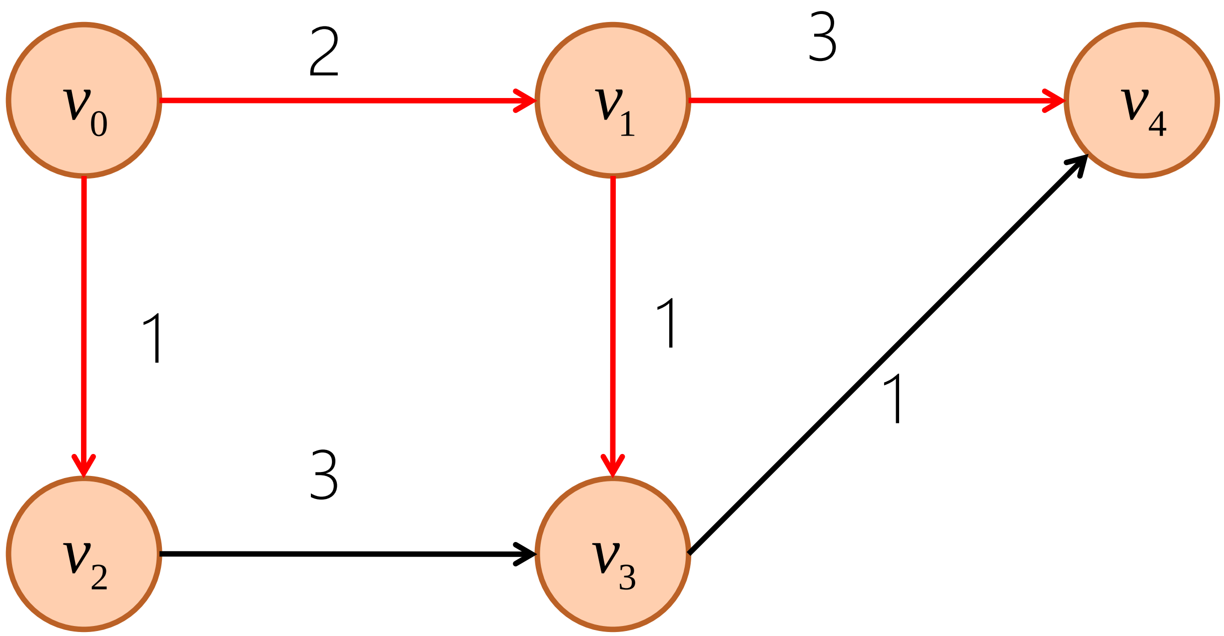
すべての弧の距離が同じならば幅優先探索で十分



幅優先探索ではダメな理由



幅優先探索では



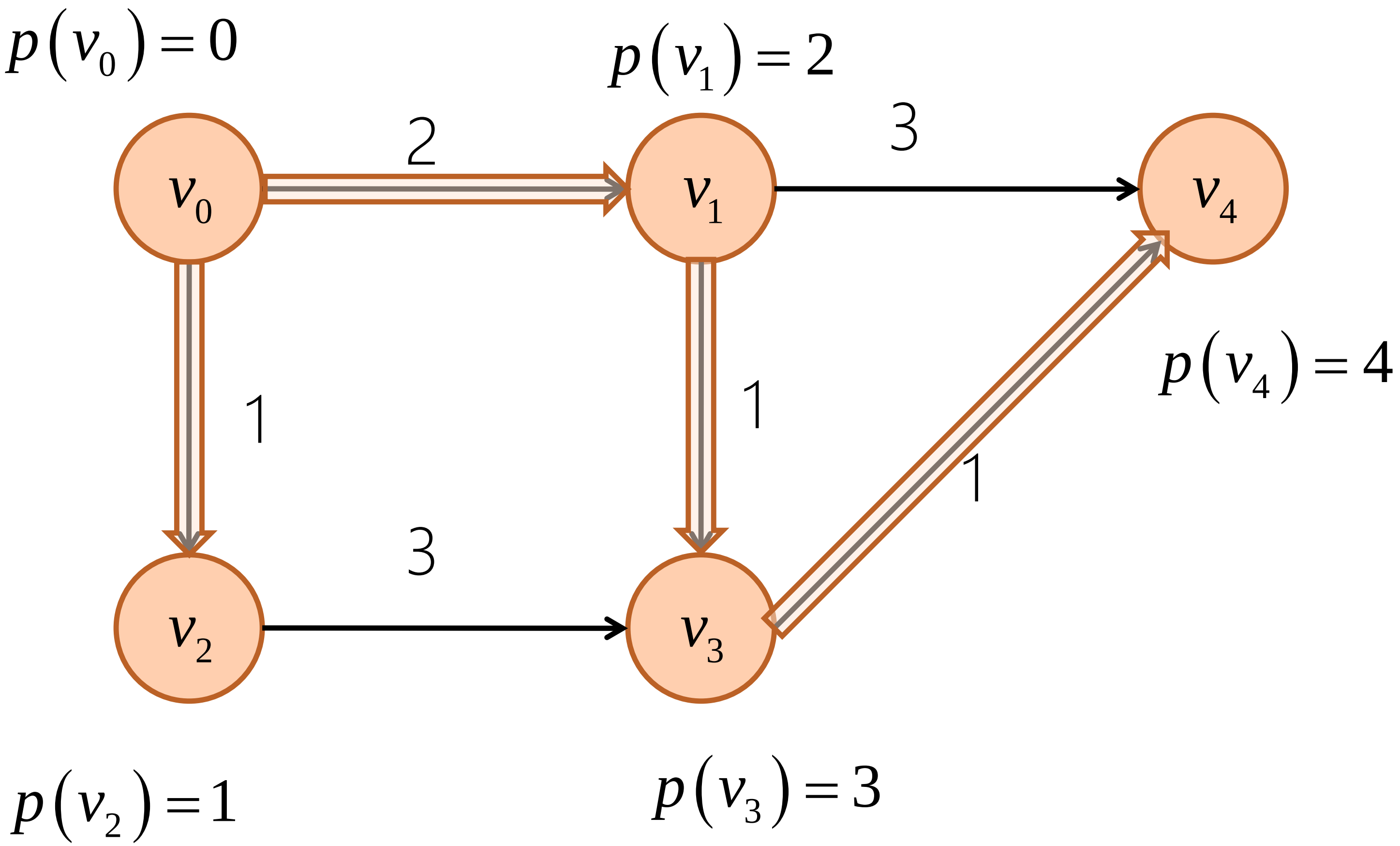
- v_4 への経路が$v_0 \to v_1 \to v_4$となり、距離が5となってしまう
- しかし、経路$v_0 \to v_1 \to v_3 \to v_4$のほうが距離4となって短い
- 頂点の移動数が多くても、距離の短い道がある

準備：ポテンシャル $p: V \to R$

- 一般には、各頂点に定義された実数値
- 始点からの「高さ」(距離)をイメージする
- 経路のよらずに定まるはず
  - 最短の経路に沿った距離に対応するはず

- ポテンシャル(potential)→位置エネルギー
  - 経路（どうやってそこまで持ち上げたか）に依らない

ポテンシャルの例



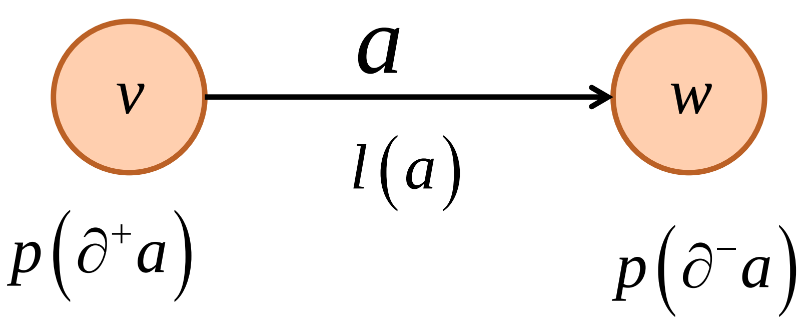
最短経路

関数$l_p: A \to R$

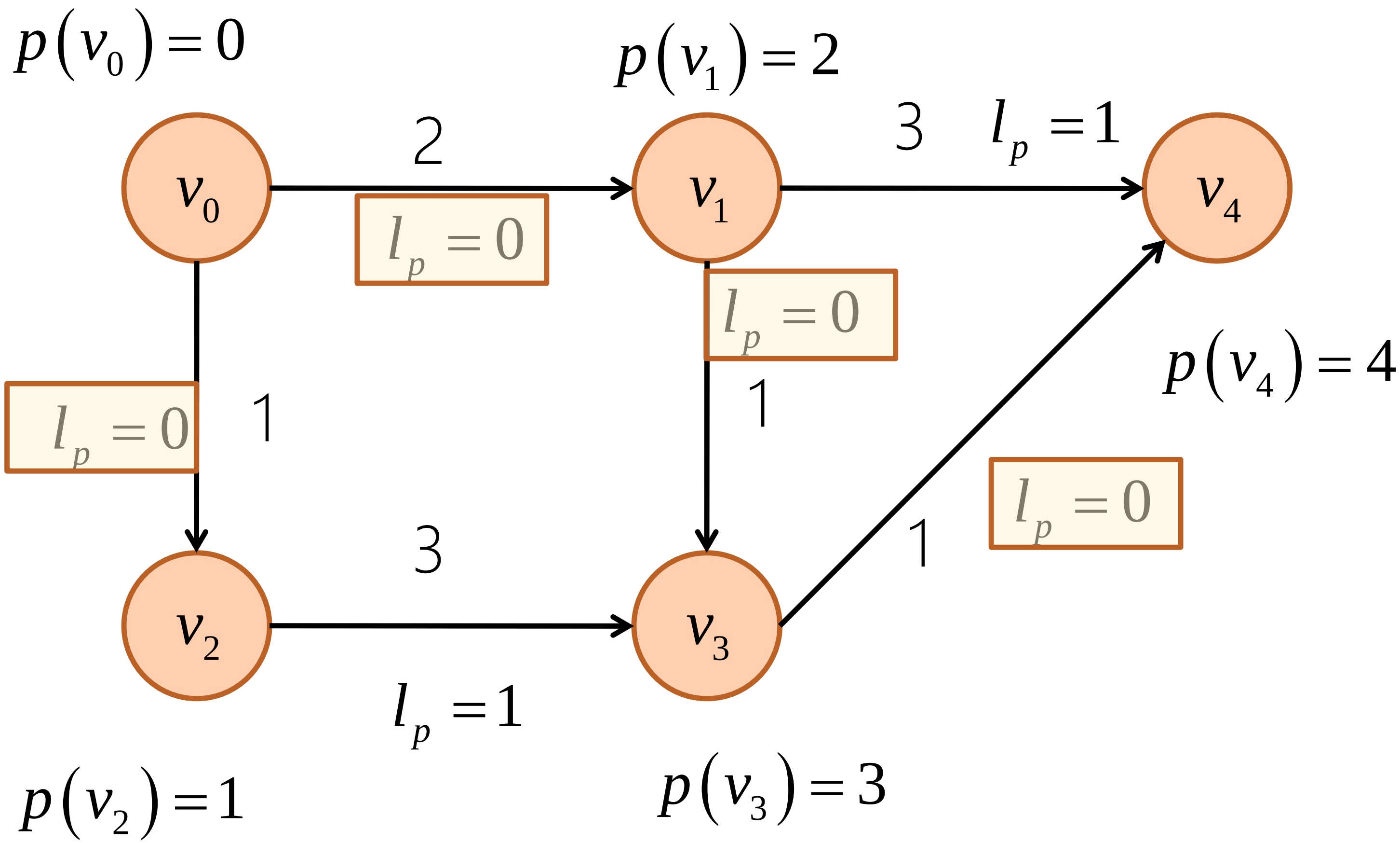
- 弧aの長さ(距離):$l(a)$
- 弧の始点(終点)のポテンシャル:$p(\partial^{\pm}a)$

$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^{+}a) - p(\partial^{-}a)$$

- ポテンシャルの差と$l(a)$とのずれ



例



最短経路に沿って$l_p = 0$

有向道に沿って拡張

- 頂点u から 頂点v へ向かう有向道 P に対して以下が成り立つ

$$l_p(P) = l(P) + p(u) - p(v)$$

$$l_p(P) \equiv \sum_{a \in P} l_p(a)$$

$$l(P) \equiv \sum_{a \in P} l(a)$$

有向道に沿った例

$$P = \{u = v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k = v\}$$

$$\begin{aligned}
l_p(P) &= \sum_{a \in P} l_p(a) = \sum_{i=1}^{k} l_p(a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left[l(a_i) + p(v_{i-1}) - p(v_i) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} l(a_i) + p(u) - p(v) \\
&= l(P) + p(u) - p(v)
\end{aligned}$$

- 関数$l_p: A \rightarrow R$が非負関数であり、道P上の各弧aにおいて、$l_p(a) = 0$のとき、Pはuからvへの最短経路となる。
- 最短経路でない弧に対しては、$l_p(a) > 0$

- 任意の道Pに対して、その経路長の下限は、$p(v)-p(u)$である。

$$l(P)=p(v)-p(u)+l_p(P)\geq p(v)-p(u)$$

- このようなポテンシャル（可能な道のうち最小値を与える）を構成することが課題となる。

ダイクストラ(Dijkstra)法

- $l(a) > 0$ の場合を考える
- グラフ G は単純(並列弧が無い)と仮定する

- $U \subseteq V$: 始点v_0からの有向道が見つかっているが、距離が確定していない頂点の集合
- $W \subseteq V$: 始点v_0からの有向道が見つかり、距離が確定した頂点の集合
- $p(v) \in R$: 始点v_0からの頂点vへの距離
- $q(v) \in V$: 最短経路を頂点vから逆にたどる際の頂点vの直前の頂点

DIJKSTRA法：初期化

$$U = \{v_0\}$$

$$W = \varnothing$$

$$p(v_0) = 0$$

$$p(u) = +\infty \left(\forall u \in V \setminus \{v_0\}\right)$$

$$q(v) = \mathrm{NULL}\left(\forall v \in V\right)$$

Uを$p(w)$によるヒープとして実装すると効率的

while ($U \neq \emptyset$) {

$w = U.poll()$ ： $p(w)$ が最小である $w \in U$ を取り出す

forall ($a \in \delta^{+} w$) {

$x = \partial^{-} a$

if ($x \notin W$) {

if ($p(x) > p(w) + l(a)$) {

$q(x) \leftarrow w$

$p(x) \leftarrow p(w) + l(a)$

ヒープ中の$p(x)$の値が
減ることがあることに注意

if ($x \in U$){

$U.reduceValue(x)$ ：ヒープ中の x の変更

} else {

$U.add(x)$ ：ヒープに x を追加

}

}

}

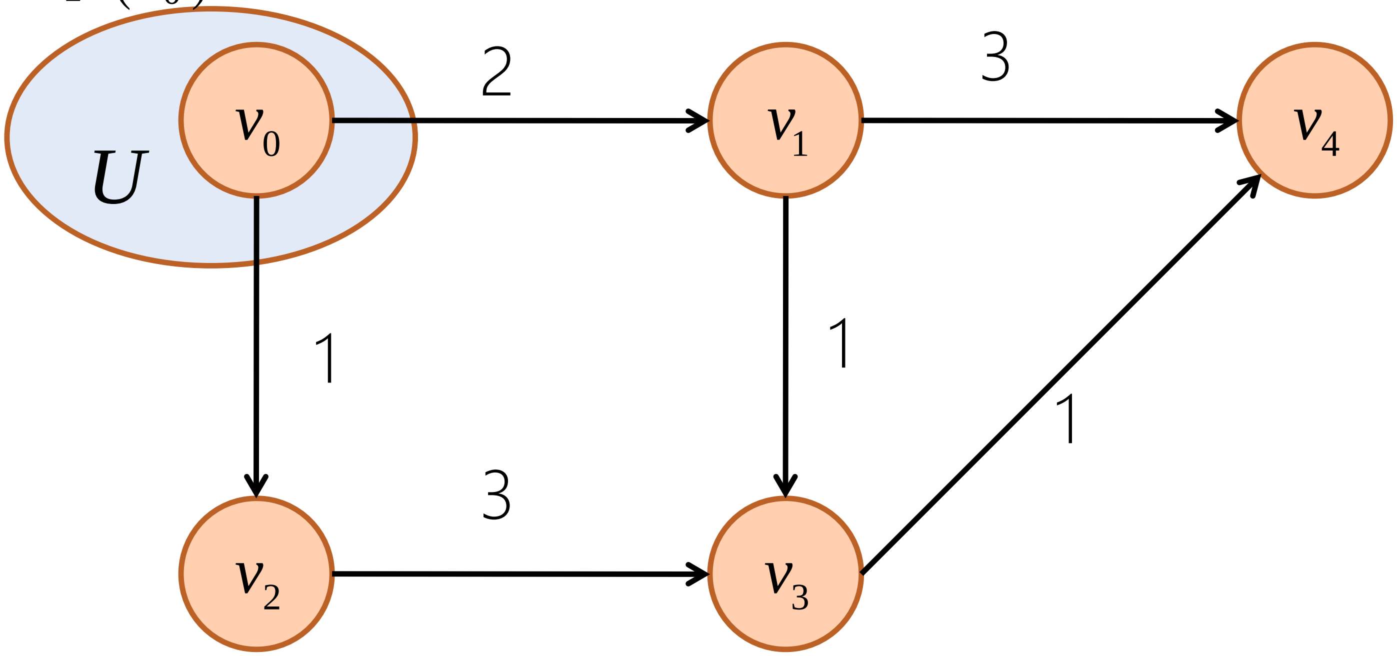
}

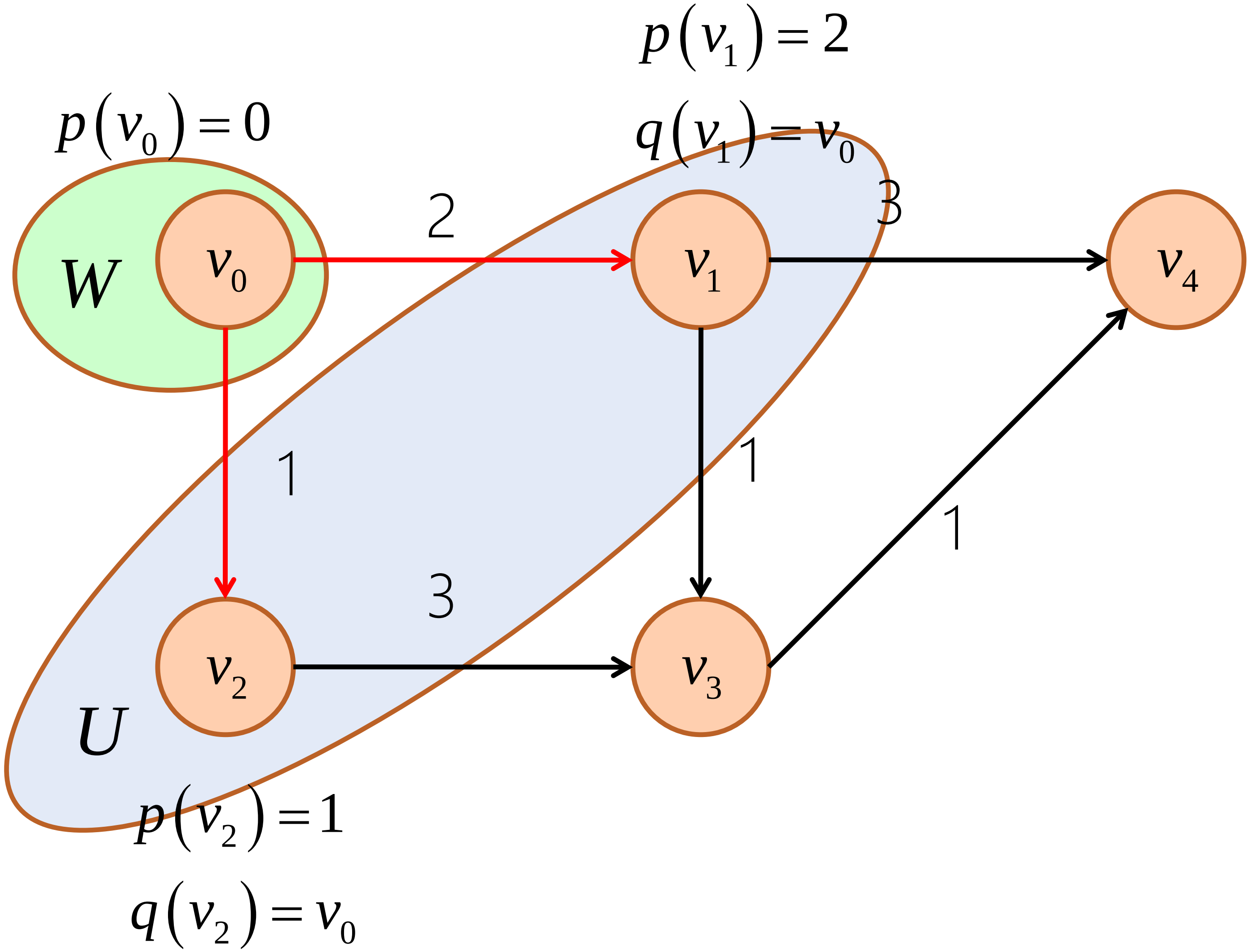
$W \leftarrow W \cup \{w\}$

}

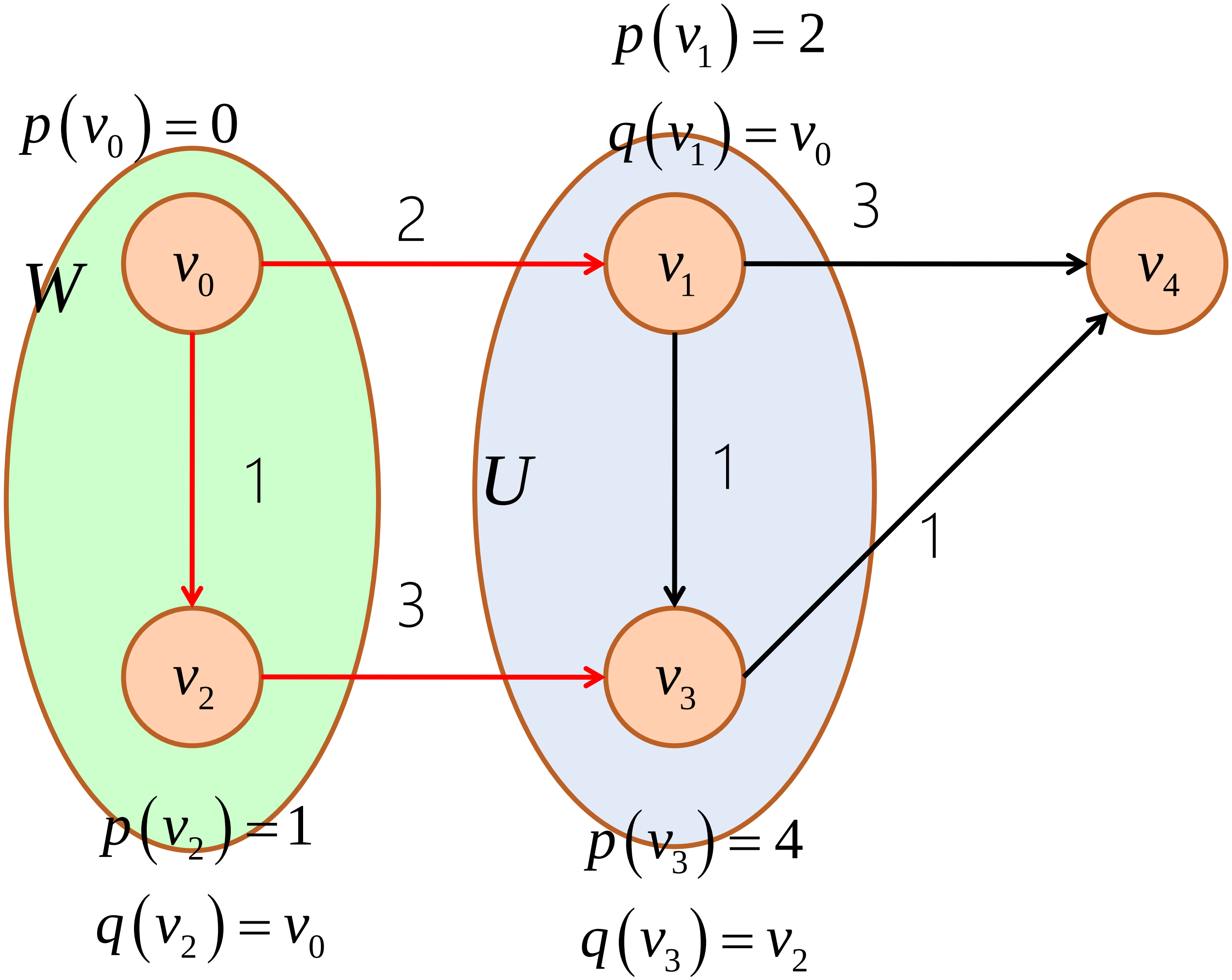
例1

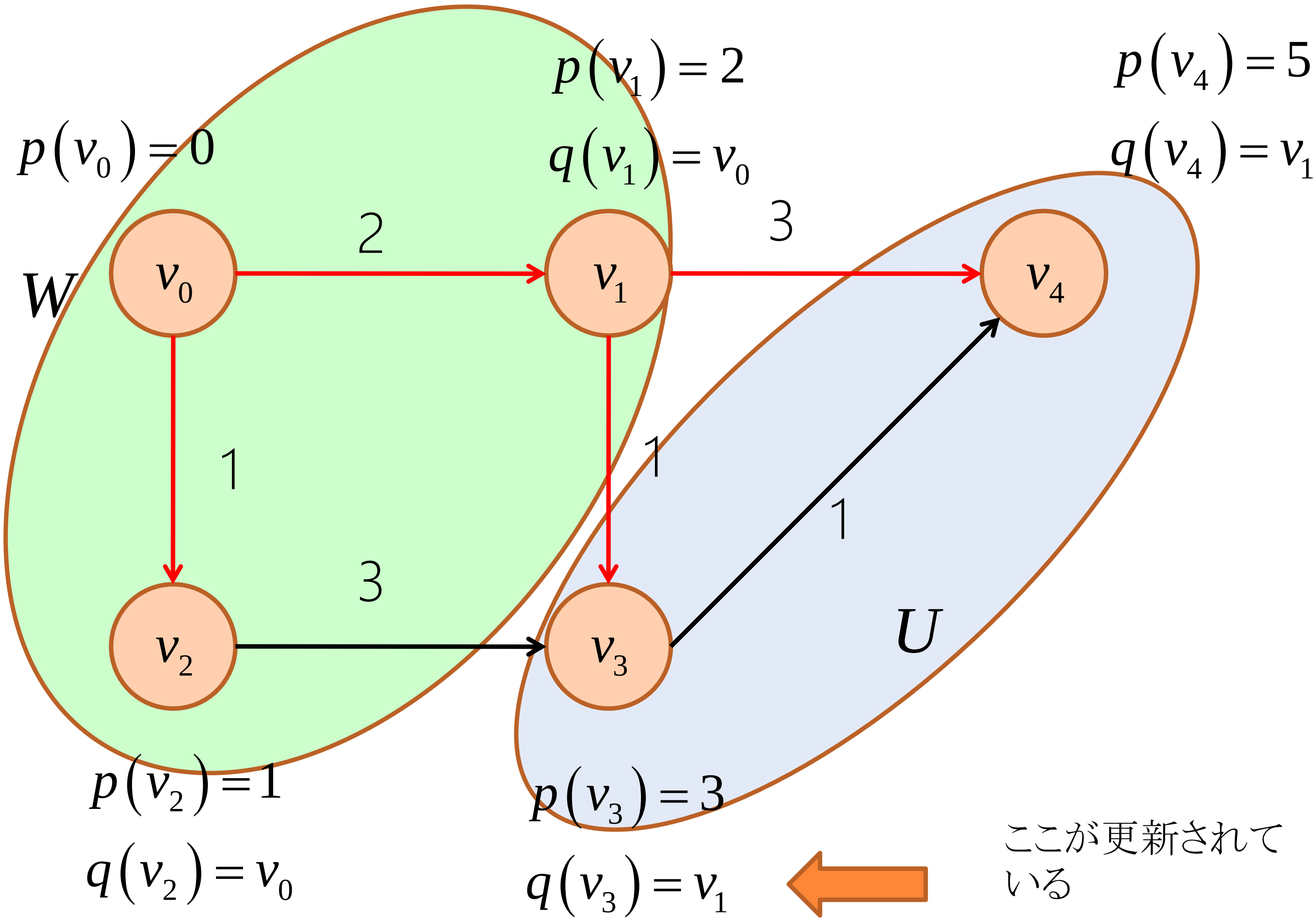
$$p(v_0) = 0$$





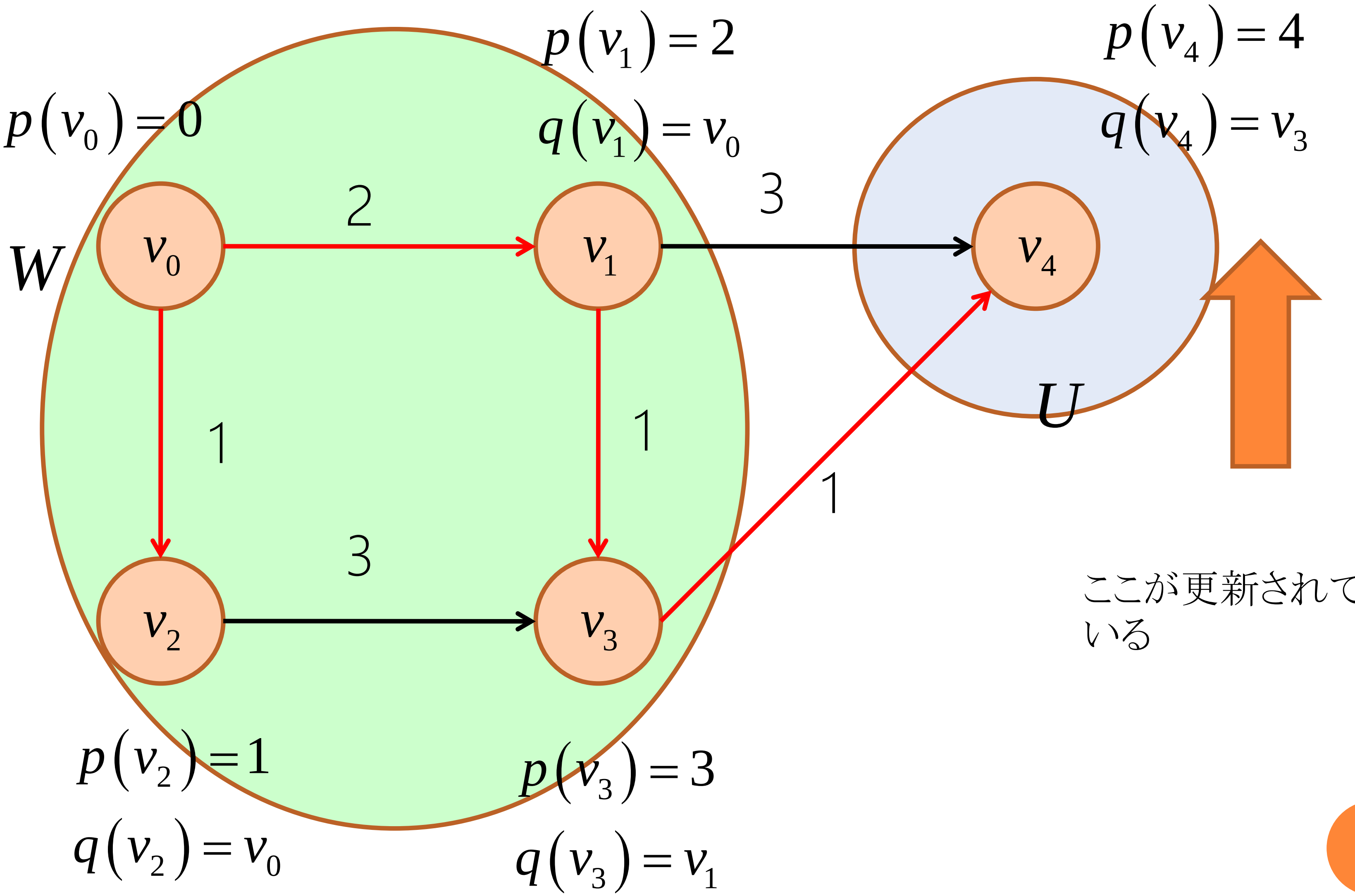
$p(v_1) = 2$
$q(v_1) = v_0$
$p(v_0) = 0$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
3
v_2
v_3
U
$p(v_2) = 1$
$q(v_2) = v_0$


$p(v_1) = 2$
$q(v_1) = v_0$
$p(v_0) = 0$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
U
1
1
3
v_2
v_3
$p(v_2) = 1$
$q(v_2) = v_0$
$p(v_3) = 4$
$q(v_3) = v_2$

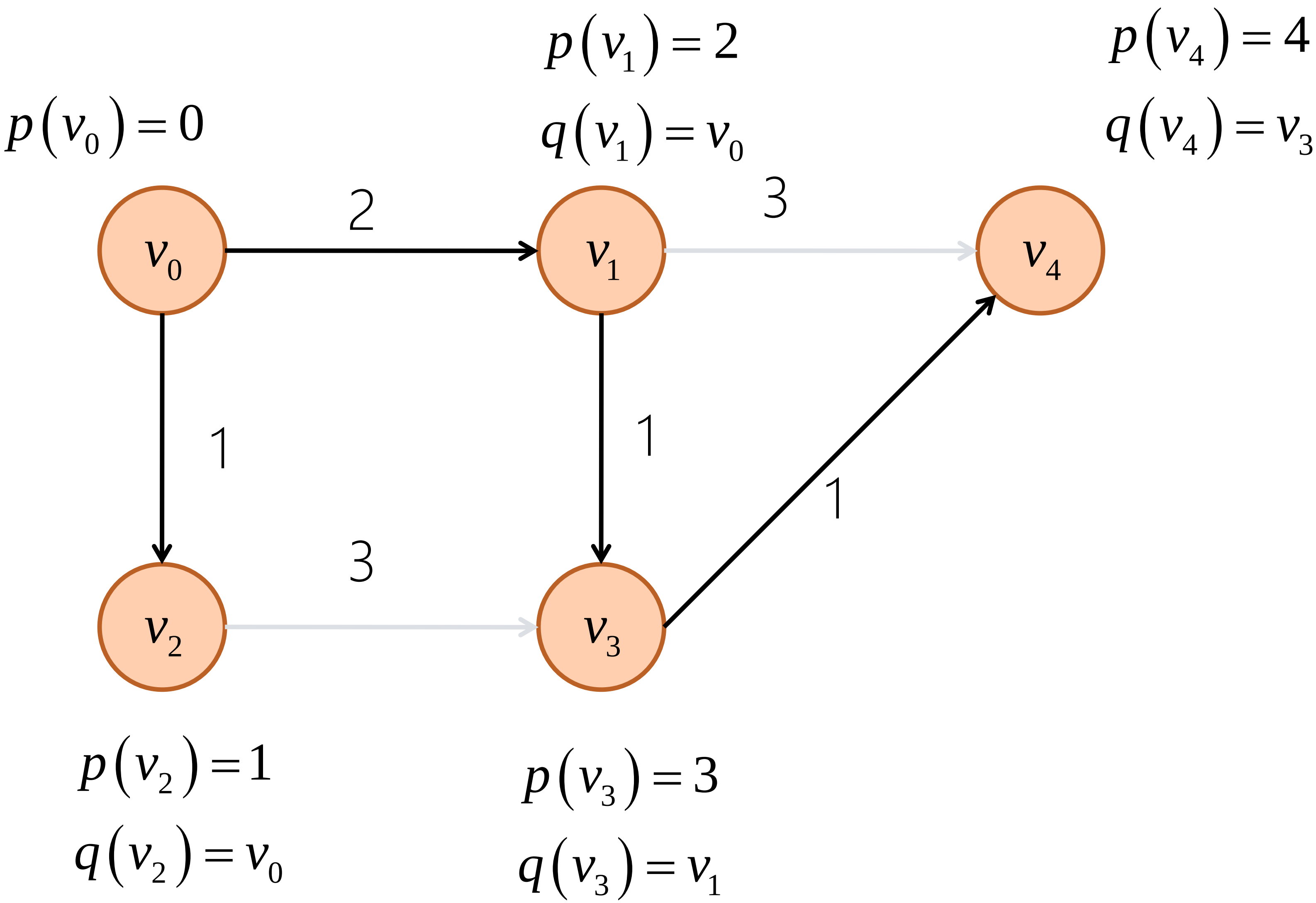


$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=5$
$q(v_4)=v_1$
W
v_0
v_1
v_4
2
3
1
1
1
3
U
v_2
v_3
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$

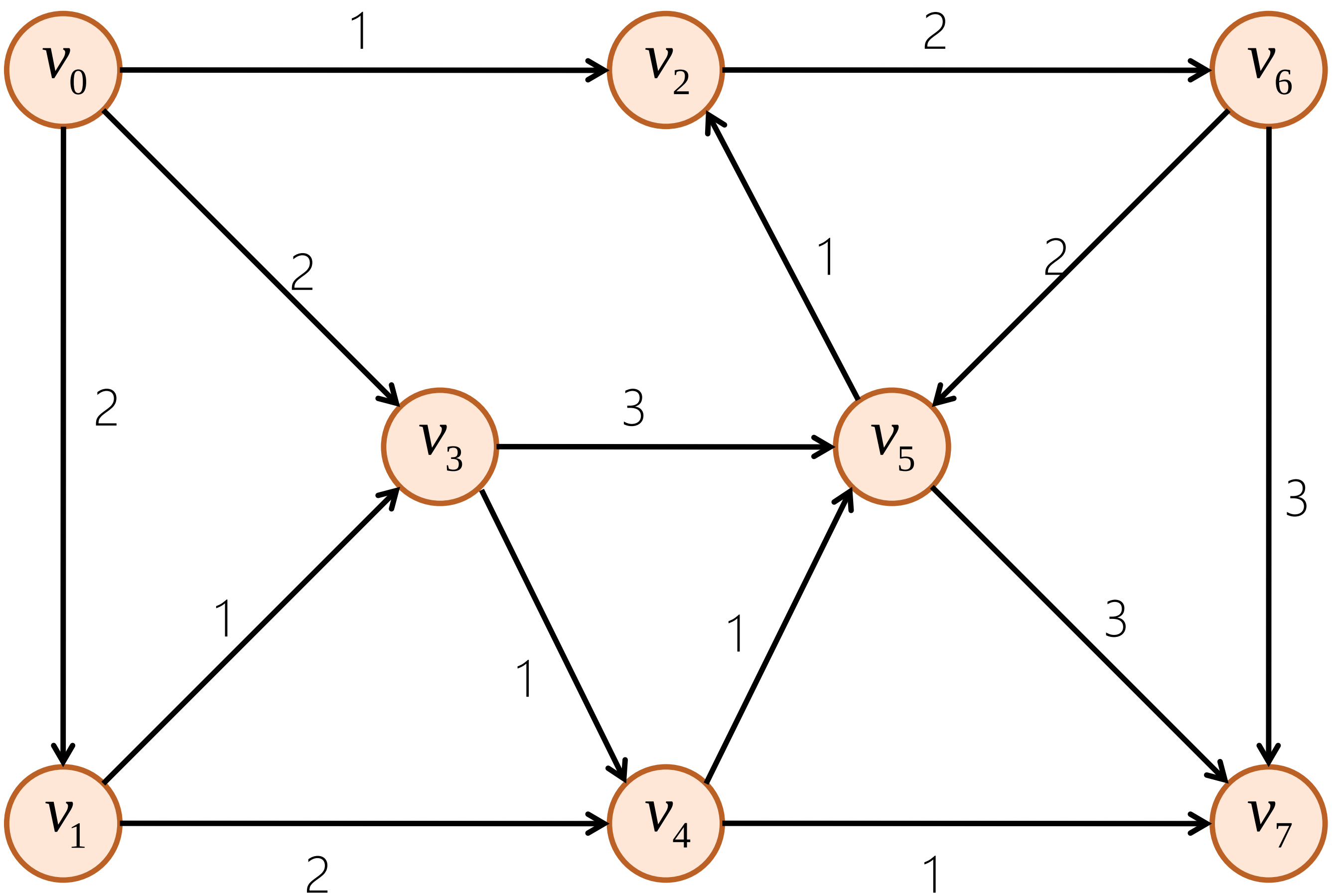
ここが更新されている


$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=4$
$q(v_4)=v_3$
$p(v_0)=0$
W
v_0
v_1
v_4
v_2
v_3
U
2
3
1
1
1
3
ここが更新されている
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$

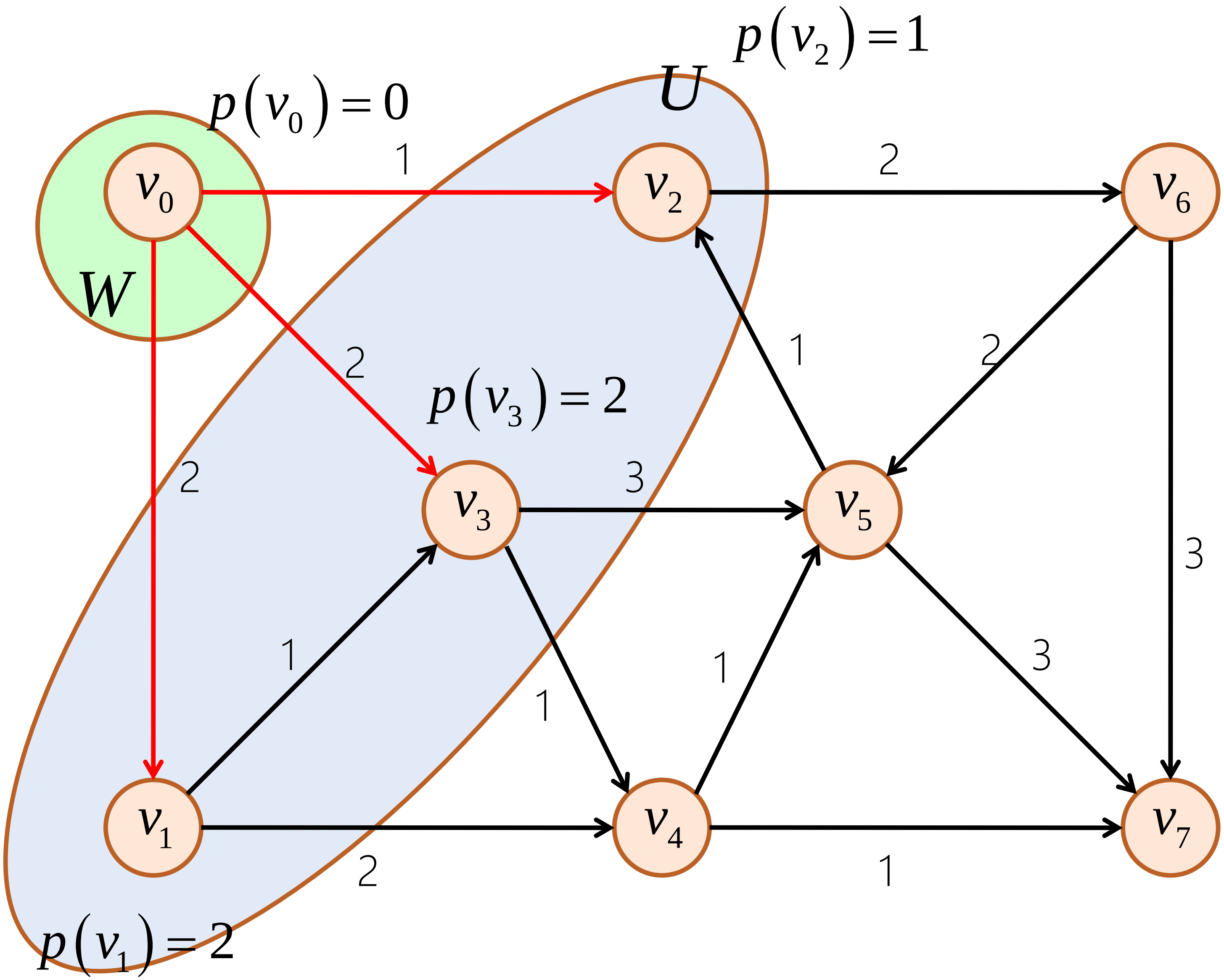
	注目している頂点	W	U	p	q	更新を受けた手順
0		$\varnothing$	$\{v_0\}$	$p(v_0)=0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2\}$	$p(v_1)=2$	$q(v_1)=v_0$	
				$p(v_2)=1$	$q(v_2)=v_0$	
2	v_2	$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3\}$	$p(v_3)=4$	$q(v_3)=v_2$	3
3	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4\}$	$p(v_4)=5$	$q(v_4)=v_1$	4
				$p(v_3)=3$	$q(v_3)=v_1$	
4	v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4\}$	$p(v_4)=4$	$q(v_4)=v_3$	
5	v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\varnothing$			


$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=4$
$q(v_4)=v_3$
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
2
3
1
1
1
3
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$

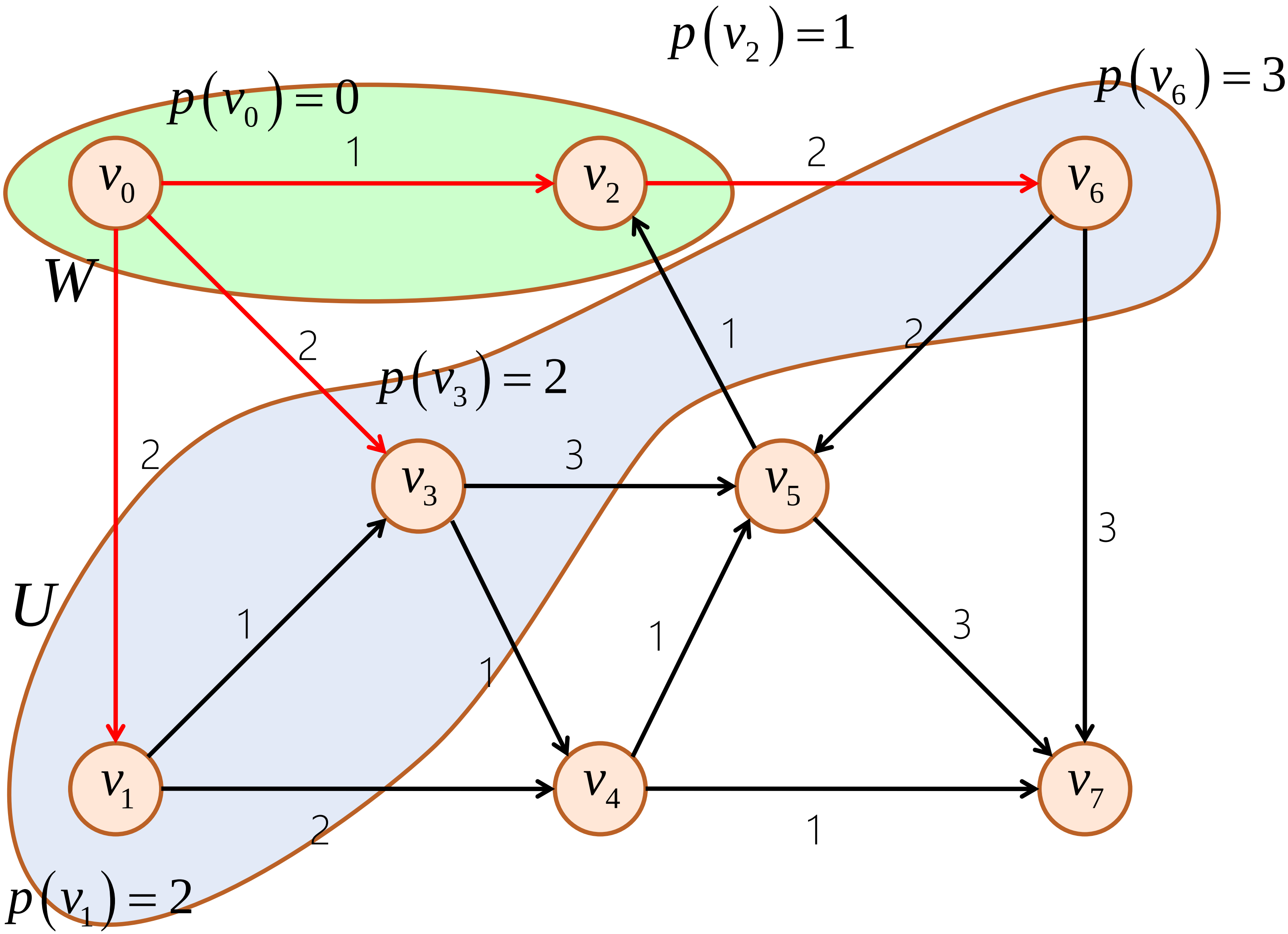
例2



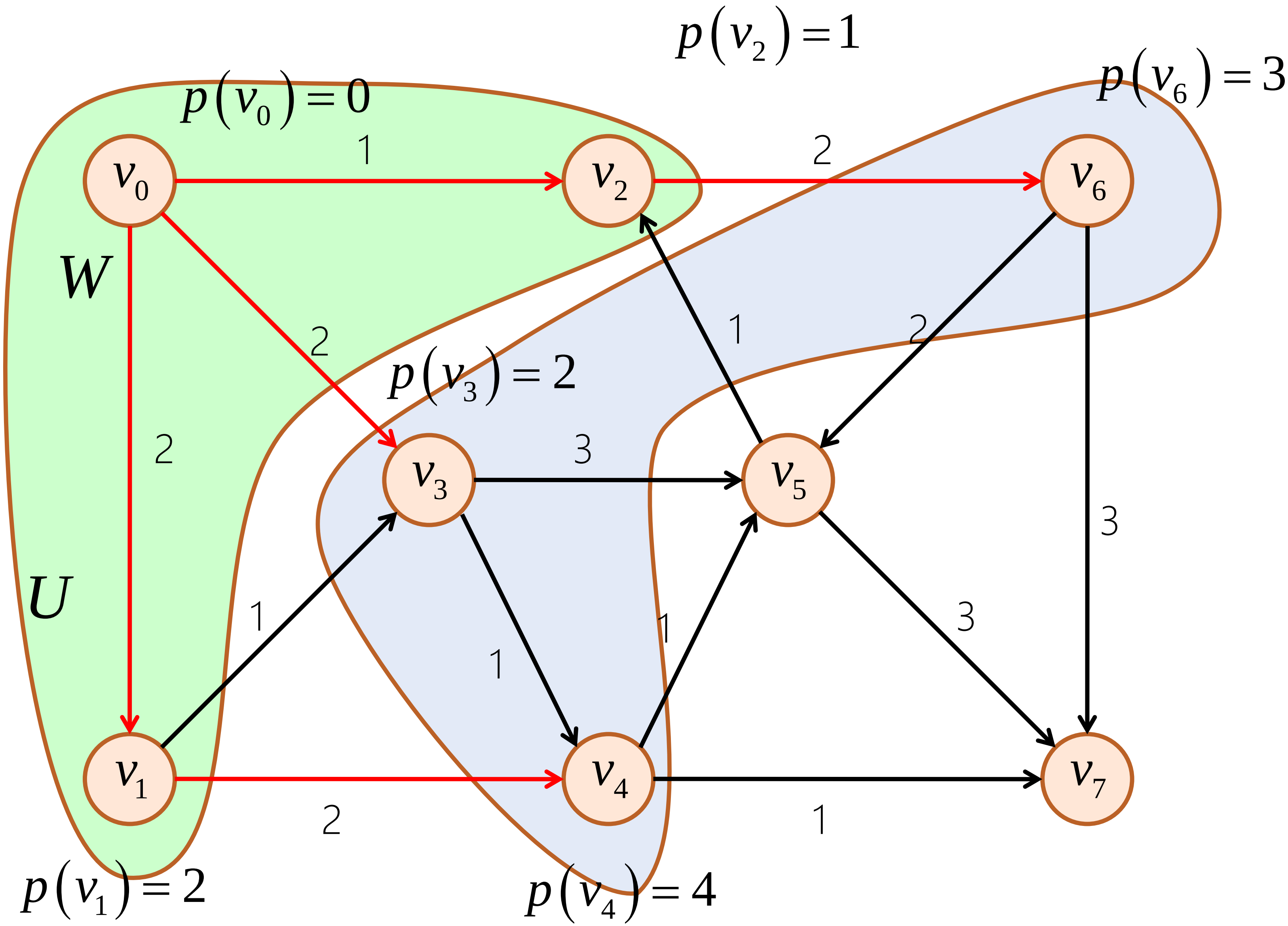
qは省略



qは省略

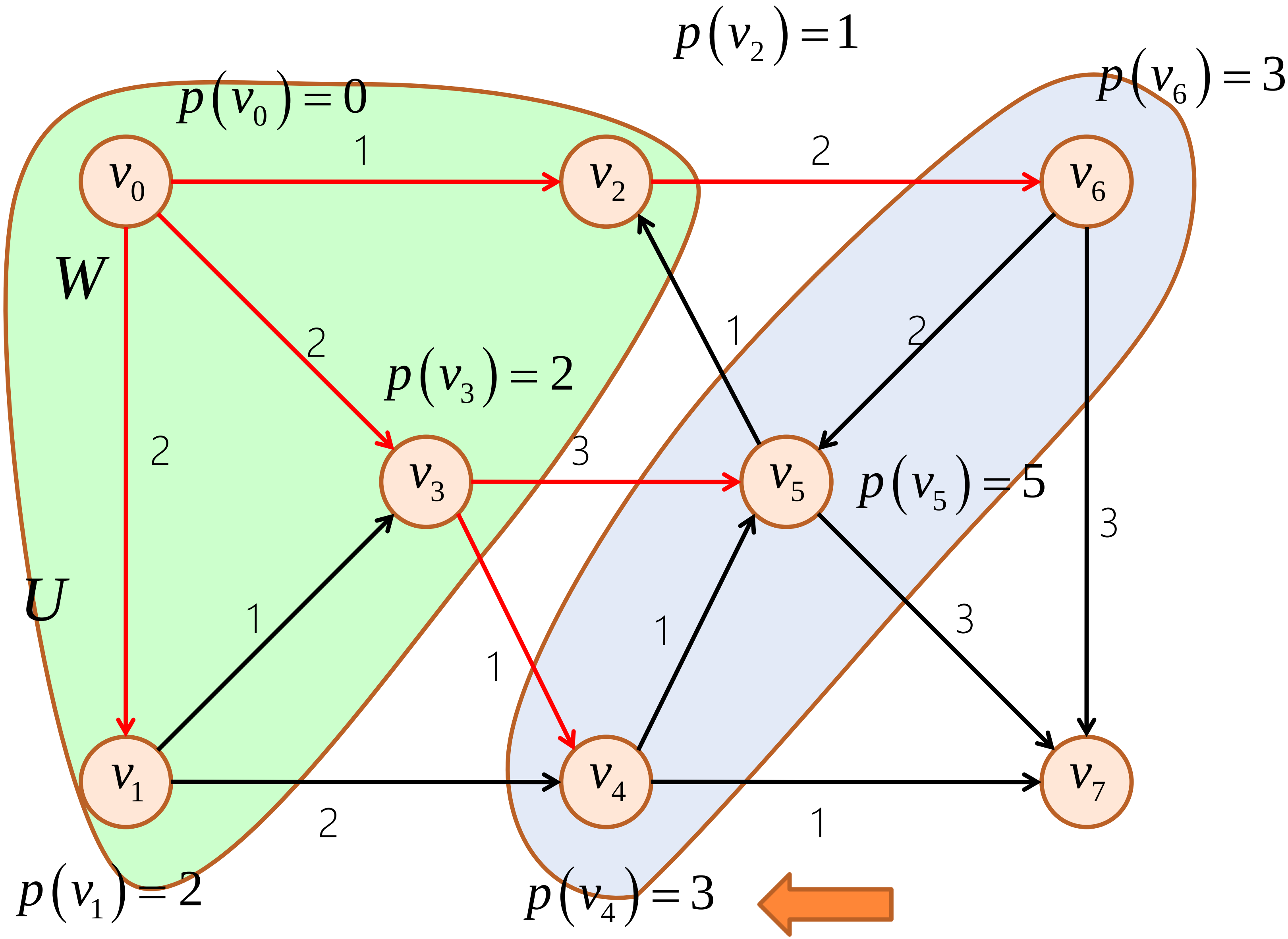

$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_0)=0$
v_0
v_2
v_6
W
$p(v_3)=2$
v_3
v_5
U
v_1
v_4
v_7
$p(v_1)=2$
1
2
2
2
1
2
3
3
1
1
3
1
2
1

qは省略

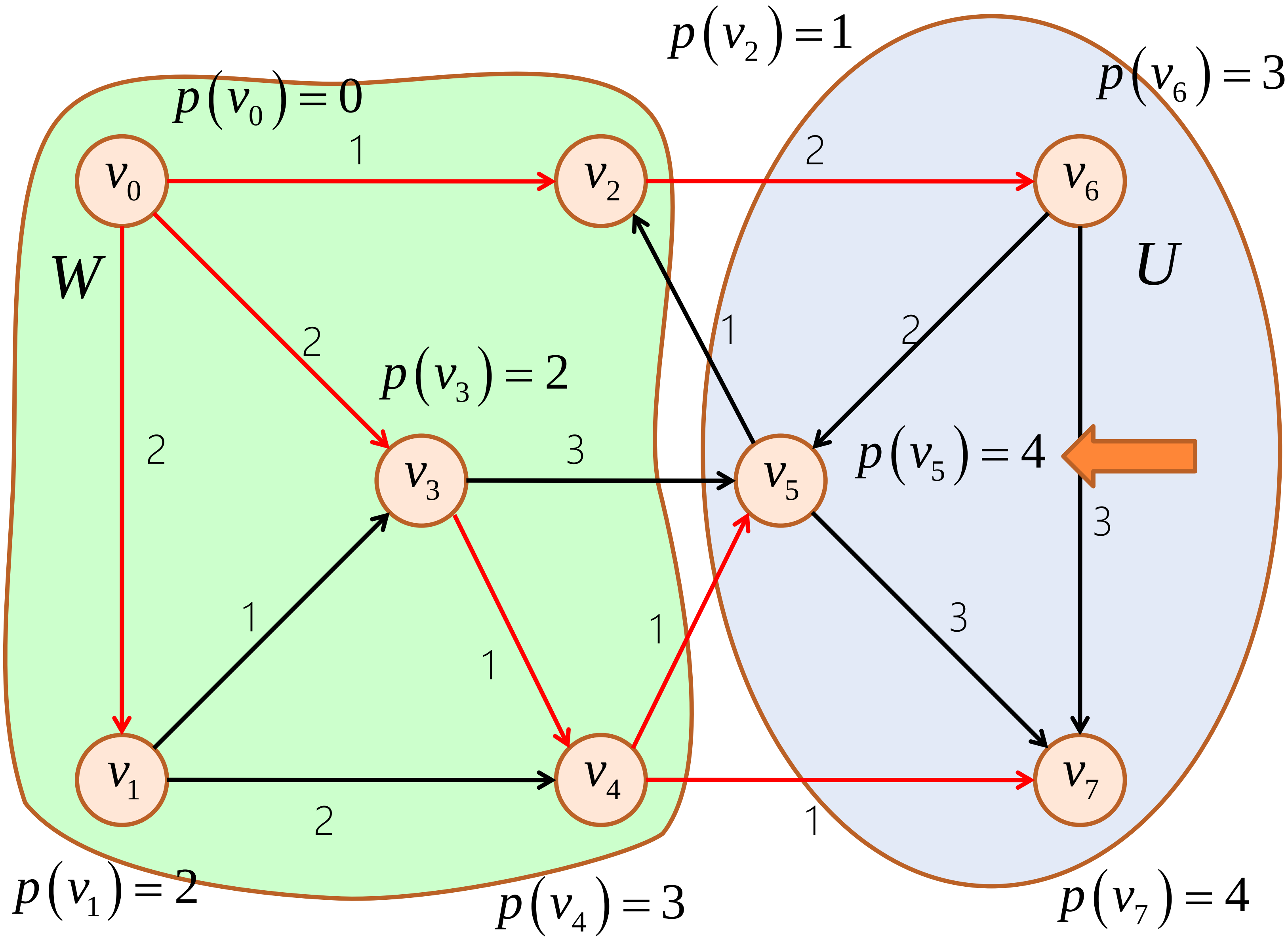


$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_0)=0$
v_0
1
v_2
2
v_6
W
2
1
2
$p(v_3)=2$
2
3
v_3
v_5
3
U
1
3
1
1
v_1
v_4
v_7
2
1
$p(v_1)=2$
$p(v_4)=4$

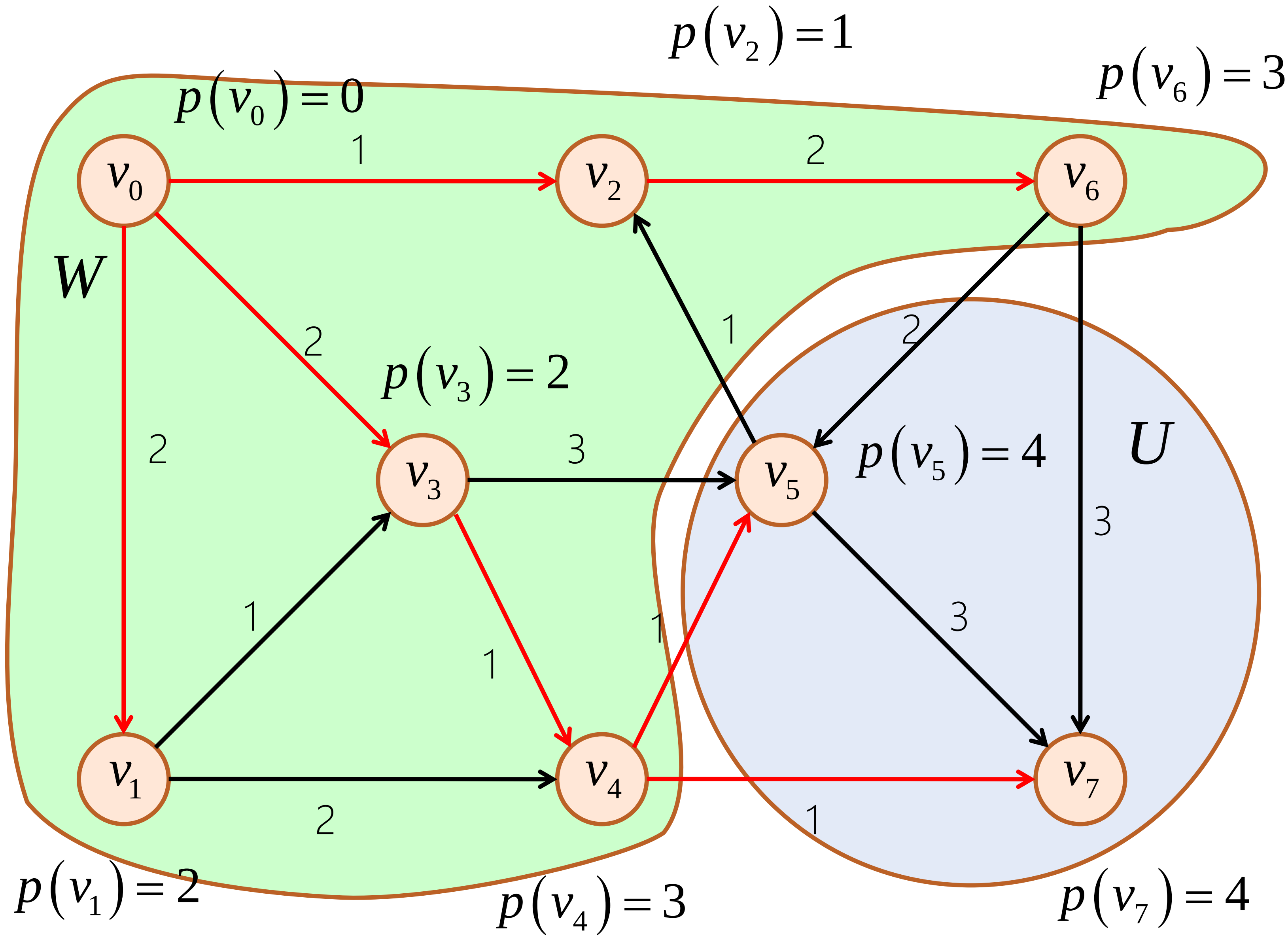
qは省略



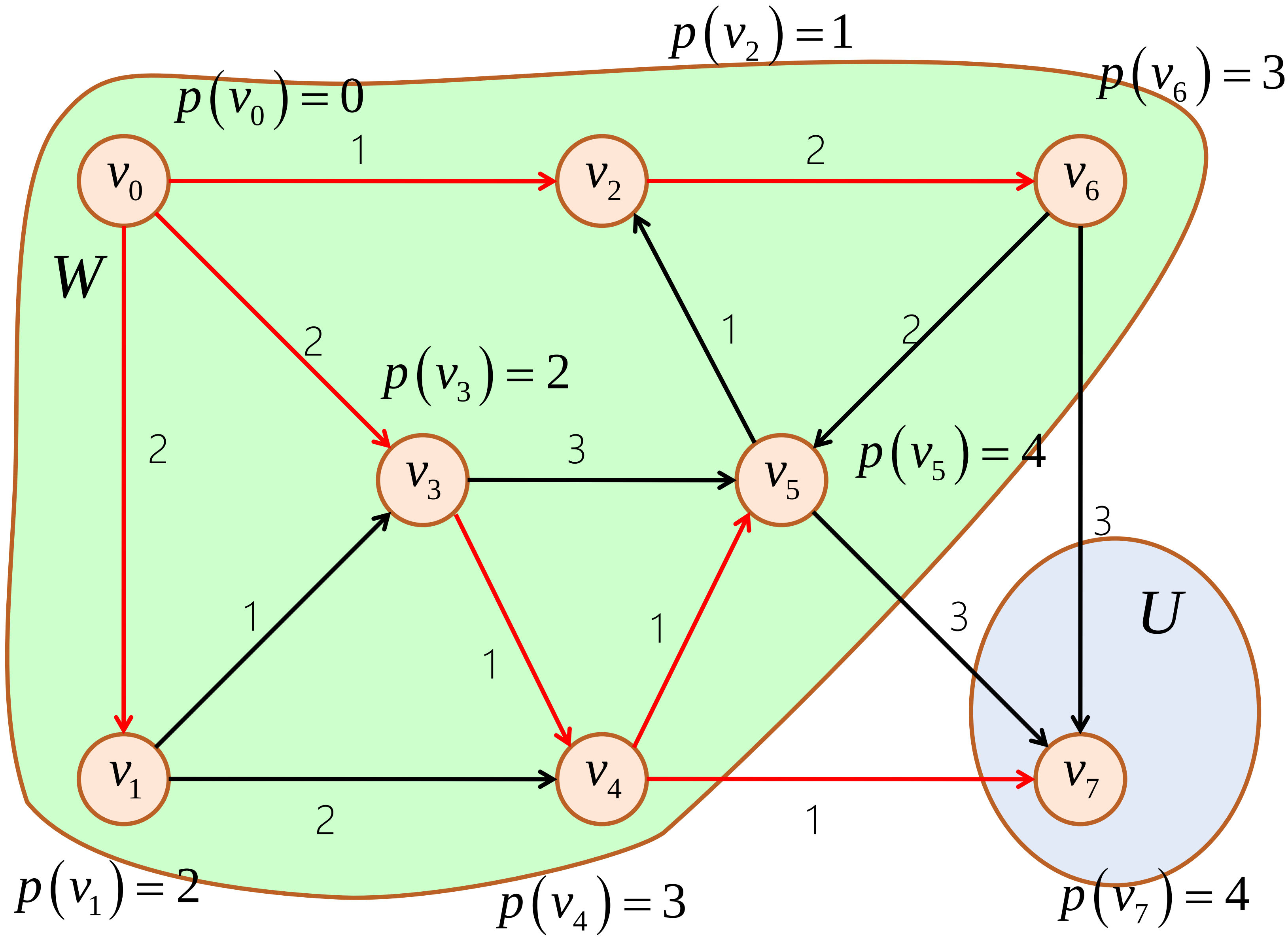
qは省略


$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_0)=0$
v_0
v_2
v_6
W
U
$p(v_3)=2$
v_3
v_5
$p(v_5)=4$
v_1
v_4
v_7
$p(v_1)=2$
$p(v_4)=3$
$p(v_7)=4$
1
2
2
2
2
1
3
3
3
1
1
1
2
1

qは省略


$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_0)=0$
v_0
1
v_2
2
v_6
W
2
1
2
$p(v_3)=2$
U
2
3
v_3
v_5
$p(v_5)=4$
3
1
1
3
1
v_1
v_4
v_7
2
1
$p(v_1)=2$
$p(v_4)=3$
$p(v_7)=4$

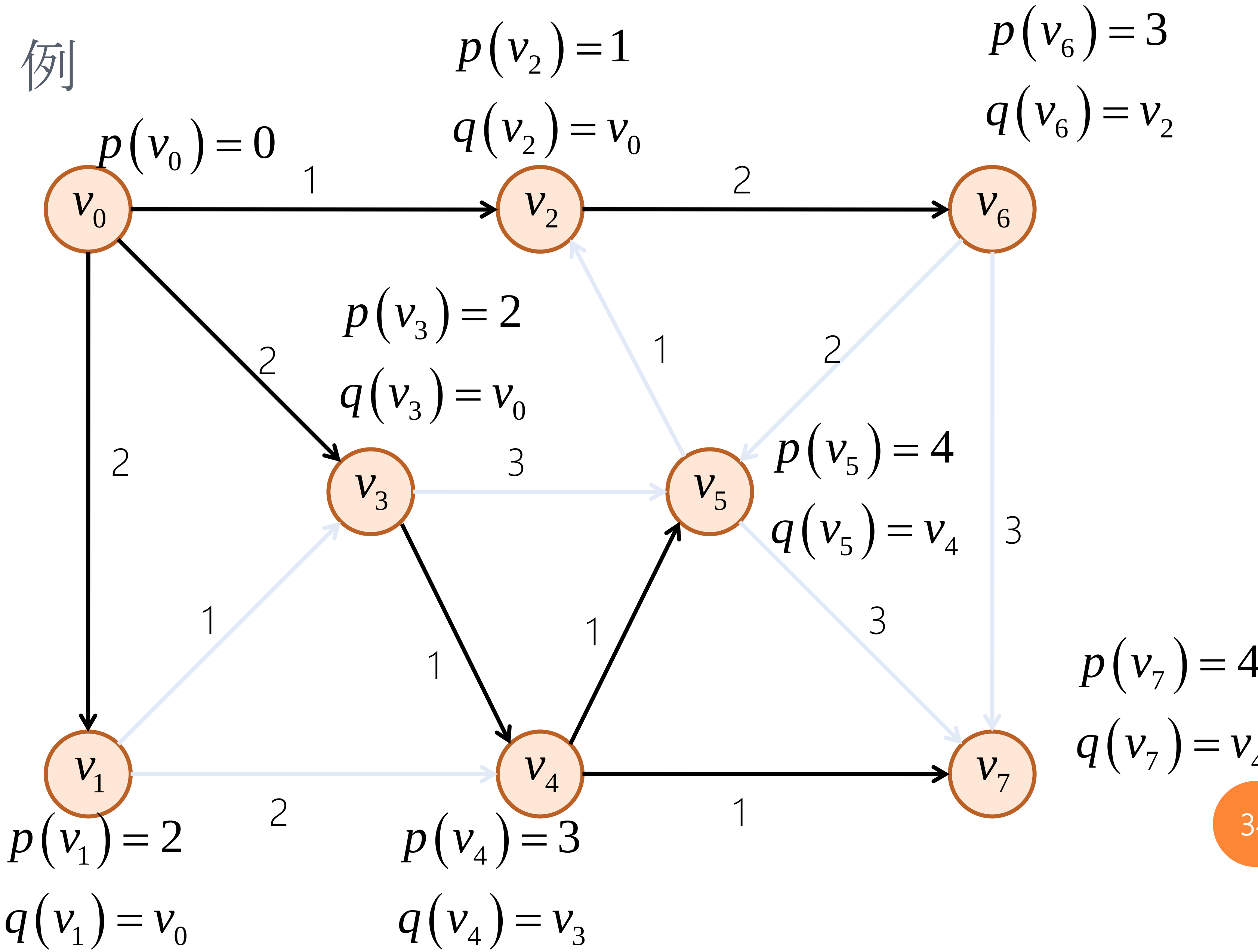
qは省略



$p(v_0)=0$
$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_3)=2$
$p(v_5)=4$
$p(v_1)=2$
$p(v_4)=3$
$p(v_7)=4$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7

	注目している頂点	W	U	p	q	更新を受けた手順
0		$\varnothing$	$\{v_0\}$	$p(v_0)=0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1,v_2,v_3\}$	$p(v_1)=2$	$q(v_1)=v_0$	
				$p(v_2)=1$	$q(v_2)=v_0$	
				$p(v_3)=2$	$q(v_3)=v_0$	
2	v_2	$\{v_0,v_2\}$	$\{v_1,v_3,v_6\}$	$p(v_6)=3$	$q(v_6)=v_2$	
3	v_1	$\{v_0,v_1,v_2\}$	$\{v_3,v_4,v_6\}$	$p(v_4)=4$	$q(v_4)=v_1$	4
4	v_3	$\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$	$\{v_4,v_5,v_6\}$	$p(v_4)=3$	$q(v_4)=v_3$	
				$p(v_5)=5$	$q(v_5)=v_3$	5
5	v_4	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4\}$	$\{v_5,v_6,v_7\}$	$p(v_5)=4$	$q(v_5)=v_4$	
				$p(v_7)=4$	$q(v_7)=v_4$	
6	v_6	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_6\}$	$\{v_5,v_7\}$			
7	v_5	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$	$\{v_7\}$			
8	v_7	$\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$	$\varnothing$			

例


$p(v_0)=0$
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_6)=3$
$q(v_6)=v_2$
$p(v_3)=2$
$q(v_3)=v_0$
$p(v_5)=4$
$q(v_5)=v_4$
$p(v_7)=4$
$q(v_7)=v_4$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=3$
$q(v_4)=v_3$
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
1
2
3
1
1
1
3
3
2
1

DIJKSTRA法が正しいことの証明

- 補題1
  - 頂点集合Wに入った頂点までの距離は、後から更新されることはない
- 補題2
  - W及びUの要素の頂点は、一意に直前の頂点があり、始点を根とする有向木の一部である
  - この木に沿って$l_p = 0$である
  - この木以外の道では$l_p \geq 0$となる
  - つまり、発見した経路の中で最短である
- 以上から、$W = V$となることで、すべての最短経路が見つかる

Dijkstra法の妥当性：補題1

- Dijkstra法の実行に伴って、頂点が$v_0, v_1, v_2, \cdots$の順に集合Wに追加されるとする
  - 頂点名は、元のネットワークの頂点名でないことに注意
- このとき

$$0 \le p(v_0) \le p(v_1) \le p(v_2) \le \ldots \le p(v_i) \le p(v_{i+1}) \le \ldots$$

- つまりWには、距離の小さい頂点から順に追加されていく。従って、Wに入った頂点のポテンシャルが後から更新されることはない。

補題1証明

- Dijkstra法の実行中に、以下が常に成り立つことを示す
  - Wに追加された頂点のポテンシャルは、Wに含まれない任意の頂点のポテンシャルよりも小さい

$$\max\{p(u) \mid u \in W\} \le \min\{p(u) \mid u \in V \setminus W\}$$

補題1証明

- 一回目のループ実行後: 自明
  - $W = \{v_o\}, p(v_0) = 0$
- あるステップで成り立つと仮定
  - 次に選ばれる頂点: $w \in U \subseteq V \setminus W$
    - $V \setminus W$の中でポテンシャルが最小
  - ポテンシャルの更新前

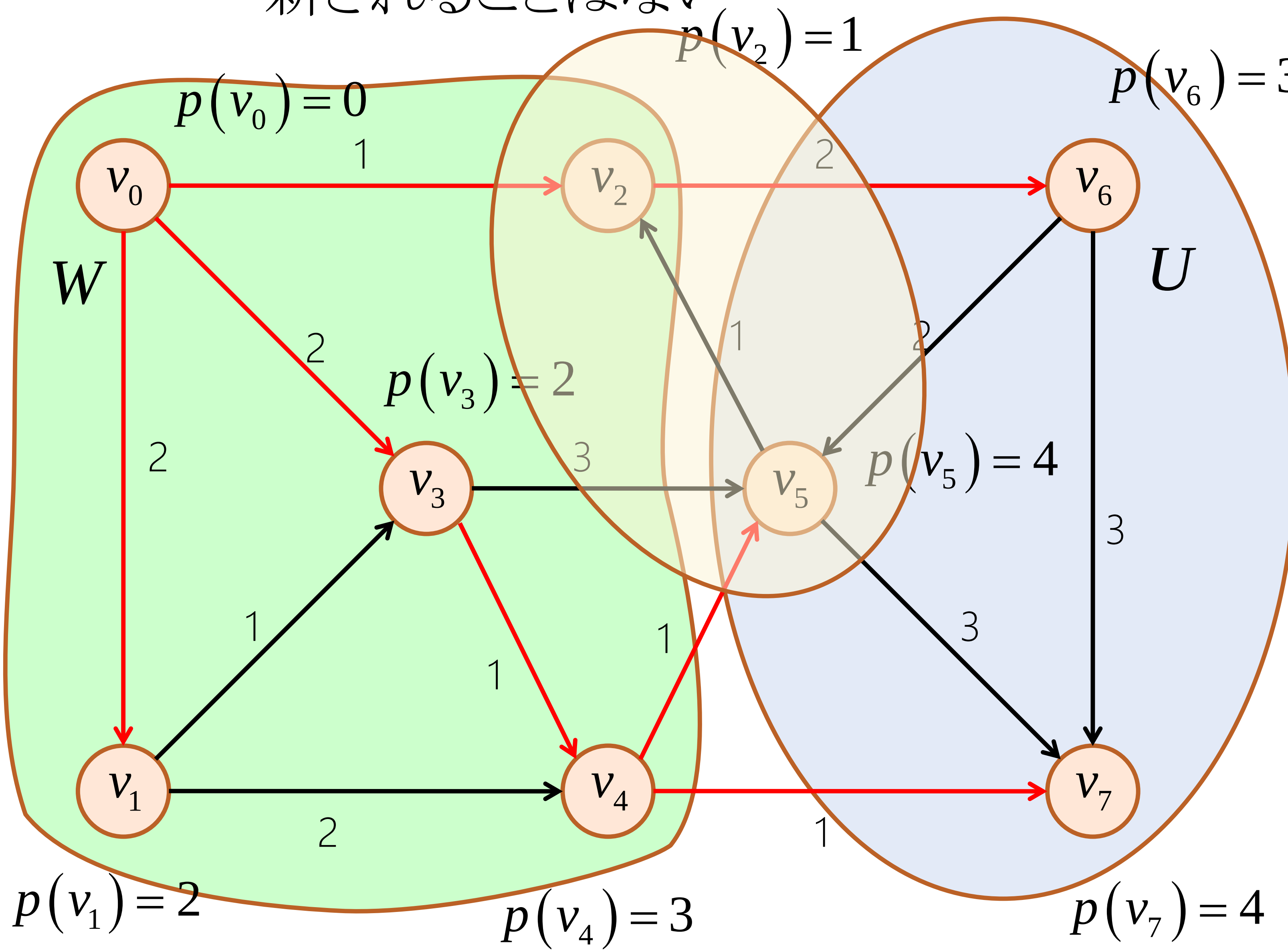
$$\max\left\{p(u) \middle| u \in W\right\} \le \boxed{p(w)} \le \min\left\{p(u) \middle| u \in V \setminus \left(W \cup \{w\}\right)\right\}$$

  - ポテンシャルの更新後

$$\max\left\{p(u) \middle| u \in W\right\} \le \min\left\{p(u) \middle| u \in V \setminus W\right\}$$

v_2のポテンシャルが更新されることはない

qは省略



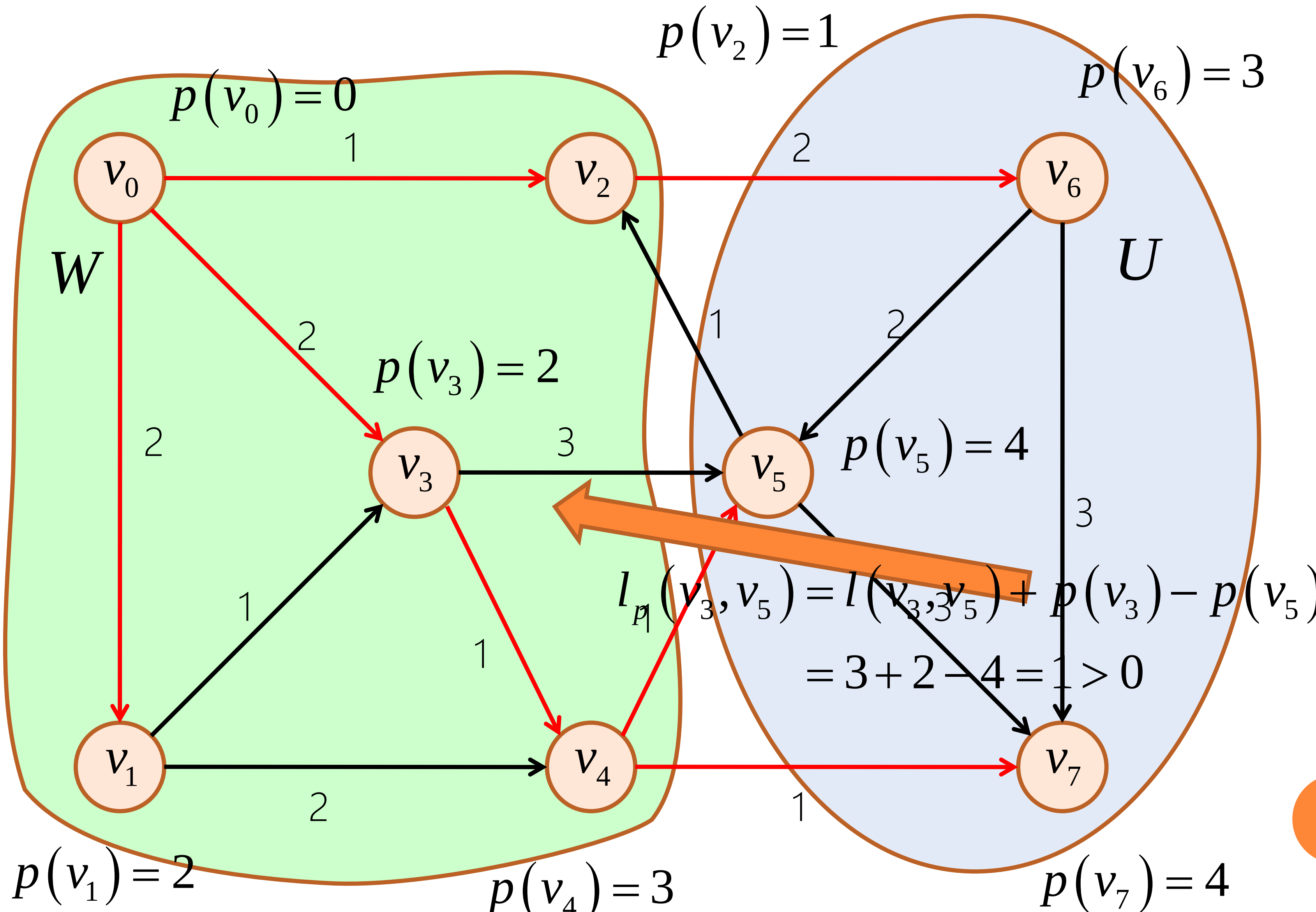
Dijkstra法の妥当性：補題2

- Wに始点を持つGの弧の集合δ^+W
  - $G_W = (W \cup U, \delta^+W)$に対して
    - $l_p(a) \geq 0 (\forall a \in \delta^+W)$
- 経路がわかっているならば

$$l_p(q(u), u) = 0 \left(\forall u \in (W \cup U) \setminus \{v_0\}\right)$$

- $\forall u \in (U \cup W) \setminus \{v_0\}$に対して定まる弧$(q(u), u)$の全体は、$v_0$を根とする有向木である。
- つまり、経路が指定されると、頂点uはv_0を根とする有向木の一部となり、その経路に沿って$l_p(v_0, u) = 0$となる

qは省略



$$l_p(v_3,v_5)=l(v_3,v_5)+p(v_3)-p(v_5)$$
$$=3+2-4=1>0$$

補題2証明

- Dijkstra法の手順から、$a \in \delta^+ W$に対して

$$p\left(\partial^- a\right) \le p\left(\partial^+ a\right) + l(a)$$
$$\Downarrow$$
$$l_p(a) = l(a) + p\left(\partial^+ a\right) - p\left(\partial^- a\right) \ge 0$$

- $\forall a \in U$に対して

$$p(u) = p\left(q(u)\right) + l\left(q(u), u\right)$$
$$\Downarrow$$
$$l_p\left(q(u), u\right) = l\left(q(u), u\right) + p\left(q(u)\right) - p(u) = 0$$

補題2証明

- 補題1より、Wの要素は順序付けられている
- $\forall v_j \in W$に対して、$q(v_i) = v_j$ならば、$j < i$
  - v_iに対して、一意に親の頂点が定まる
- $\forall v \in U$に対して、$q(v) = w \in W$
  - 一意に親が定まる
- v_0を根とした有向木が定まる

Dijkstra法で最短経路が求まるのは

- 始点uから各頂点vへの道$P(u,v)$が定まる
- その経路に沿って、$l_p\big(P(u,v)\big) = 0$となる

$$l\big(P(u,v)\big) = p(v) - p(u) \stackrel{l}{=} 0$$

- 他の経路$P'(u,v)$に対しては、その経路長が$P(u,v)$よりも長い

$$l\big(P'(u,v)\big) = p(v) - p(u) + l_p\big(P'(u,v)\big) \geq p(v) - p(u)$$