

# 「グラフと組み合わせ」課題 6 (解答例)

2016/5/26

## 1 Hamilton 閉路の最大数

頂点数 $n$ の単純な無向グラフに対する Hamilton 閉路の数の上限は、完全グラフの場合に実現する。頂点数 $n$ の完全グラフ $K_n$ 中の Hamilton 閉路の数は $H_n = (n-1)!/2$ であることを数学的帰納法で証明しなさい。ただし、同じ経路の逆回りは、数えないこととする。

### 解答例

- 最も小さな完全グラフは $K_3$ である。このとき、Hamilton 閉路は唯一であり、 $H_1 = 1$ である。
- ある頂点数 $n$ の完全グラフ $K_n$ 中の Hamilton 閉路の数が $H_n = (n-1)!/2$ であると仮定する。このときの経路長は $n$ であることに留意する。新たに頂点 $v$ を追加し完全グラフ $K_{n+1}$ を構成し、Hamilton 閉路を求めることにする。このとき、新たな頂点 $v$ を、 $K_n$ 中の経路のどの場所で経由するかを選択肢は、経路毎に $n$ である。従って

$$H_{n+1} = n \times H_n = \frac{n!}{2}$$

となる。