

# 「グラフと組み合わせ」課題 1

2016/4/14

## 1 集合の演算

二つの集合

$$X = \{x \mid x \in N, x \leq 12\}$$
$$Y = \{x \mid x = 3n + 1, n \in N, n \leq 3\}$$

について、以下の集合を求め、要素を列挙することで答えなさい。

1.  $X \cup Y$
2.  $X \cap Y$
3.  $X \setminus Y$

### 解答例

まず、それぞれの集合を、要素を列挙すること表現する

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$
$$Y = \{4, 7, 10\}$$

これに基づき、それぞれの演算の結果を求める。

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$
$$X \cap Y = \{4, 7, 10\}$$
$$X \setminus Y = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$$

## 2 数学的帰納法

自然数  $n$  に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

### 解答例

- $n=1$  の場合

$$\text{LHS} = 1$$

$$\text{RHS} = \frac{1}{6}1 \times 2 \times 3 = 1$$

となり、等号が成り立つ。

- ある  $n$  に対して、与式が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6] = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)\end{aligned}$$

つまり、 $n+1$  に対しても与式が成立する。

以上、数学的帰納法により、与式が任意の自然数  $n$  に対して成り立つ。