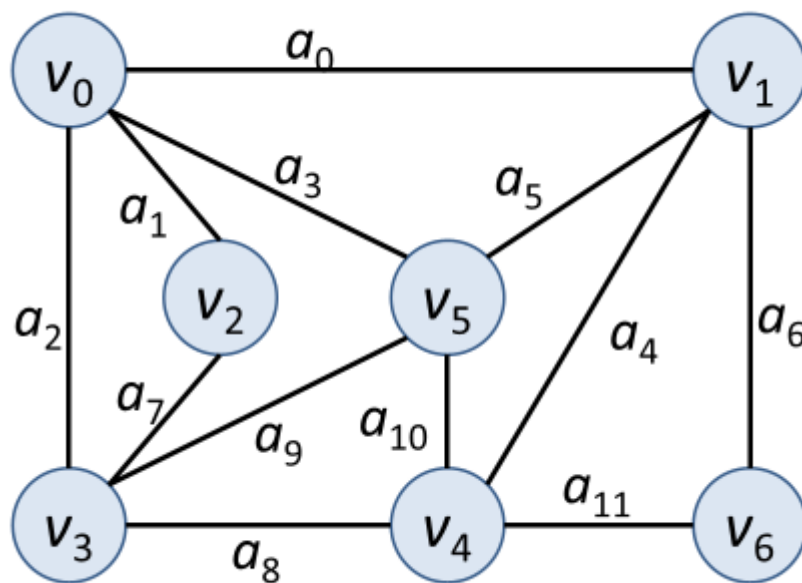


# 「グラフと組み合わせ」課題 3 (解答例)

2016/4/28

## 1 Euler 閉路

次のグラフ中の Euler 閉路 (一筆描き) を見つけなさい。



### 解答例

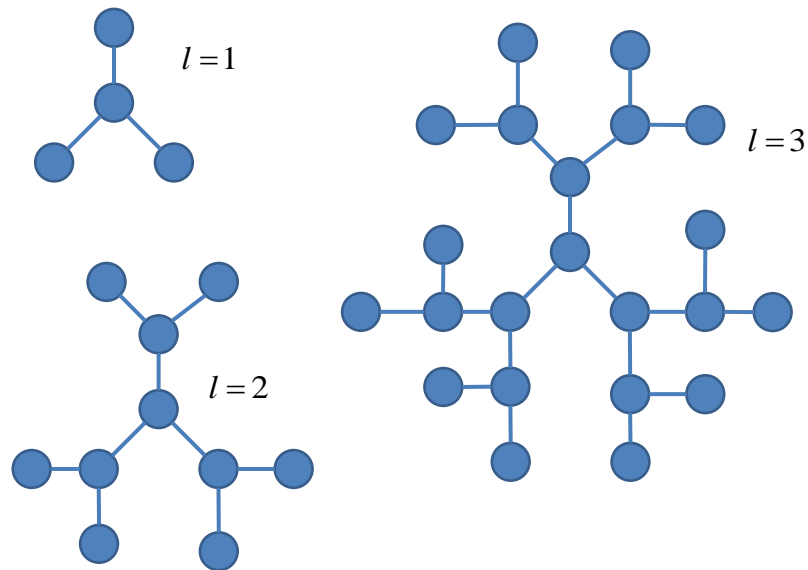
一つの例だけを示す

$$a_0 a_5 a_3 a_1 a_7 a_9 a_{10} a_{11} a_6 a_4 a_8 a_2$$

## 2 Cayley 木内の点間の距離

次数  $k > 2$  の Cayley 木を以下の手順で構成することにする。下の図は  $k=3$  の場合である。

1. 頂点の数が  $k+1$  の最小の Cayley 木を作る (図中の  $l=1$  の場合)。ここで  $l$  は、中心からの距離となる。
2. 外側の  $k$  個のそれぞれの頂点から、新たに  $k-1$  本の弧を伸ばして新しい頂点を接続する (図中の  $l=2$  の場合)。
3. 上記ステップを  $l=L$  まで繰り返す。



このとき頂点の数 $N$ を $L$ で表しなさい。また、その表式が正しいことを証明しなさい。

### 解答例

$L=1$ の場合、頂点数は $N=k+1$ である。 $L=2$ の場合、外側の $k$ 個の頂点から、それぞれ $k-1$ 本の弧が伸びる。従って、総頂点数は

$$N=1+k+k(k-1) \tag{1.1}$$

となる。 $L=3$ の場合は、 $L=2$ の Cayley 木の外側の頂点の数は $k(k-1)$ であり、そこからそれぞれ $k-1$ 本の弧が伸びる。従って、総頂点数は、以下のようになる。

$$N=1+k+k(k-1)+k(k-1)^2 \tag{1.2}$$

上記を繰り返すことで、次式を得る。

$$N(L)=1+k\sum_{i=0}^{L-1}(k-1)^i=1+k\frac{1-(k-1)^L}{1-(k-1)}=\frac{2-k(k-1)^L}{2-k} \tag{1.3}$$

### 数学的帰納法による証明

数学的帰納法を用いて、式(1.3)を証明する。準備として、中心からの距離が $L$

である Cayley 木の葉の数  $H(L)$  と  $L$  の関係を証明する。上記の推論より、

$$H(L) = k(k-1)^{L-1} \quad (1.4)$$

となる。まず、これを証明する。

- $L=1$  の場合：  $H(1)=k$  であり、式(1.4)が成り立つ。
- ある  $l$  で式(1.4)が成り立つと仮定する。距離  $l$  の Cayley 木の葉  $H(l)$  のそれぞれから  $k-1$  個の葉が出て、距離  $l+1$  の Cayley 木が構成される。従って、距離  $l+1$  の Cayley 木の葉の数は次式で表される。

$$H(l+1) = H(l) \times (k-1) = k(k-1)^{l-1} \times (k-1) = k(k-1)^l$$

従って、任意の自然数  $L$  に対して、式(1.4)が成り立つ。

次に式(1.3)を証明する。

- $L=1$  の場合：  $N(1)=1+k$  であり、明らか。
- ある  $l$  に対して式(1.3)が成り立つと仮定する。この時、葉の数は  $H(l)$  である。  $l+1$  の Cayley 木を構成するには、  $H(l)$  個の葉のそれぞれから  $k-1$  個の葉が新たに生成される。従って、頂点総数は、次式で表される。

$$\begin{aligned} N(l+1) &= N(l) + H(l) \times (k-1) = N(l) + k(k-1)^l \\ &= \frac{2-k(k-1)^l}{2-k} + k(k-1)^l = \frac{1}{2-k} \left[ 2-k(k-1)^l + k(2-k)(k-1)^l \right] \\ &= \frac{1}{2-k} \left[ 2+k(k-1)^l - k^2(k-1)^l \right] = \frac{2-k(k-1)^{l+1}}{2-k} \end{aligned}$$

よって、任意の自然数  $L$  に対して式(1.3)が成り立つ。