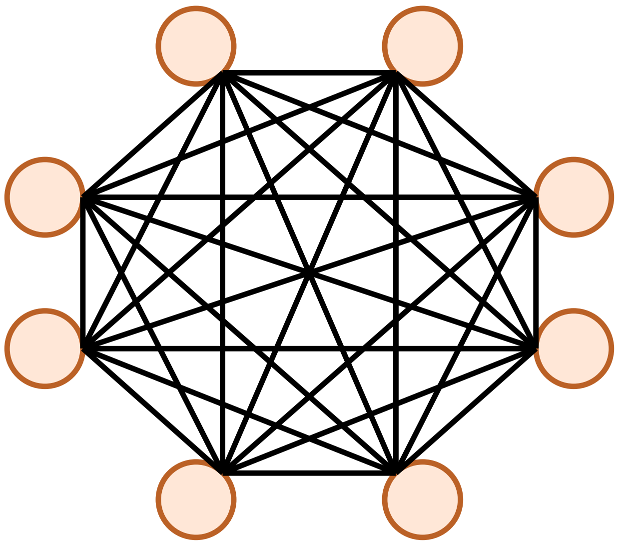
特殊なグラフ

今回の目的:特別な構造のグラフの導入

- 完全グラフ (complete graphs)
- 二部グラフ (bipartite graphs)
- 道 (paths)
- 閉路 (circles)
- 木 (trees)
- 平面グラフ (planer graphs)
- 双対グラフ (dual graphs)

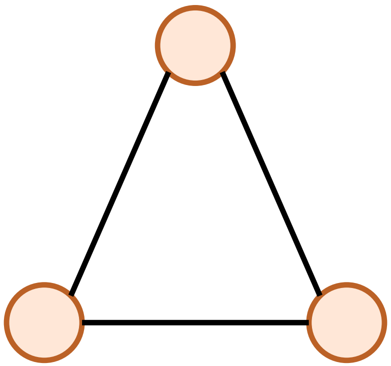
完全グラフ (Complete Graphs)

- 任意の相異なる頂点の組に必ず一つの弧が存在する無向グラフ

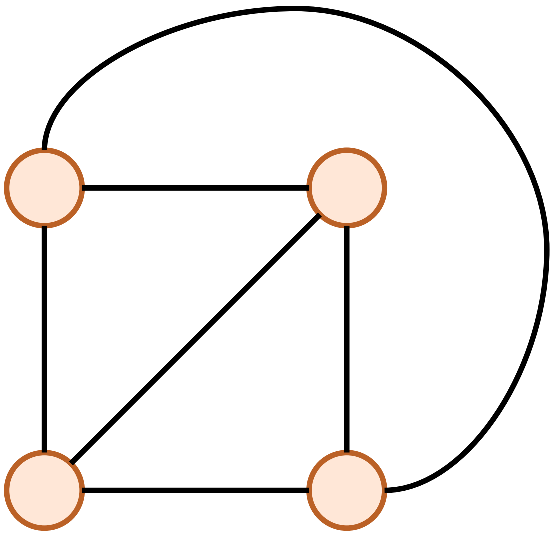


K_8

Komplett
ドイツ語：完全な



K_3

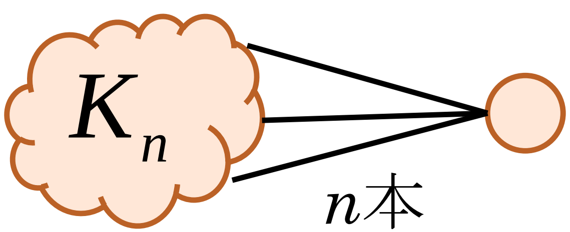


K_4

完全グラフの弧の数

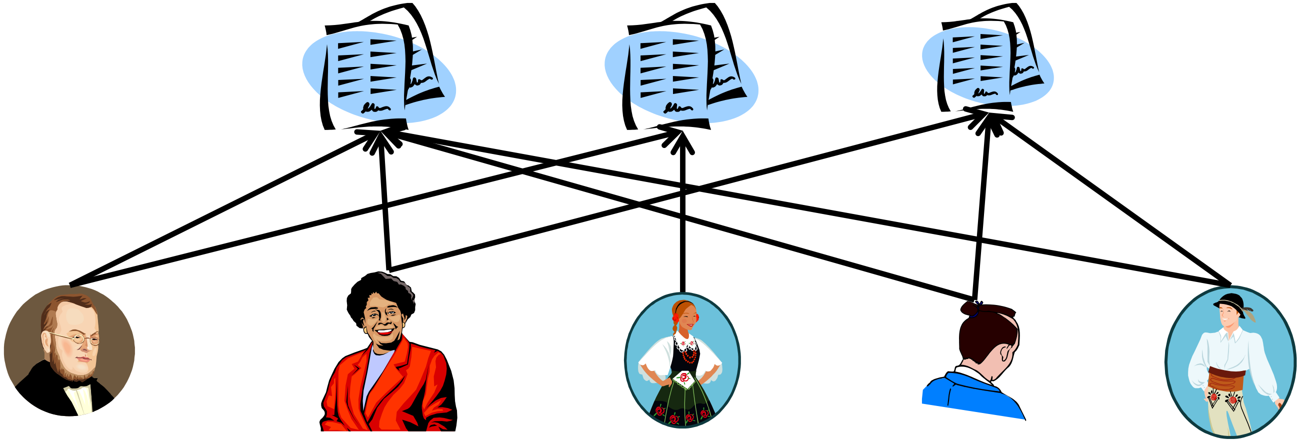
- K_nの弧の数 $$N_a(n)=\frac{n(n-1)}{2}$$
- 数学的帰納法による証明
  - n=3の場合：明らか
  - あるnで正しいと仮定する。頂点を一つ追加することは、その頂点から既存の頂点群に向かって、弧をn本追加することに対応する

$$N_a(n+1)=N_a(n)+n$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n-1+2)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$



二部グラフ (Bipartite Graphs)

- 二種類のモノの関係を表す
  - 俳優→映画
  - 研究者→論文
- ここから、以下のような関係を得ることができる
  - 俳優間の共演関係
  - 研究者間の共同研究の関係



例：共演関係のグラフ

- ケビン・ベーコンゲーム
  - 俳優の「距離」を測る
  - http://oracleofbacon.org
  - 映画俳優のデータベース
    - http://www.imdb.com
- グラフの可視化
  - http://www.math.ucsd.edu/~fan/complex/

- 参考書
  - 増田直紀「私たちはどうつながっているのか―ネットワークの科学を応用する」(中公新書、2007)
  - 安田雪「『つながり』を突き止めろ」(光文社新書、2010)

二部グラフ (Bipartite Graphs)

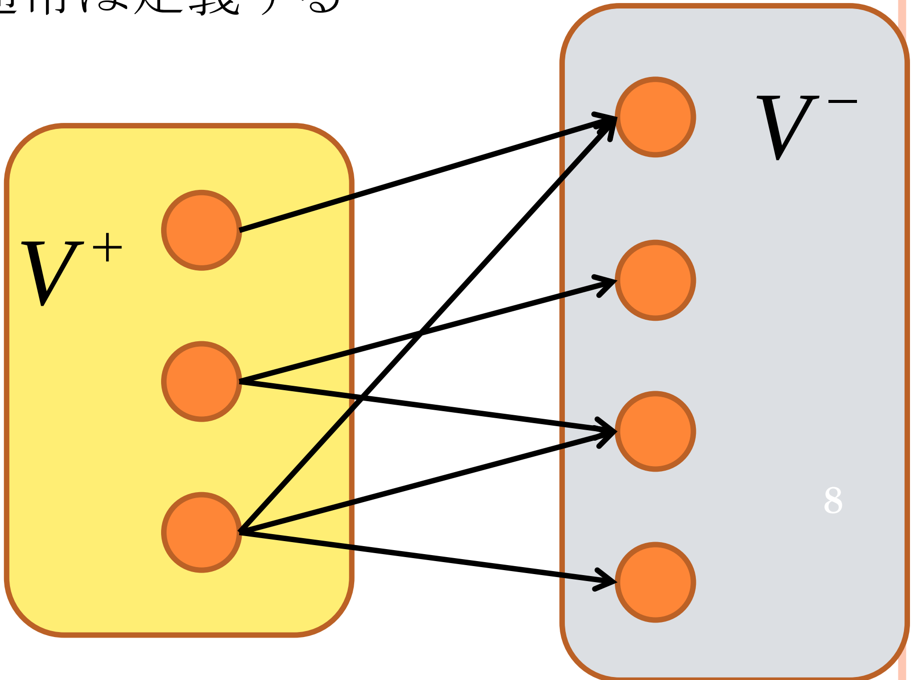
- グラフの頂点集合が二つに分割されている

$$V = V^+ \cup V^-, \quad V^+ \cap V^- = \emptyset$$

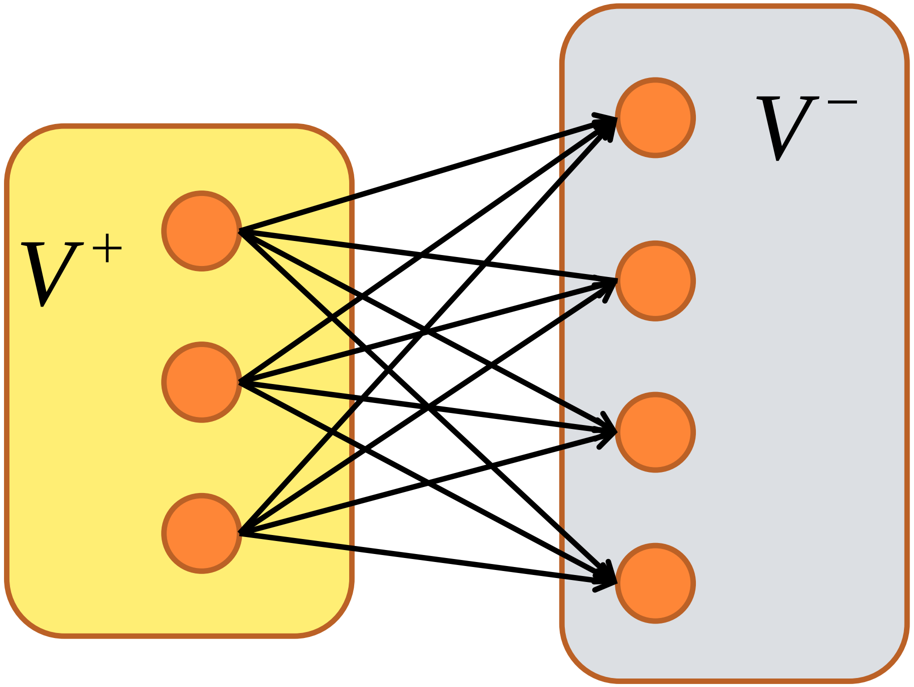
- 各弧がその二つの集合の頂点を結ぶ
  - 弧の向きはV^+からV^-へと、通常は定義する

$$\forall a \in A$$

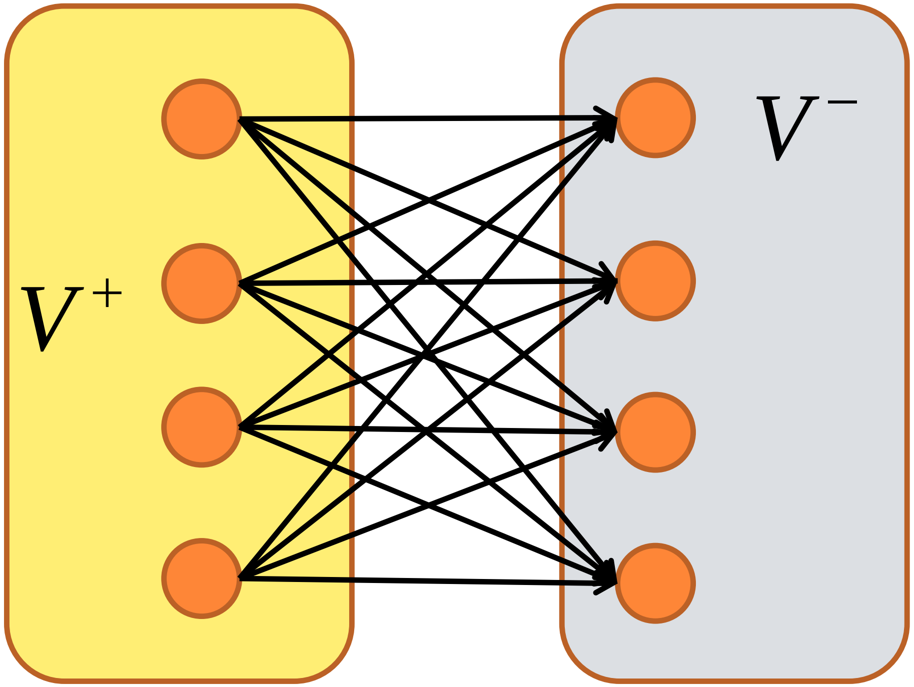
$$\partial^+ a \in V^+ \wedge \partial^- a \in V^-$$



完全二部グラフ (Complete Bipartite Graphs)



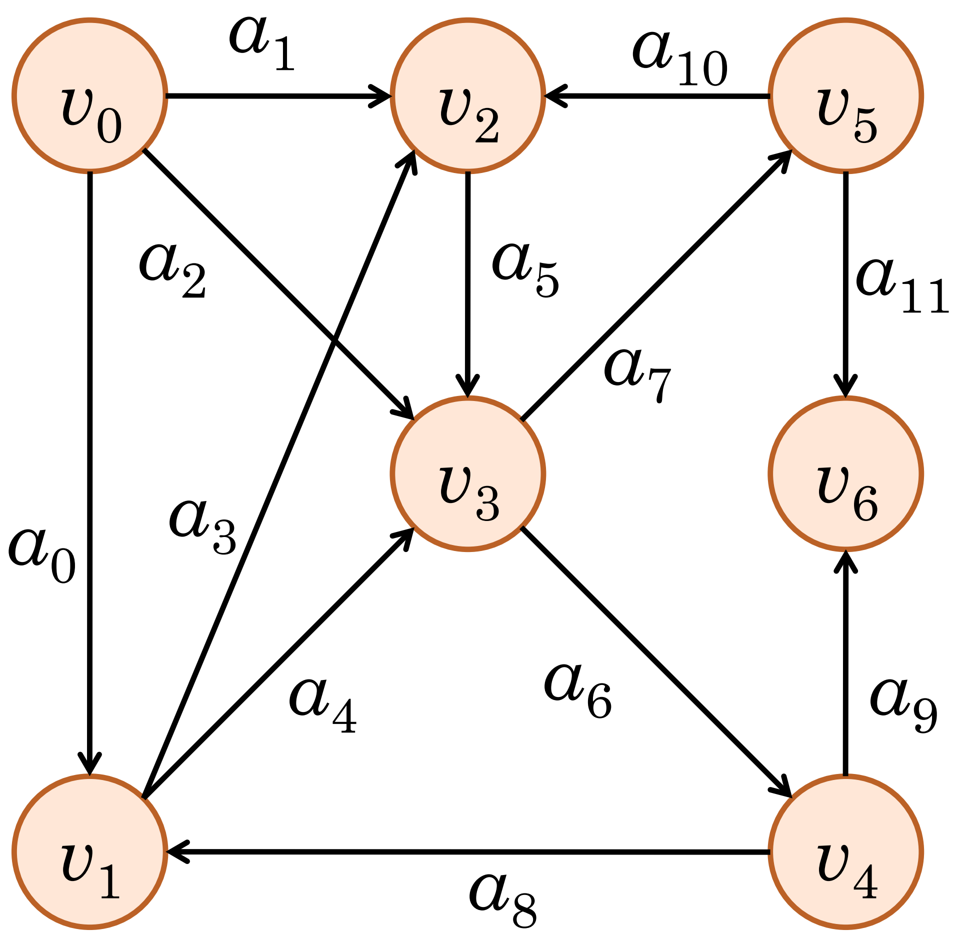
$K_{3,4}$ 任意の頂点の組に対して辺がある $\left\{(v,w) \mid v \in V^+, w \in V^-\right\}$



$K_{4,4}$

道 (PATHS)

- 始点から終点までの経路を「道」と言う



v_0からv_6への道

$a_0a_3a_5a_7a_{11}$

$a_0a_3a_5a_6a_9$

$a_0a_4a_7a_{11}$

$a_0a_4a_6a_9$

$a_1a_5a_7a_{11}$

$a_1a_5a_6a_9$

…

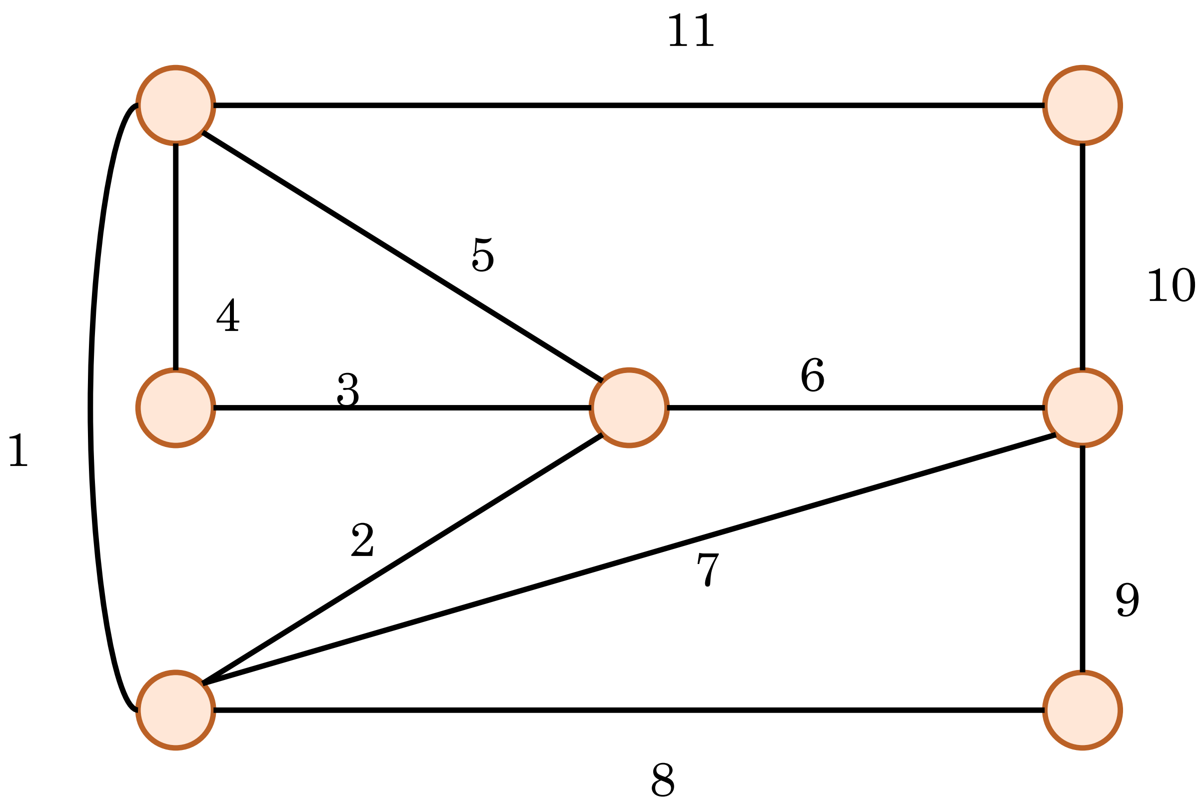
- 通常、「道」は弧の向きを無視して考えるが

- 弧の向きが揃っている場合
  - 有向道 (directed path)
- 同じ弧を一度しか通らない道
  - 単純な道 (simple path)
- 同じ頂点を一度しか通らない道
  - 初等的な道 (elementary path)
- 始点と終点が同じ道
  - 閉路 (closed path)

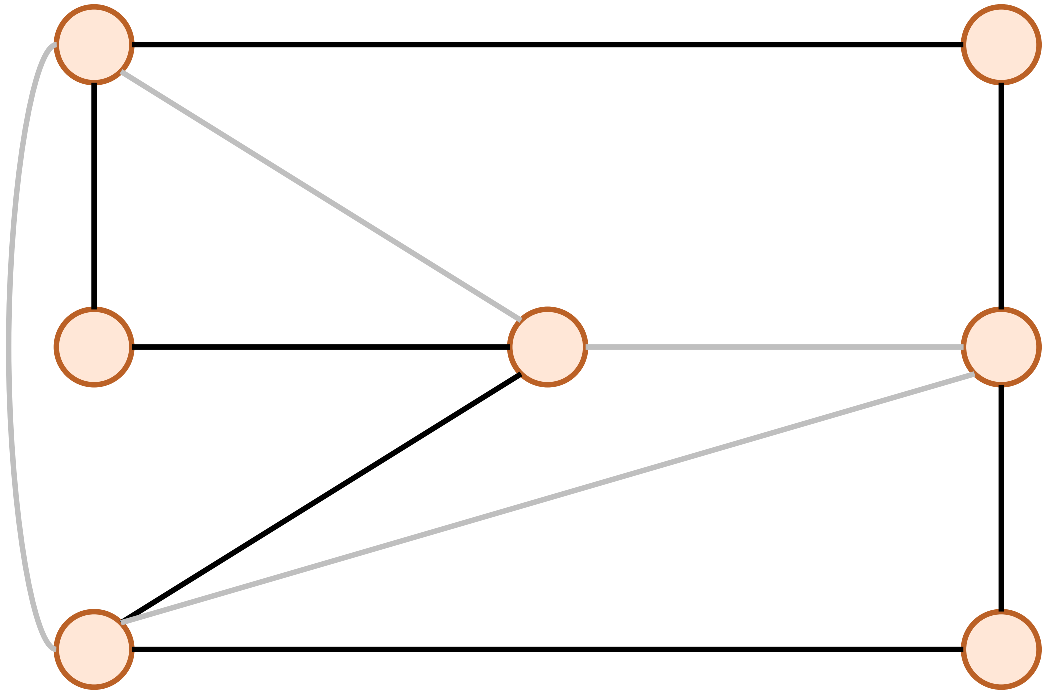
閉路 (CLOSED PATH, CIRCLES)

- 始点と終点が同じ道を「閉路」と呼ぶ
- Euler閉路
  - 全ての弧を一度ずつ経由する閉路
  - 一筆書き
- Hamilton閉路
  - 全ての頂点を一度ずつ経由する閉路
- 無閉路グラフ(acyclic graphs)
  - 閉路を含まないグラフ

EULER閉路

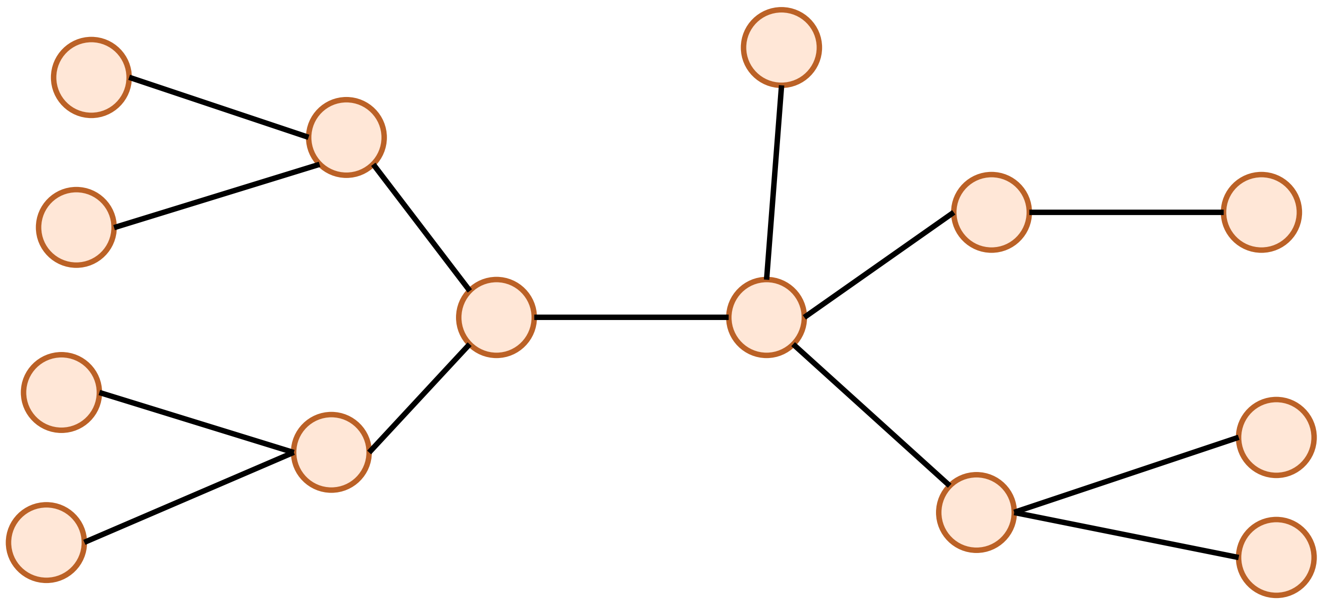


HAMILTON閉路



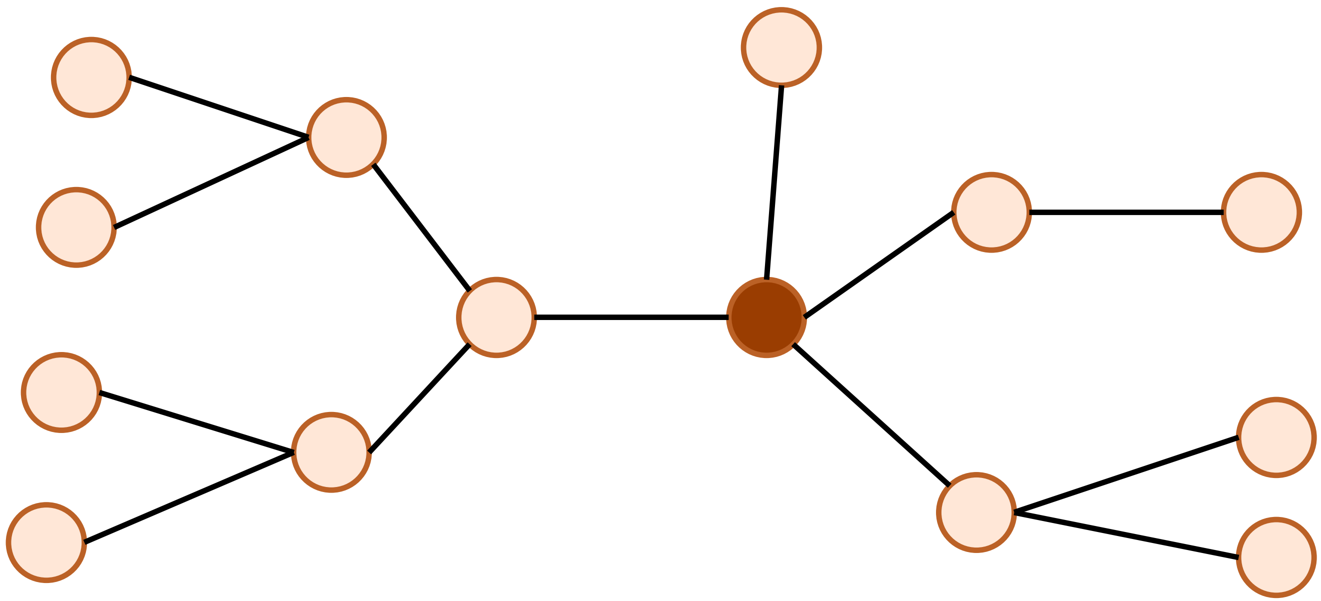
木 (TREE)

- 閉路を含まない連結なグラフ
  - 「木」の形
  - 通常は無向グラフ
  - 葉 (leaf) : 次数が1である点



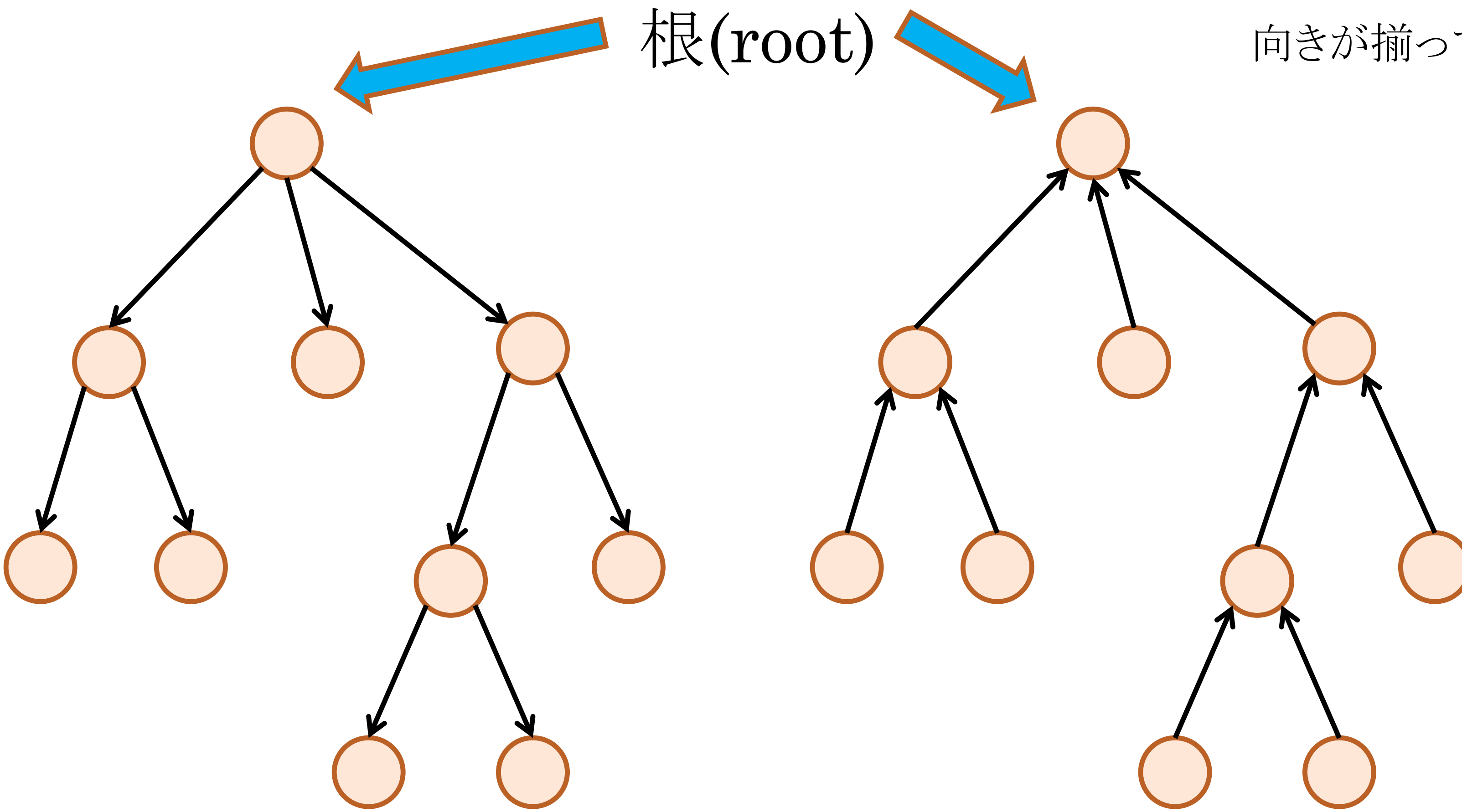
木 (Tree)

- 無向木では、任意の点を選んで根(root)とできる



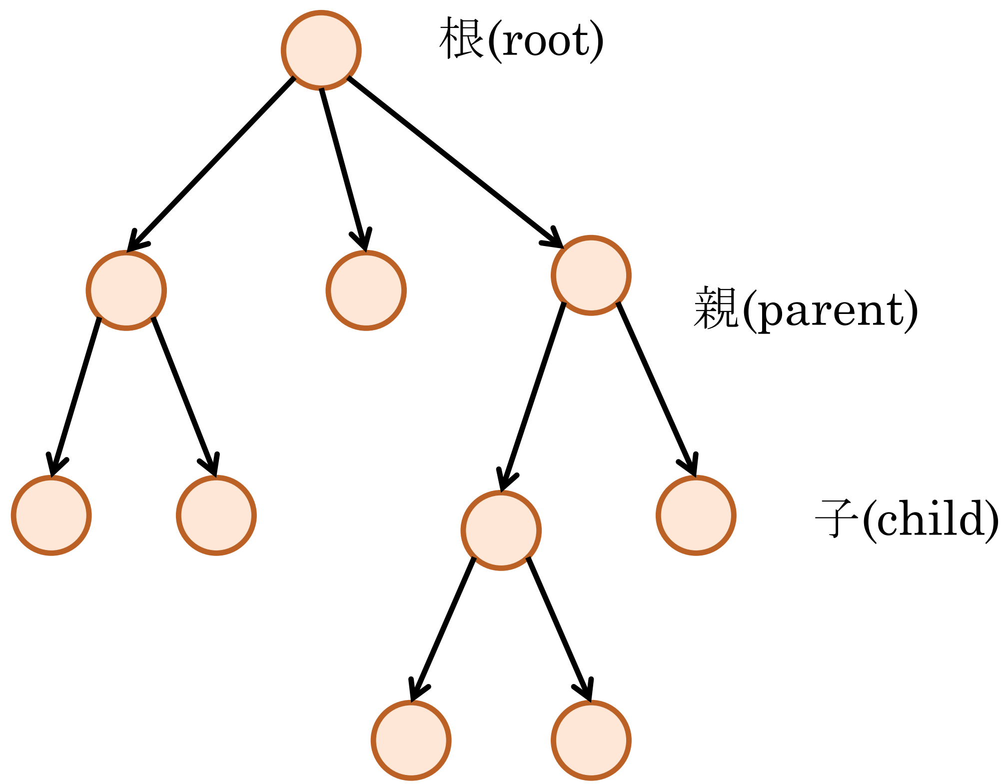
有向木(Directed Tree)

向きが揃っている



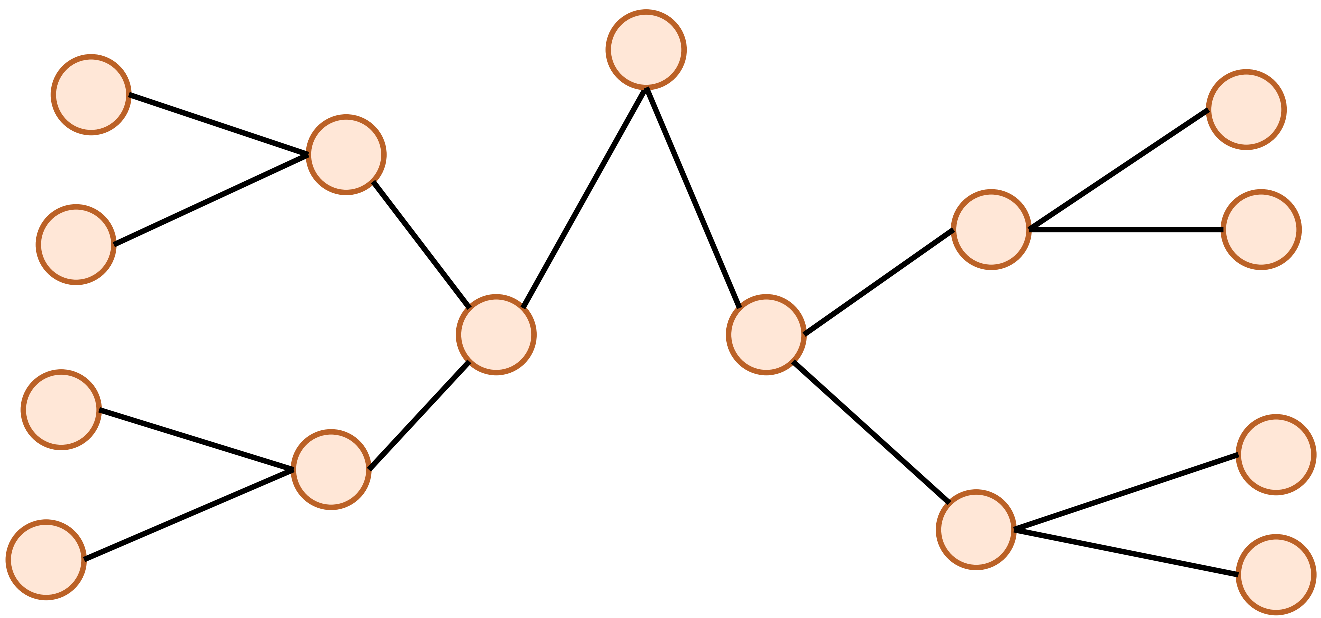
外向木(out-tree)

内向木(in-tree)


根(root)
親(parent)
子(child)

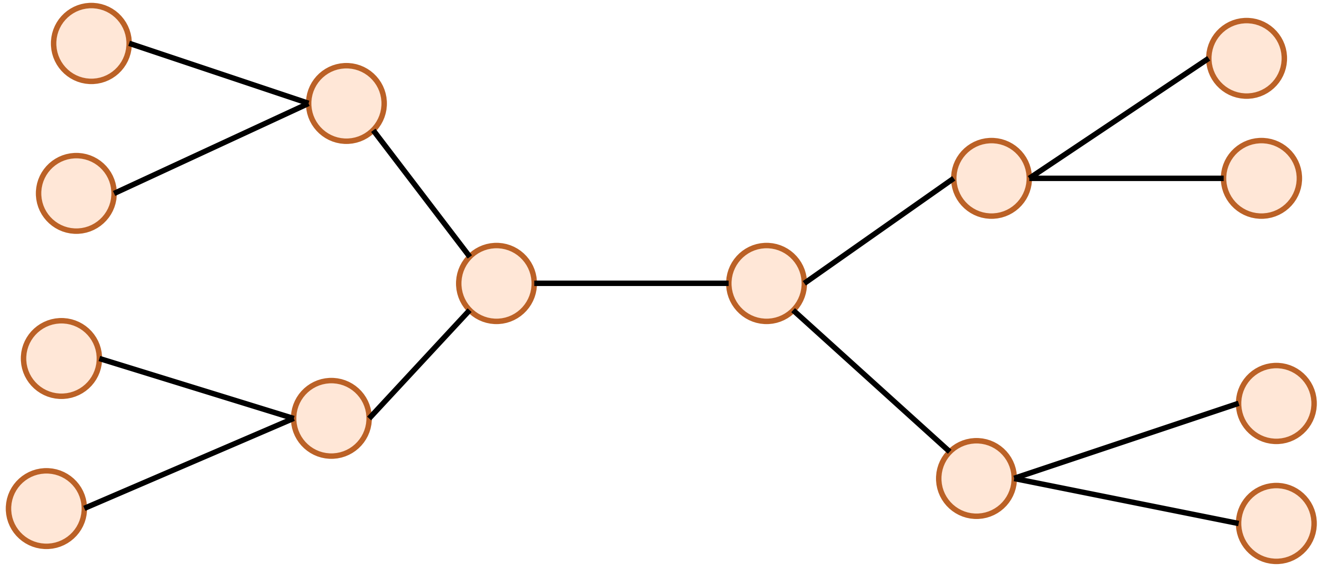
二分木(Binary Tree)

- 葉以外の点が、二個の子を持つ木



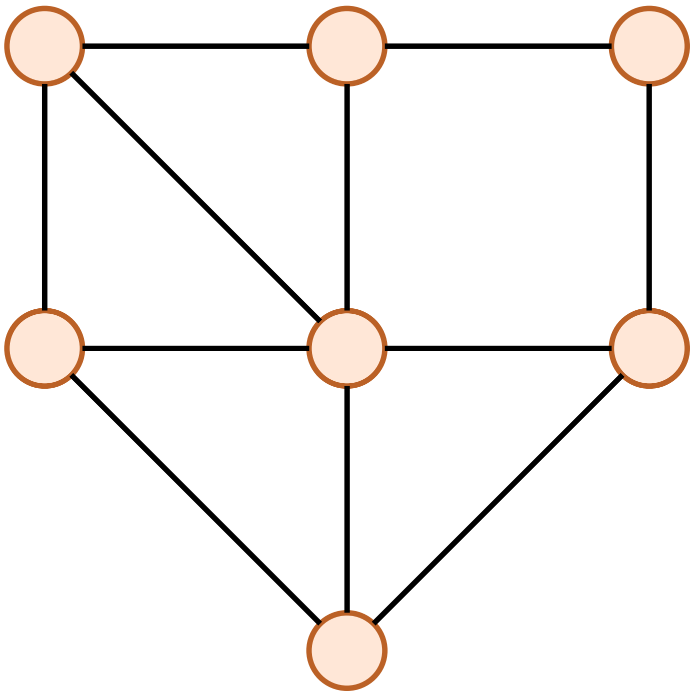
ケーリー木(Cayley tree)

- 葉以外の点の次数が等しい木



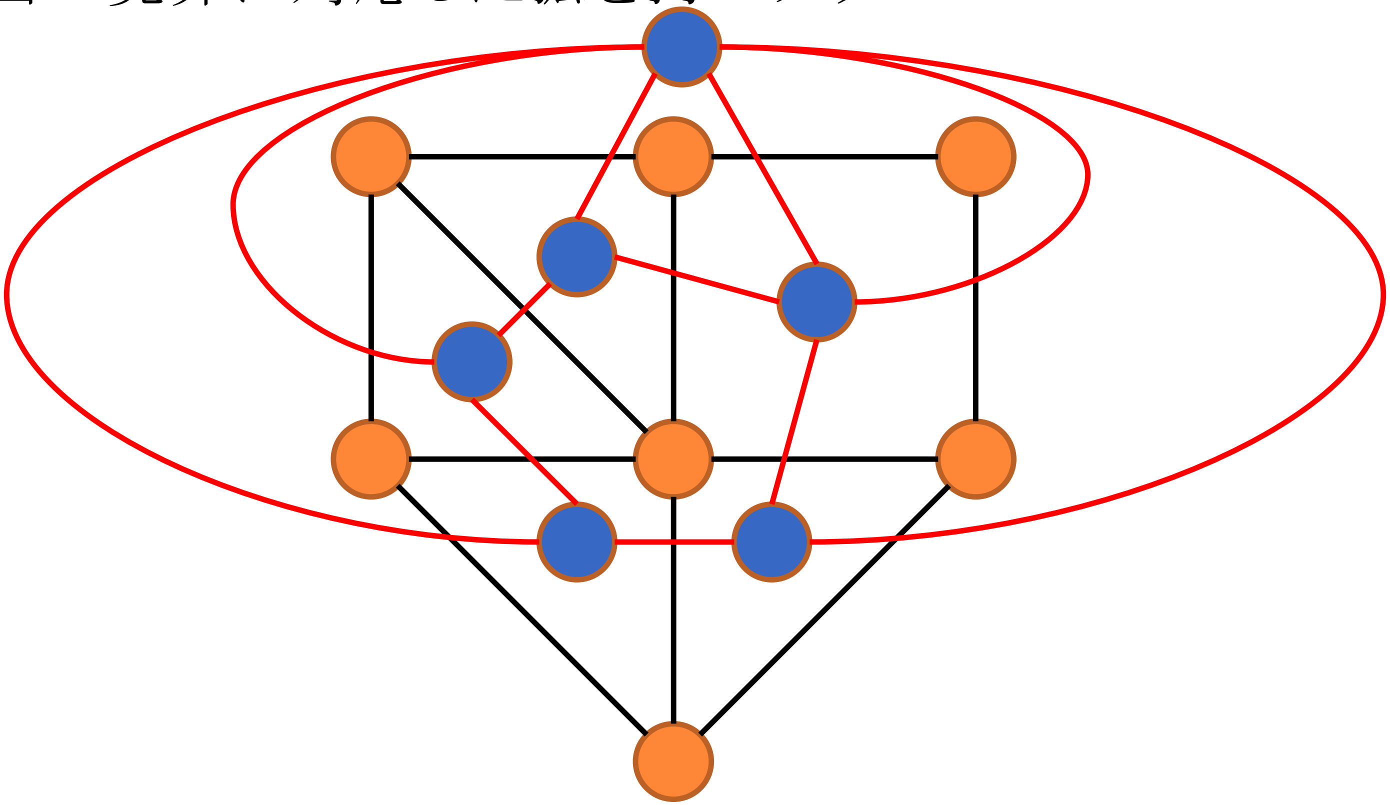
平面グラフ(Planer Graph)

- 頂点の配置によって、弧が交差しないように描くことができるグラフ



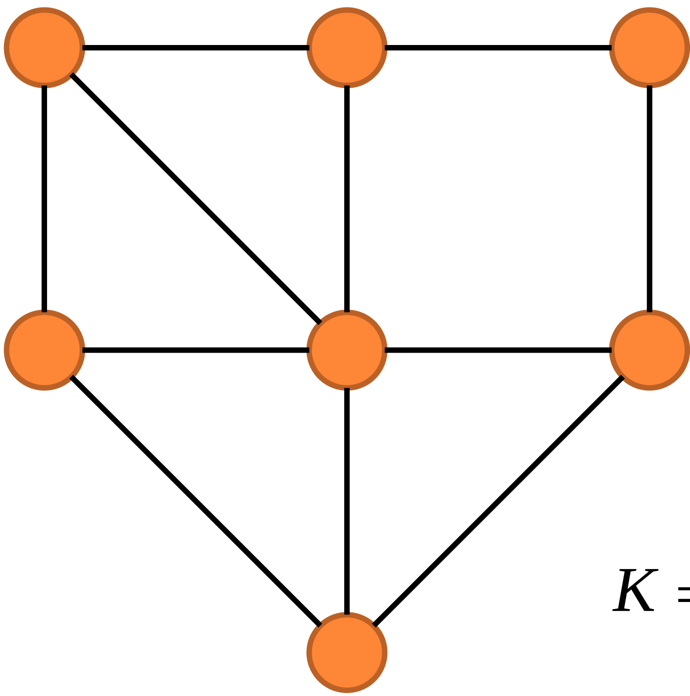
平面グラフの双対グラフ(Dual Graph)

- 平面グラフの弧で囲まれた面ごとに、一つの頂点を置き、面の境界に対応した弧を持つグラフ

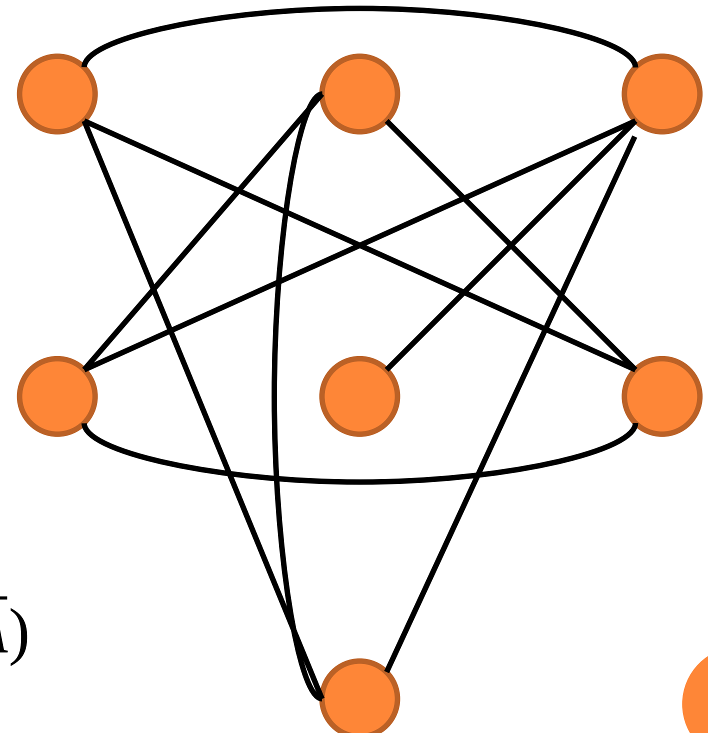


補グラフ(Complement)

$$G = (V, A)$$



$$\overline{G} = (V, \overline{A})$$



$$K = (V, A \cup \overline{A})$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$