最小木問題:その2
Minimum Tree Problem

2016年度

担当:只木進一(工学系研究科)

Kruskal法の問題点

- ある弧を選択した際に、それが閉路を作らないことの確認が必要
  - 加えようとして孤aの両端の頂点(v, w)
  - T 内にvからwへの道があるかを調べる
- 深さ優先、幅優先の探索アルゴリズムが必要

Jarník-Prim法

- 始点から開始して、連結した頂点の数を増やす
- 構成途中でも木になっている

- 途中の木から、未連結の頂点への弧のうちから、最小の弧を選んで、枝を伸ばす

JARNÍK-PRIMアルゴリズム

任意の頂点$v \in V$を選び、$U = \{v\}$、$T = \emptyset$とする

while ($U \neq V$) {

　Uと$V \setminus U$を結ぶ弧のうち、最初の重みのものをaとする

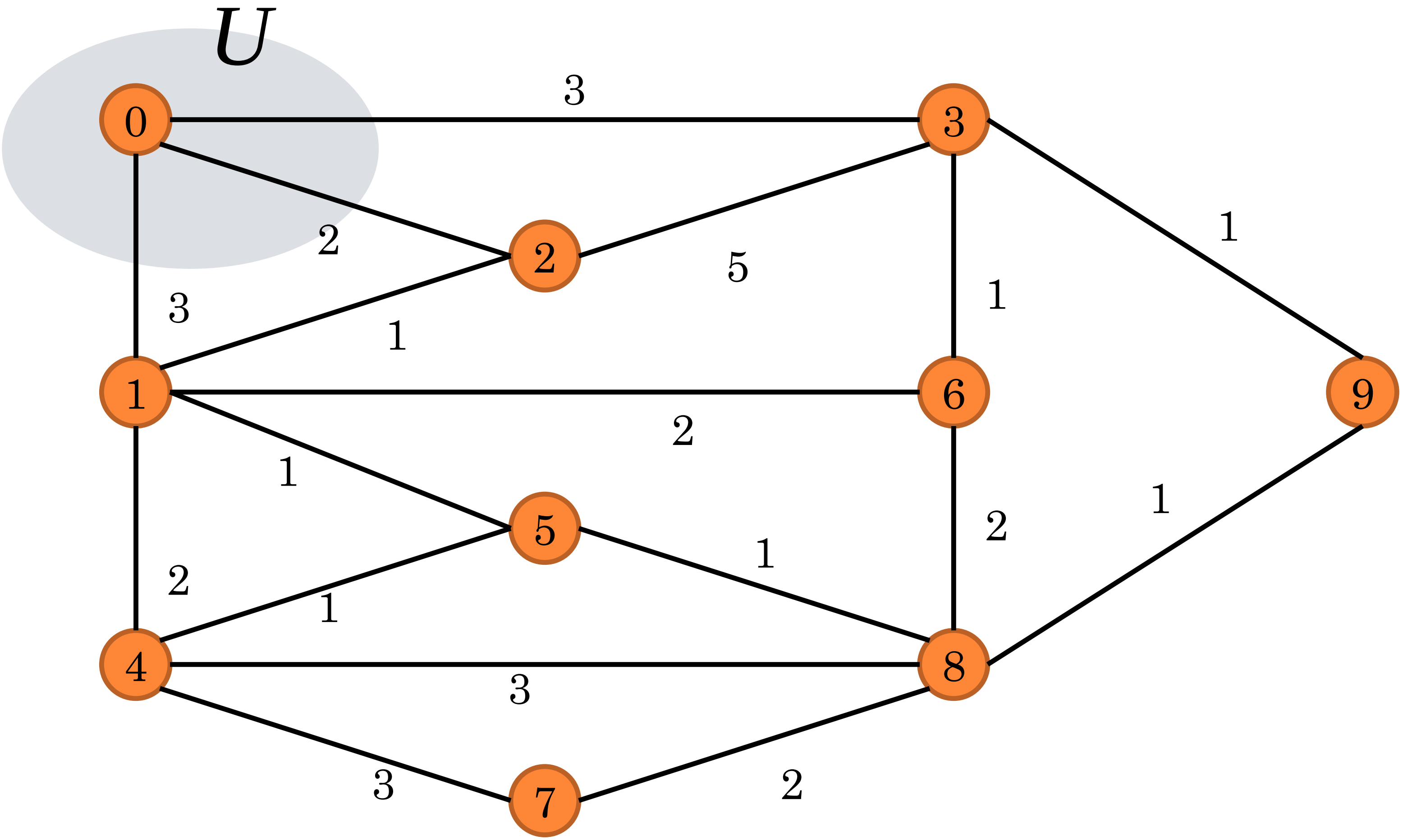
　aの$V \setminus U$側の端点をwとする

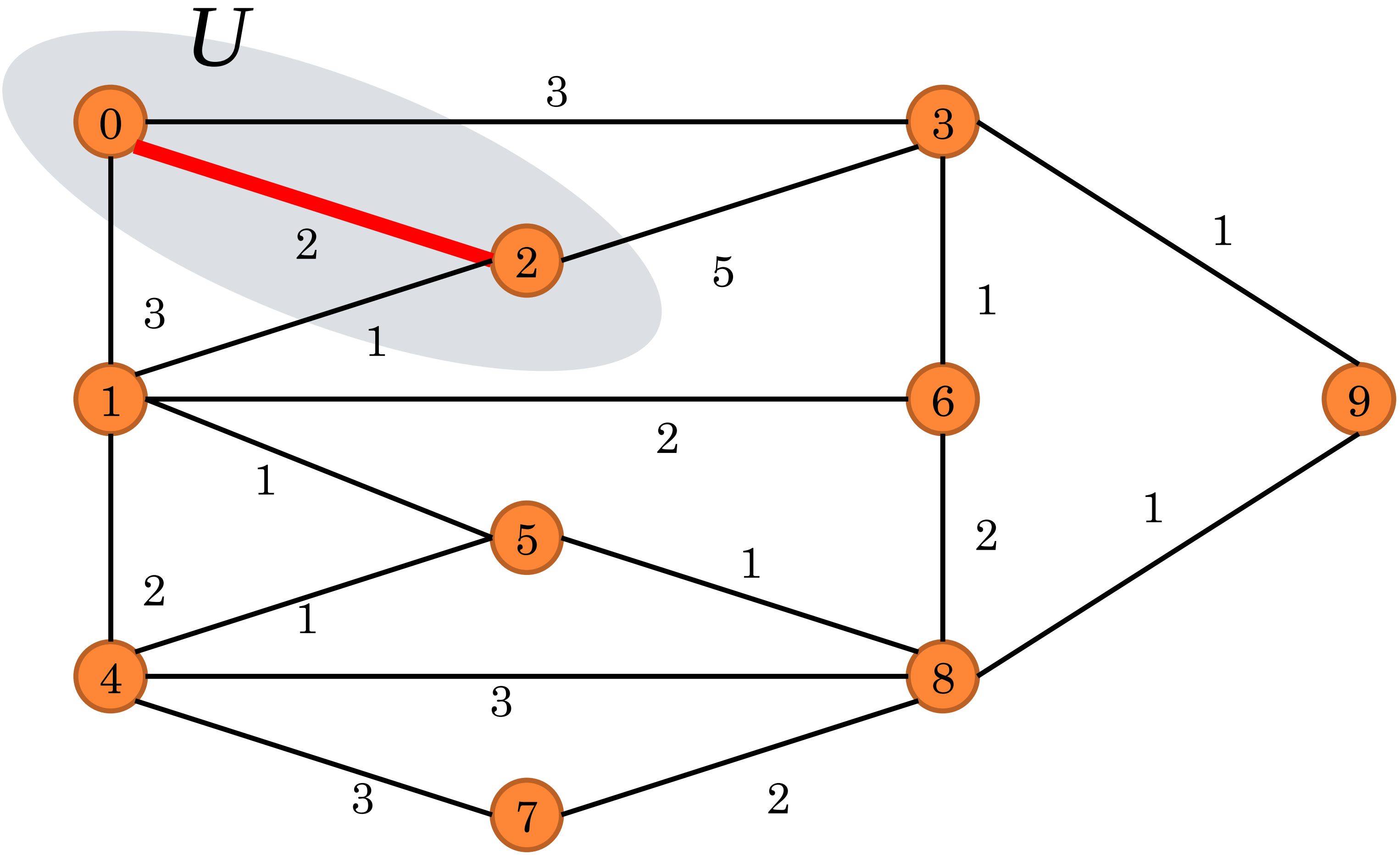
　$U \leftarrow U \cup \{w\}$

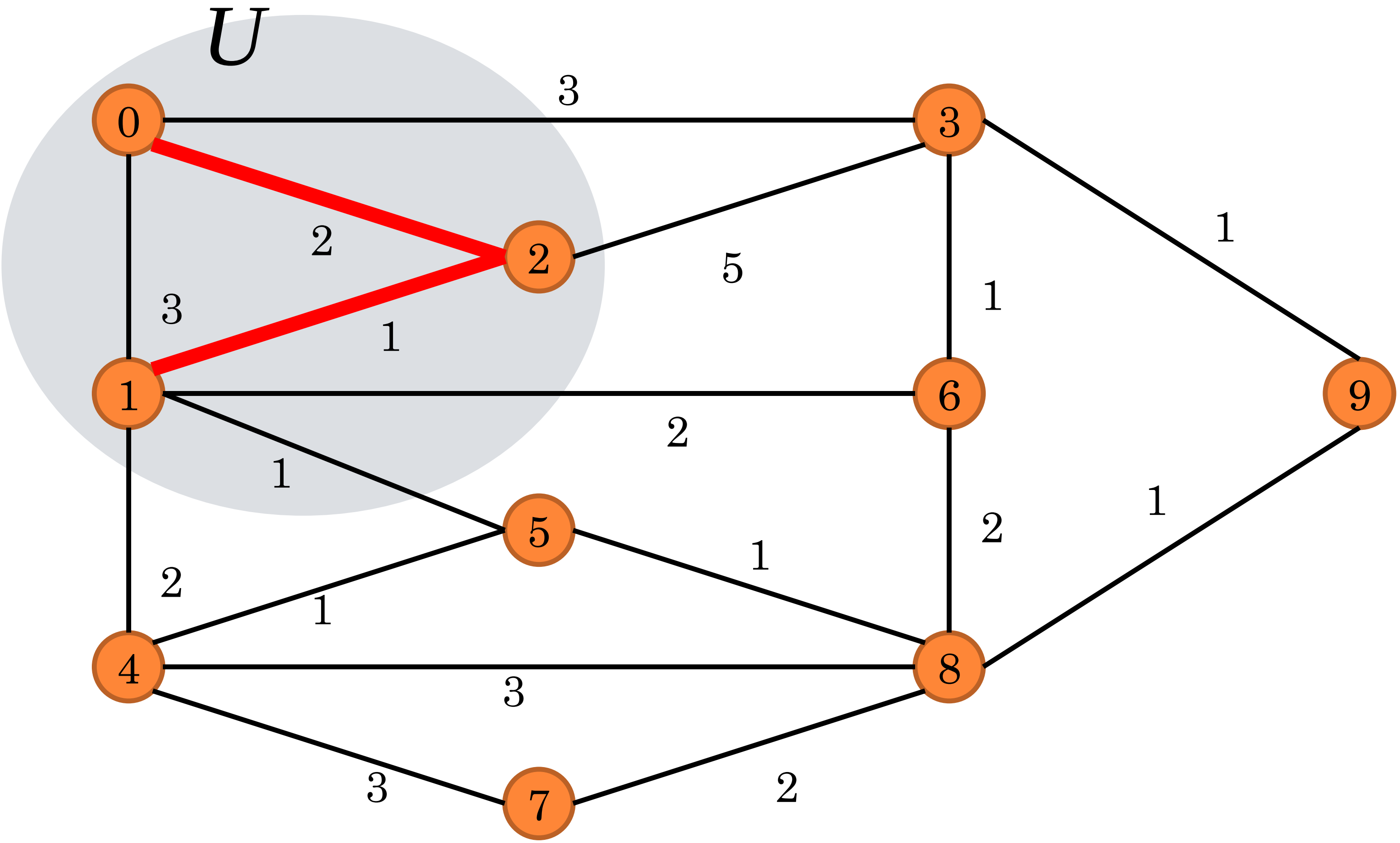
　$T \leftarrow T \cup \{a\}$

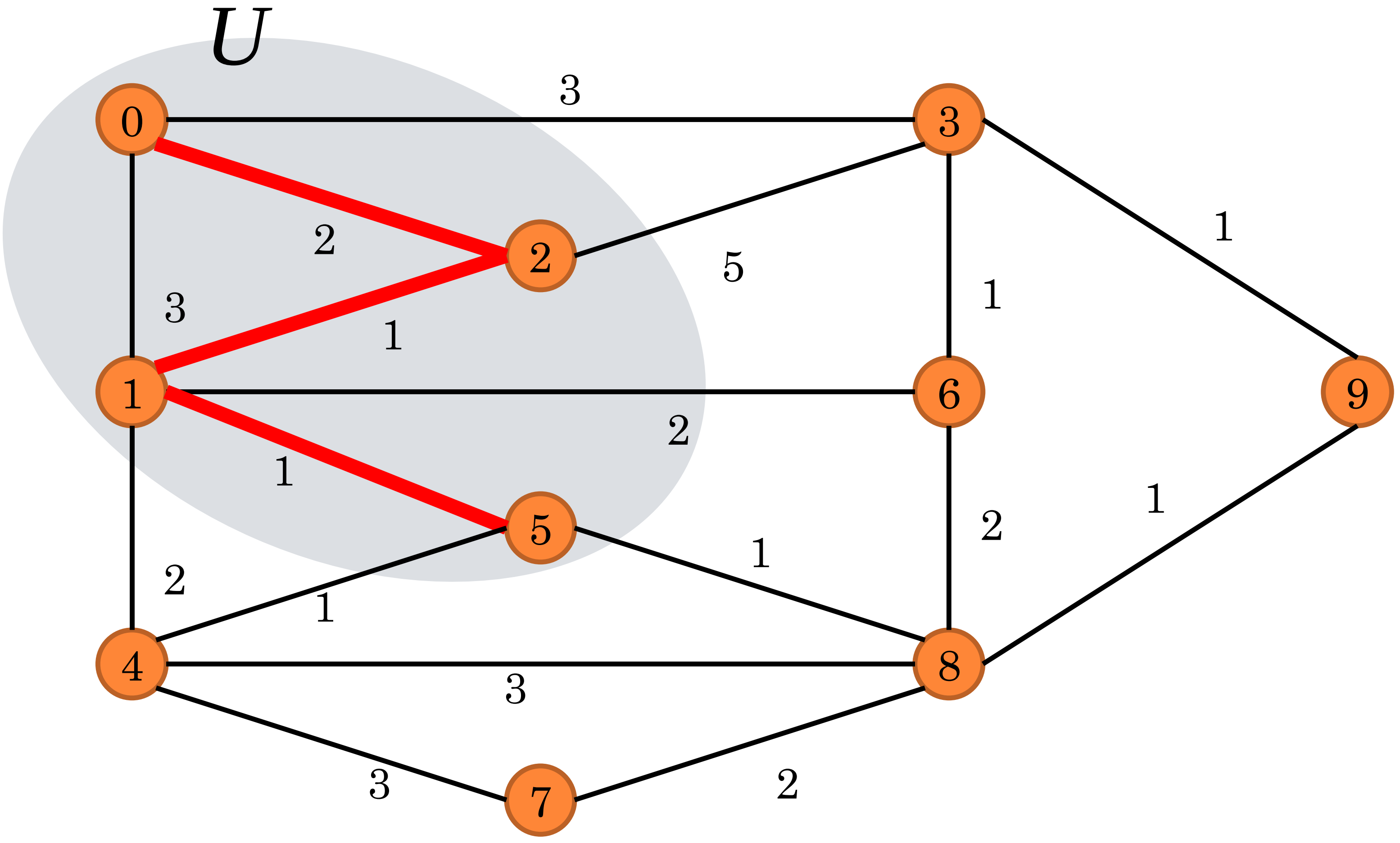
}

例1

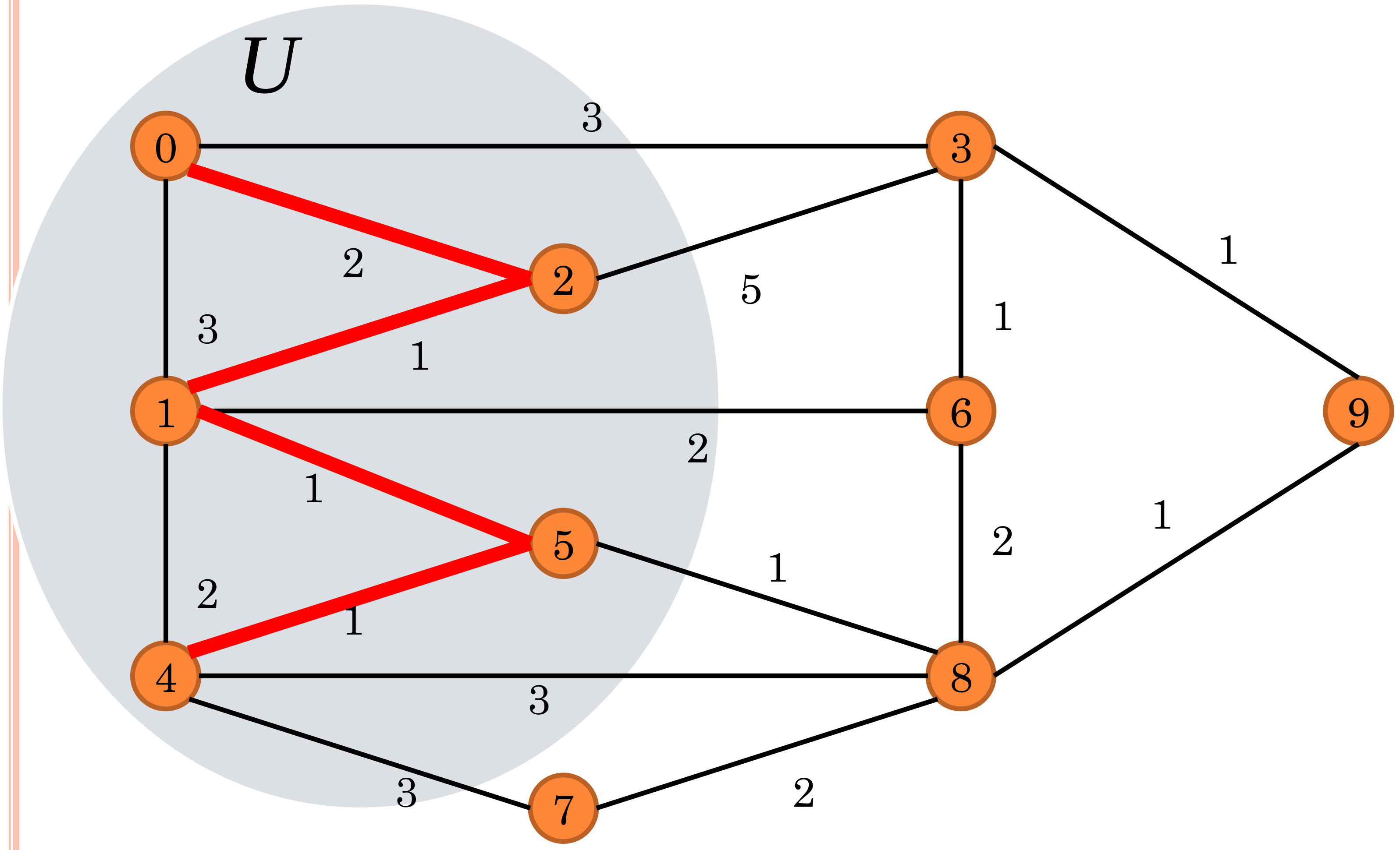


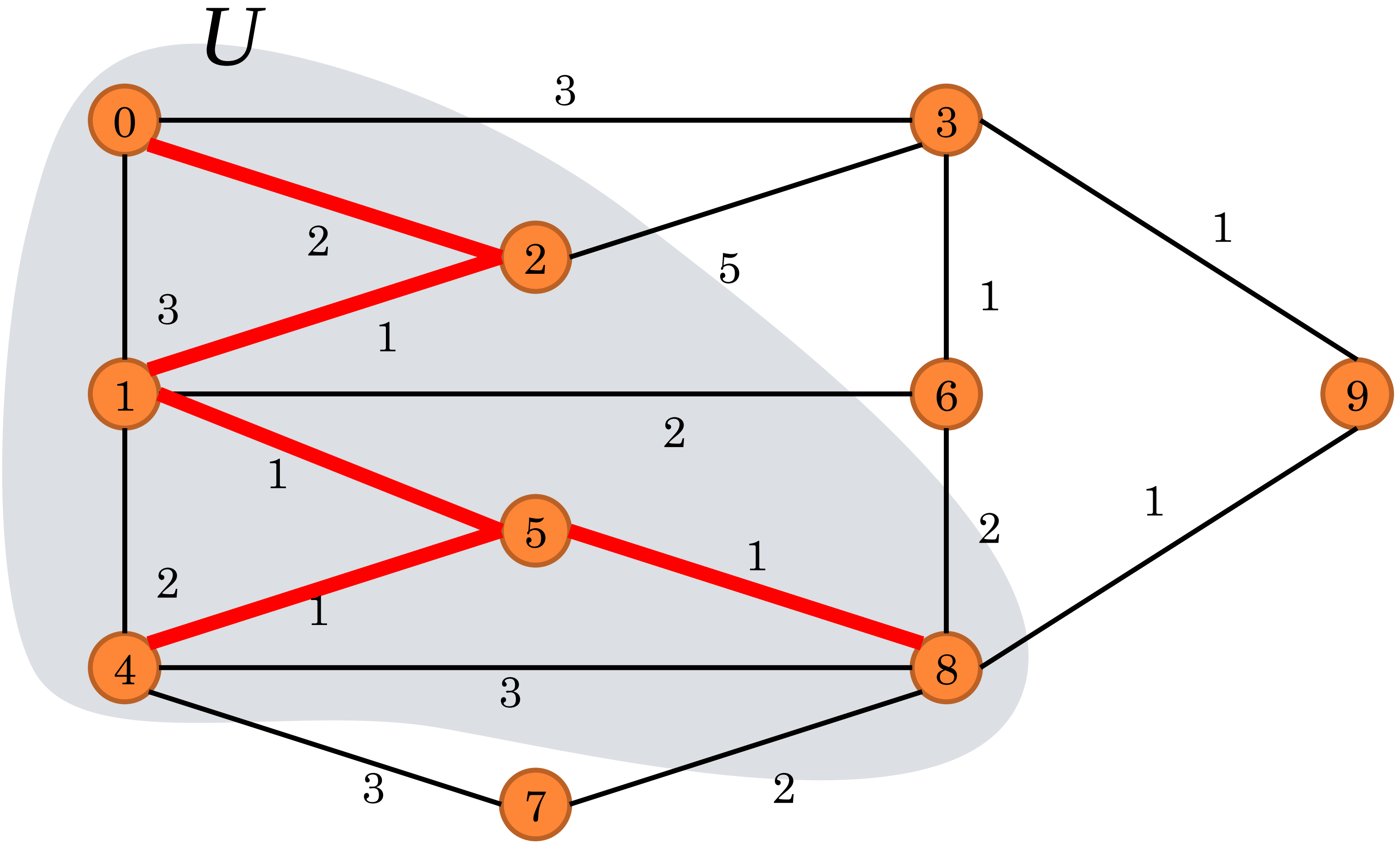

U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2

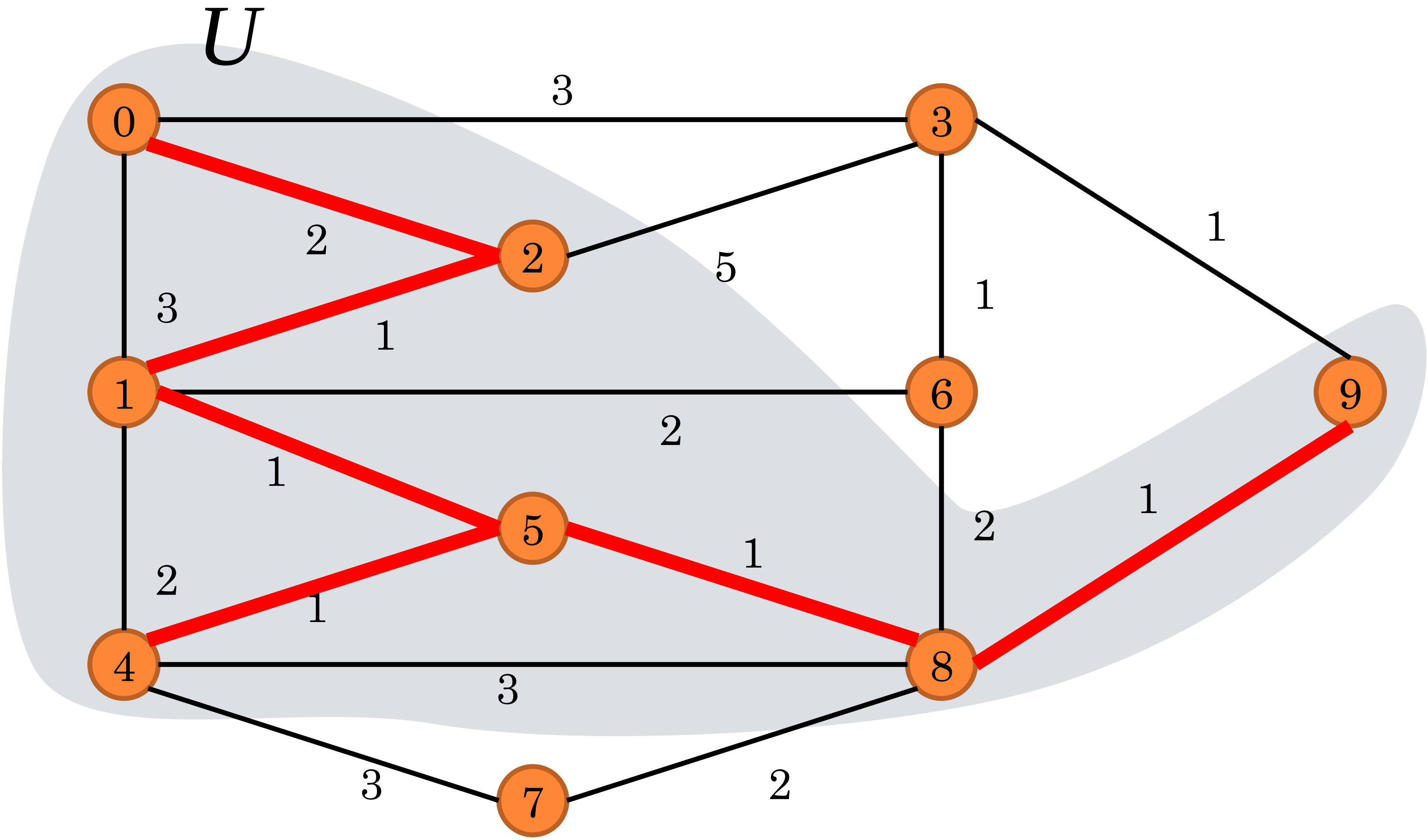

U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
2
1
3
3
2
1

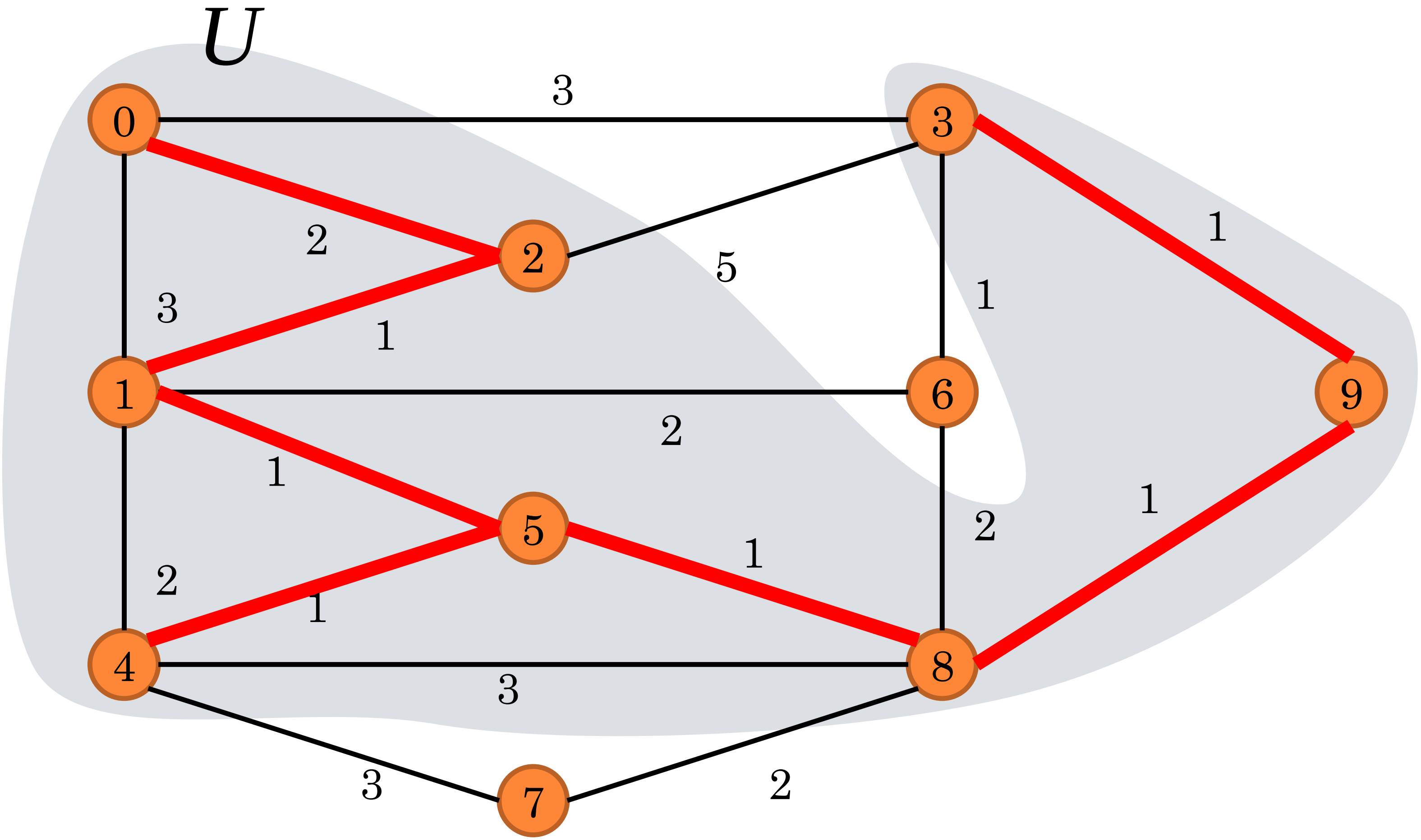


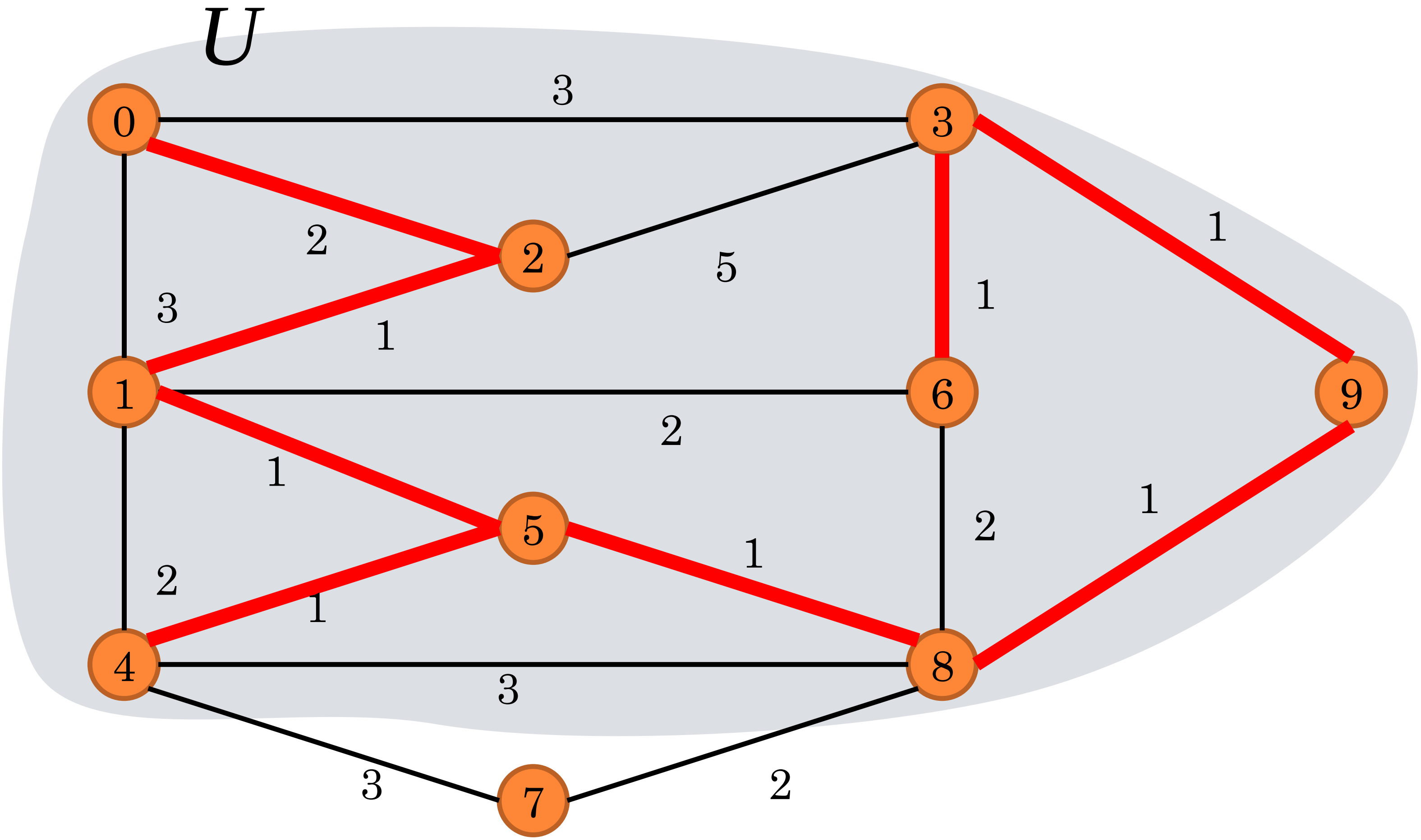
U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
3
2
3
1
5
1
1
1
2
1
2
2
1
1
3
3
2


U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
1
1
2
1
1
2
3
3
2

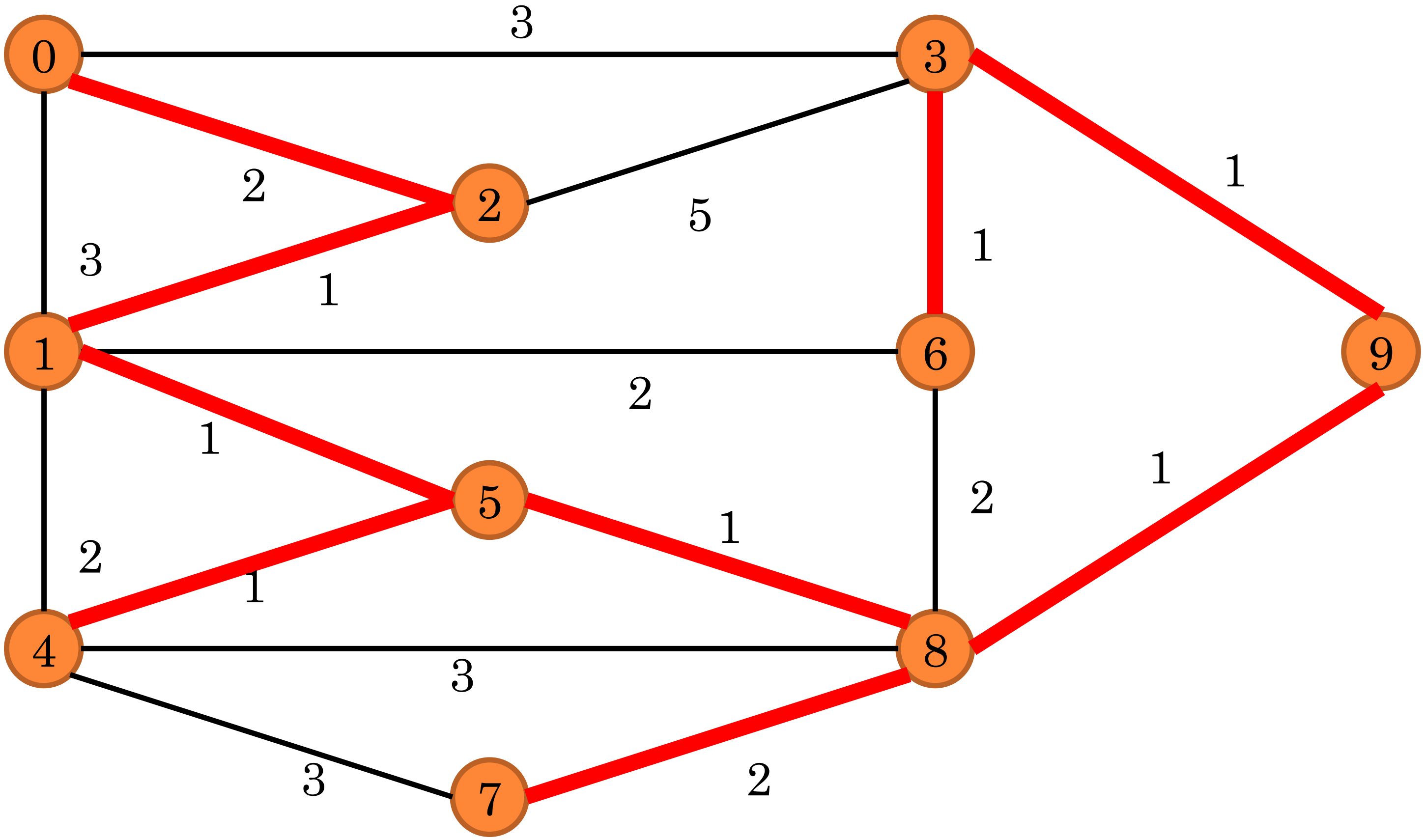

U
3
0
3
2
1
2
5
3
1
1
1
6
9
2
1
2
5
1
1
2
1
4
8
3
3
7
2


U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
3
2
5
1
1
3
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2

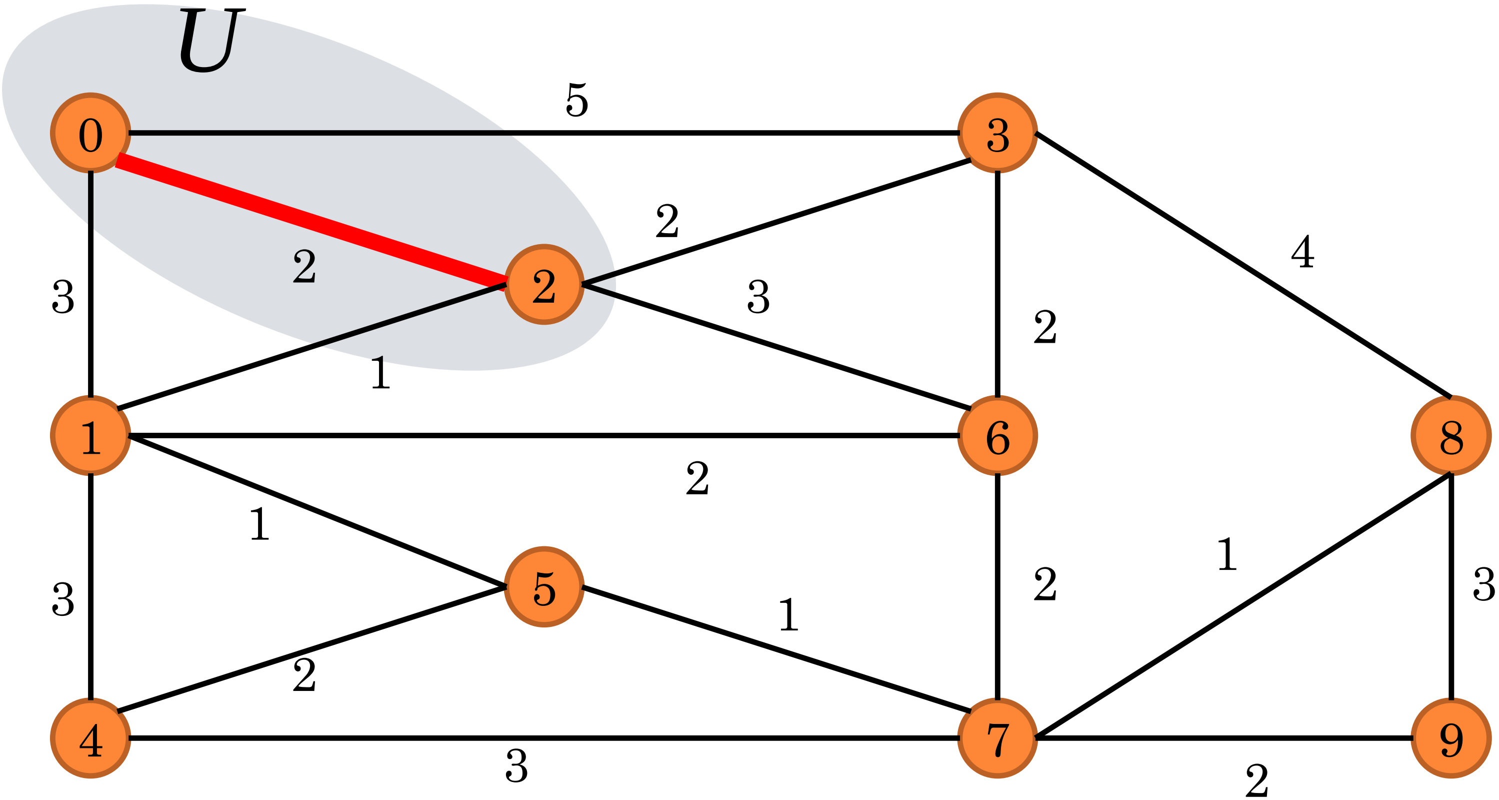

U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
3
2
3
1
5
1
2
1
2
1
1
1
1
2
3
3
2

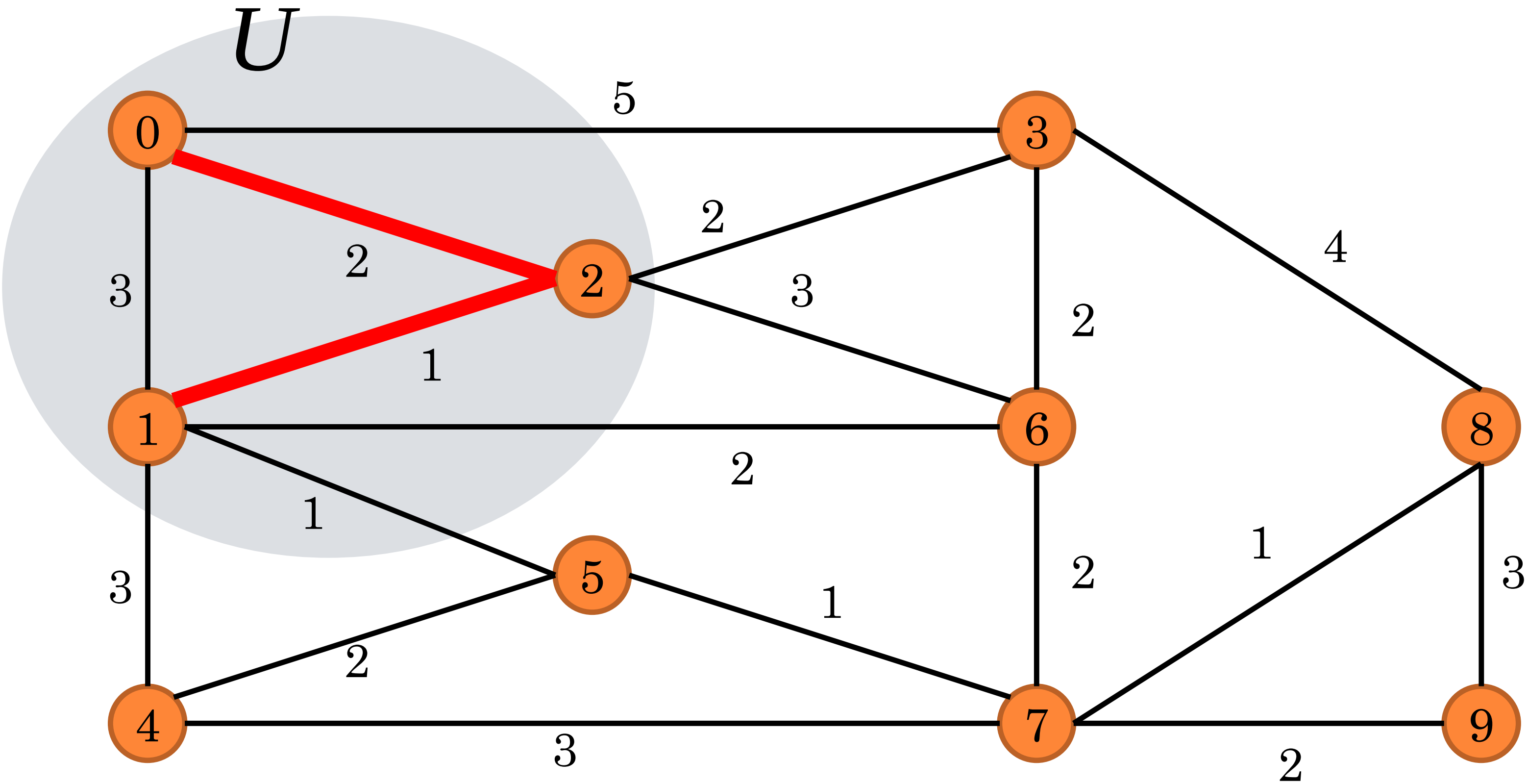

U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
3
2
5
3
1
1
1
2
1
1
2
2
1
1
2
3
3
2

例1：最小木

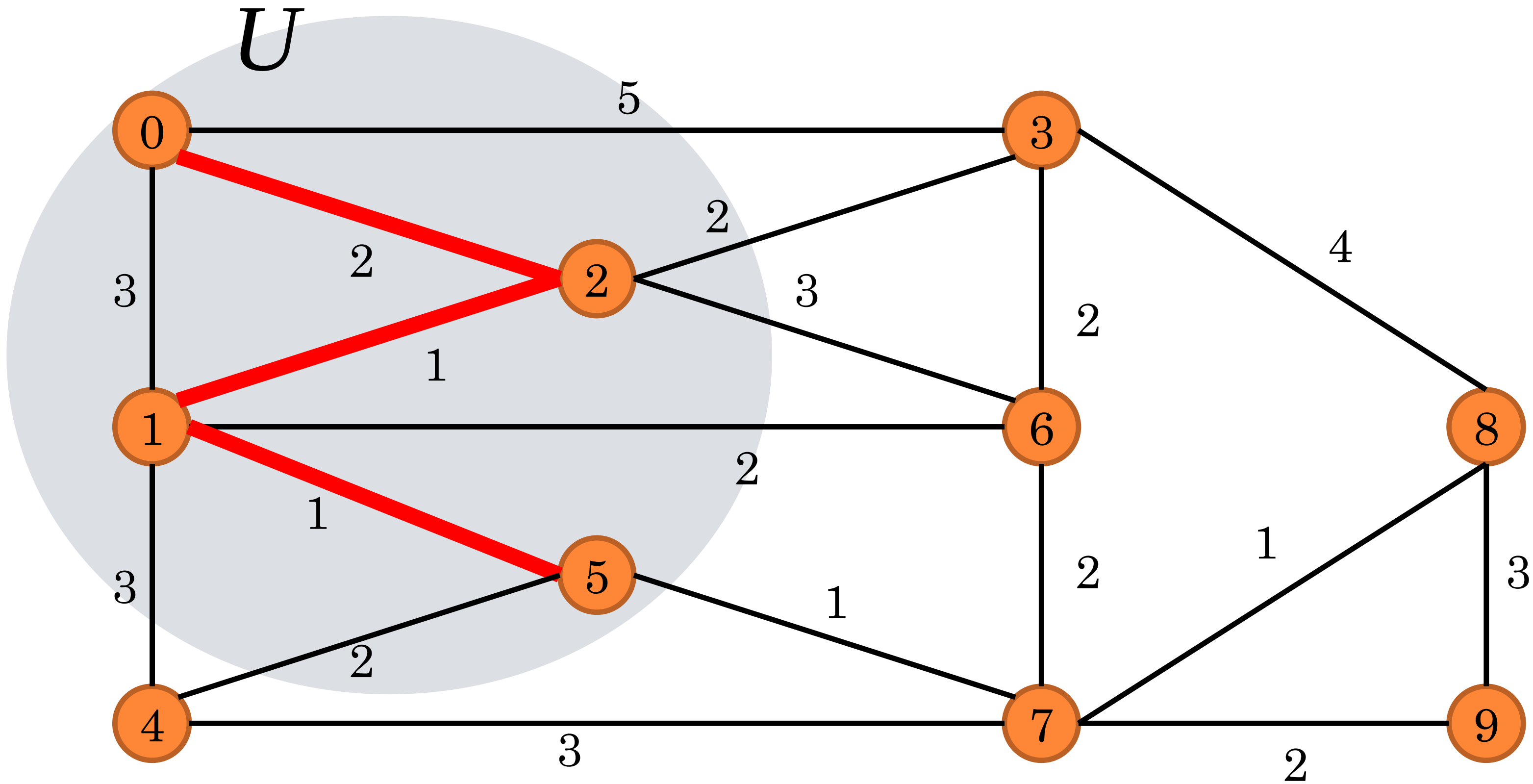


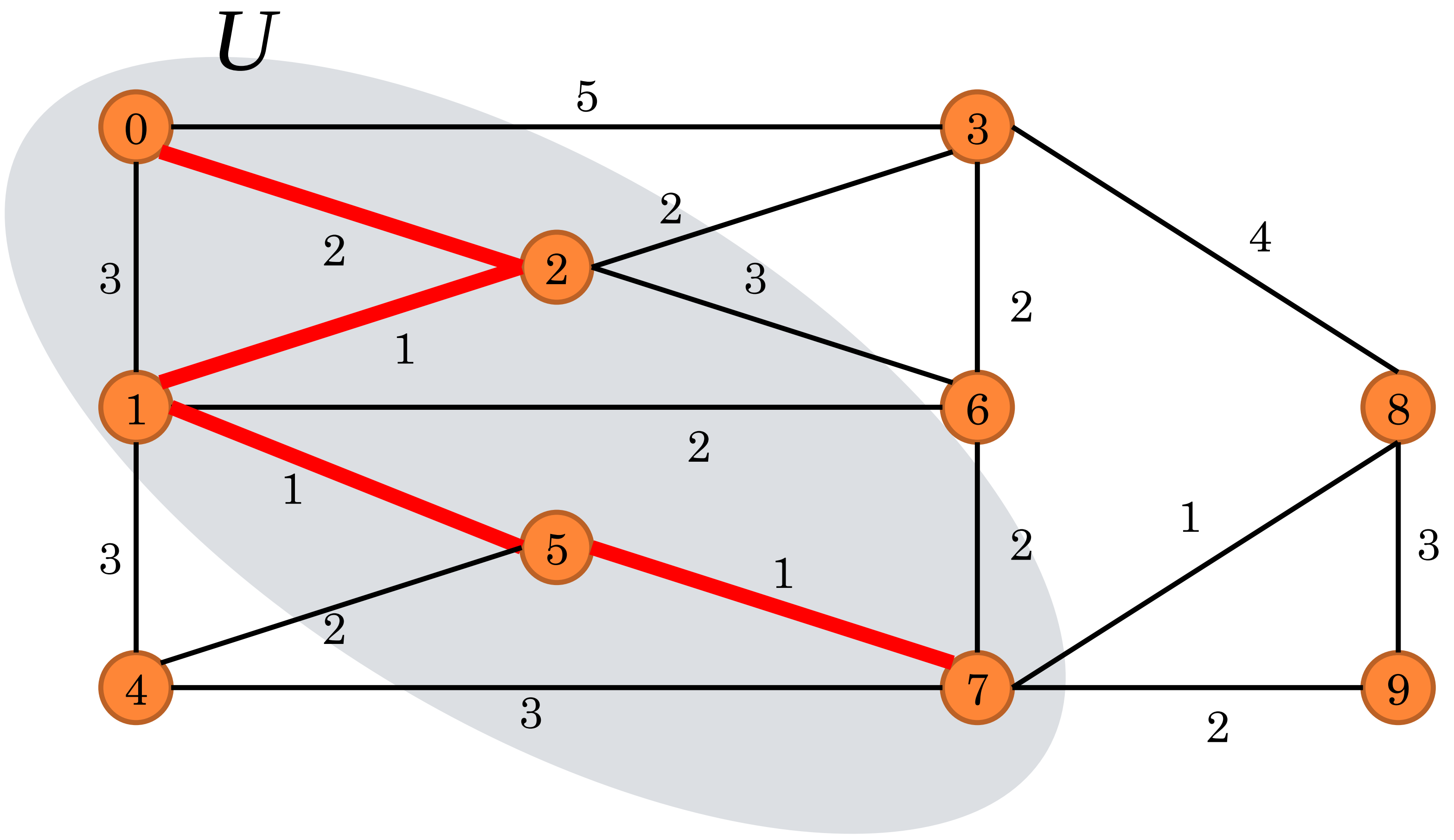
例2

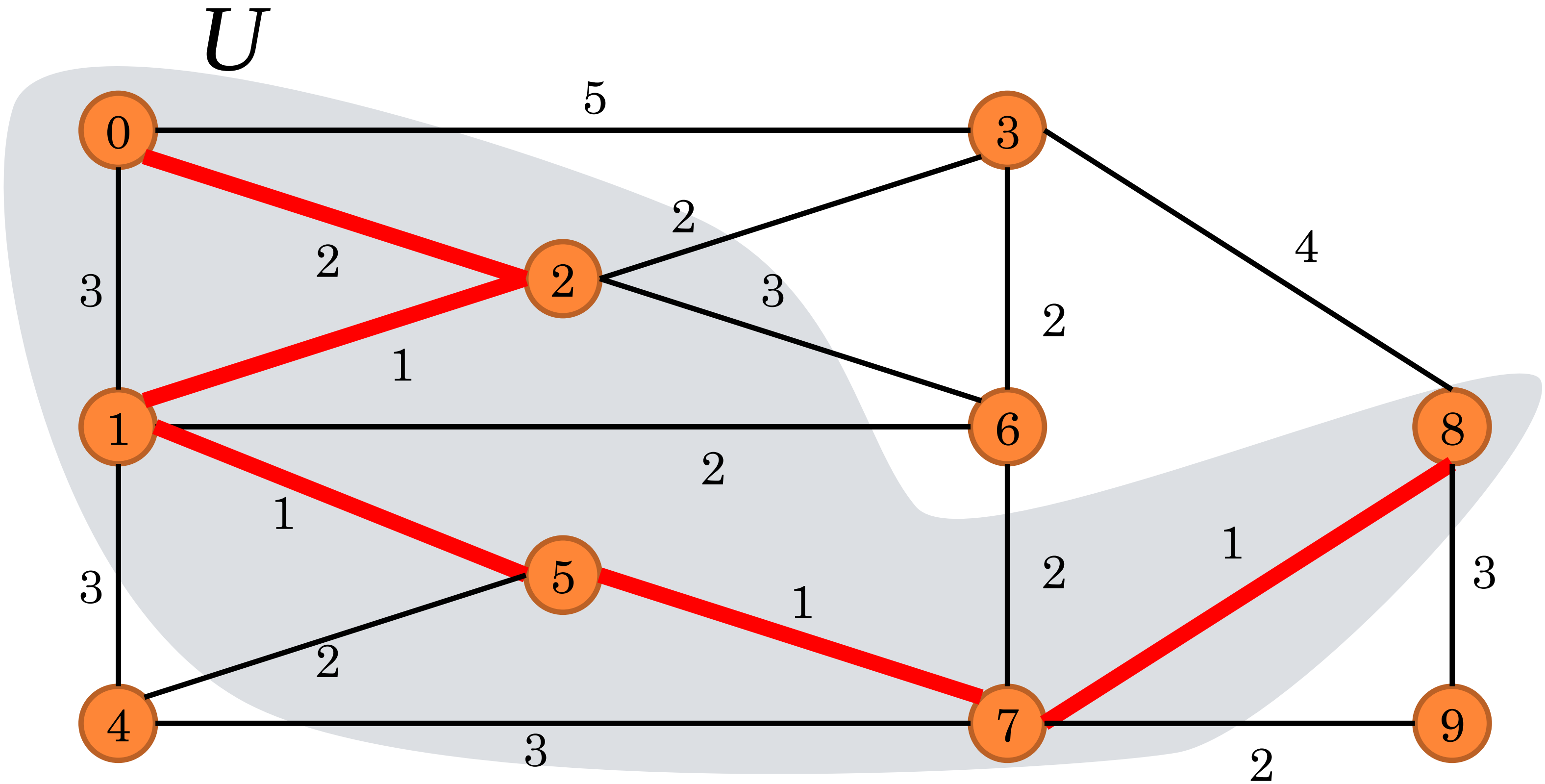




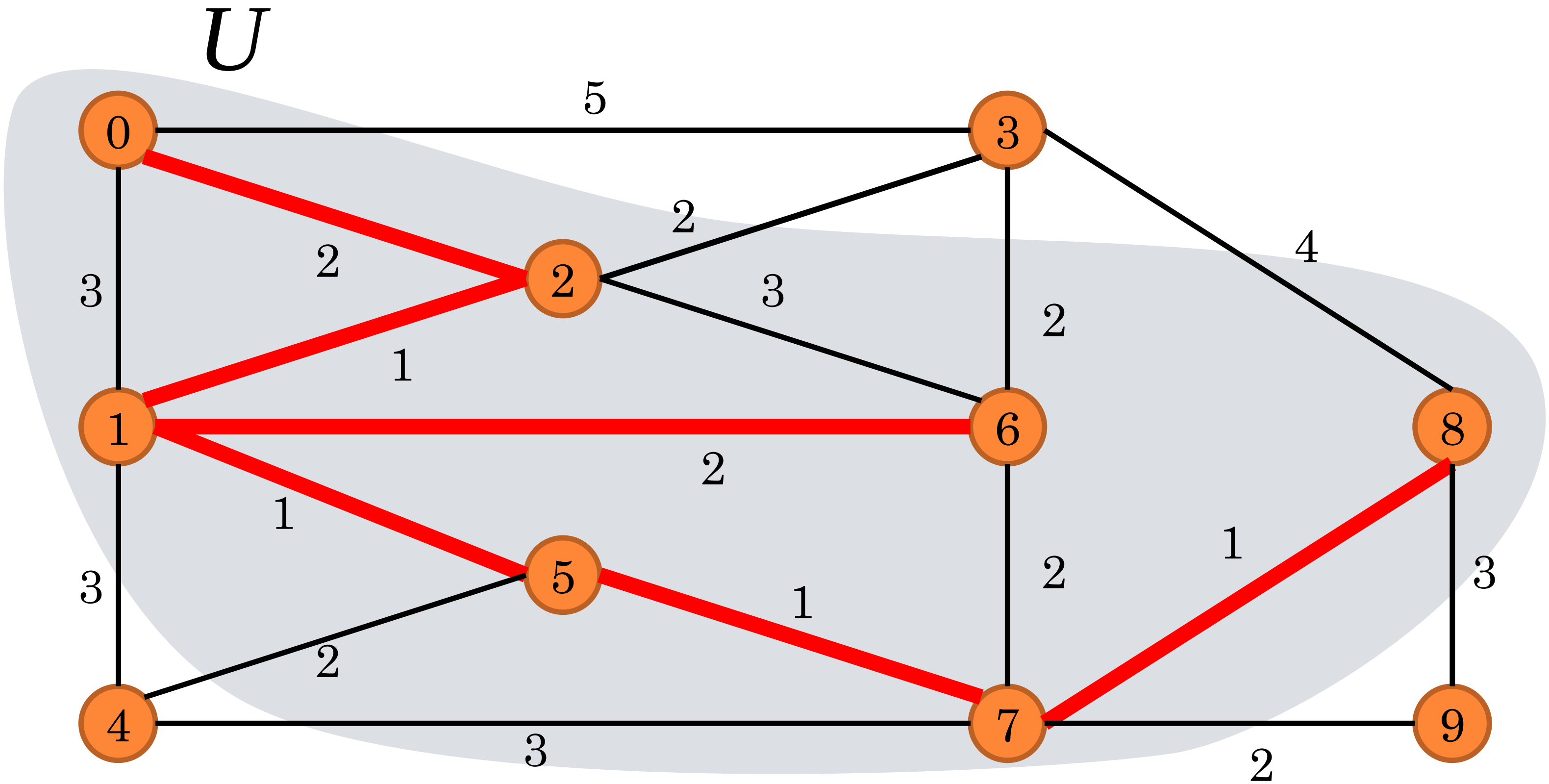
U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
5
2
3
2
1
3
2
4
2
1
2
1
3
2
1
2
3
3
2

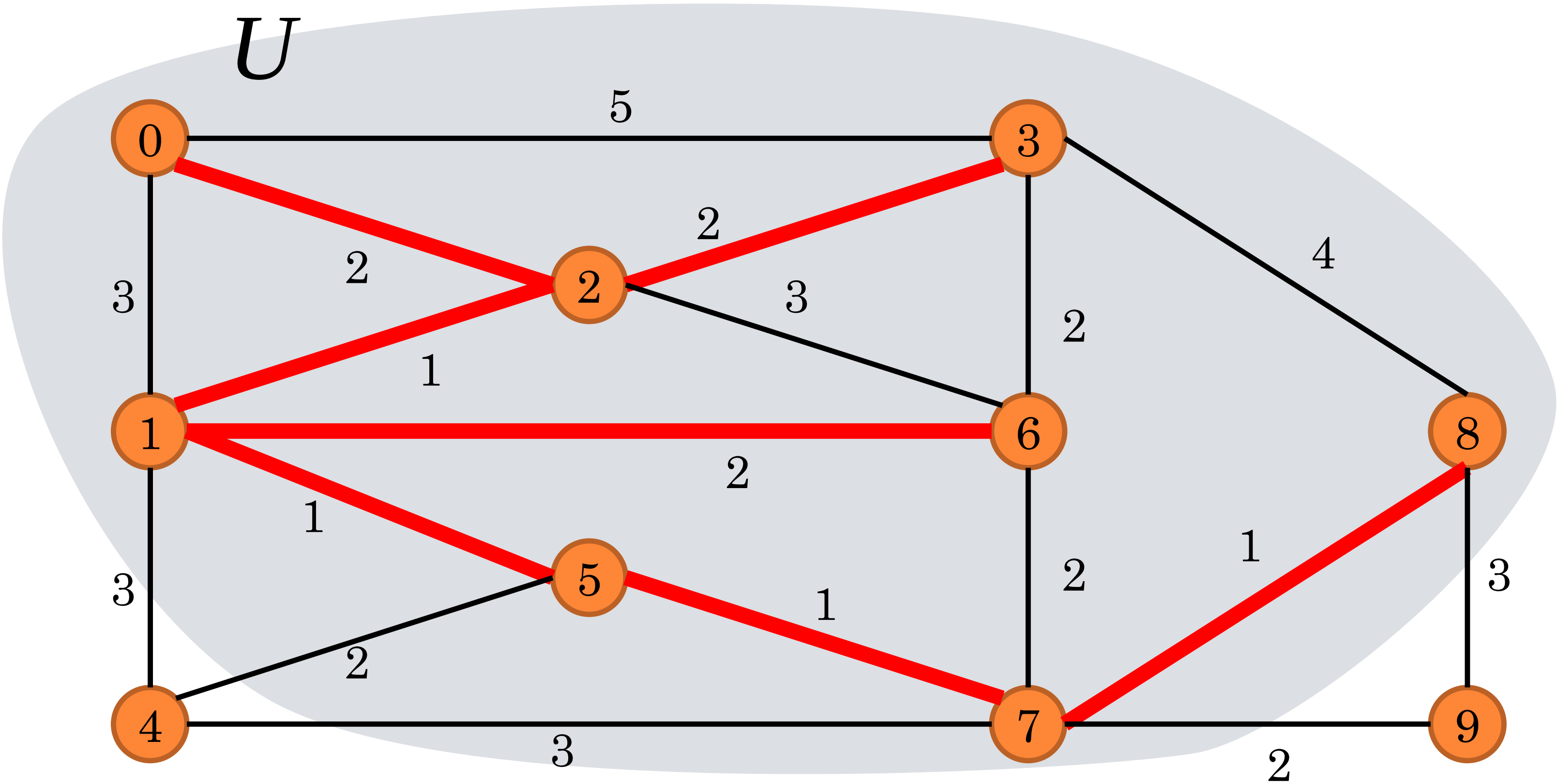

U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
5
2
3
2
1
3
2
1
2
4
2
3
1
2
1
1
3
2
3
2

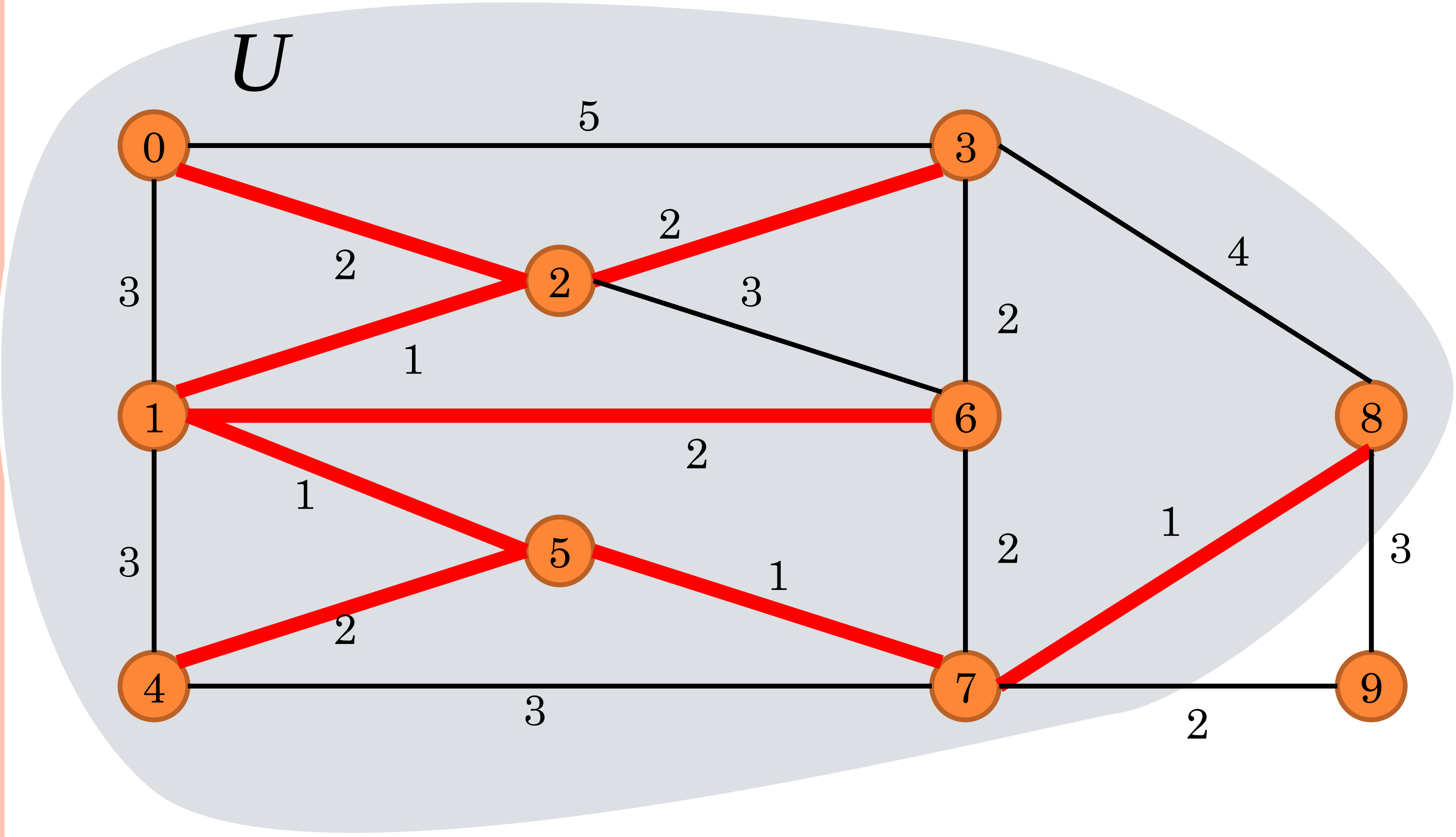

U
5
0
3
2
2
3
4
2
3
2
1
1
6
8
2
1
1
3
5
1
2
3
2
2
4
7
9
3
2



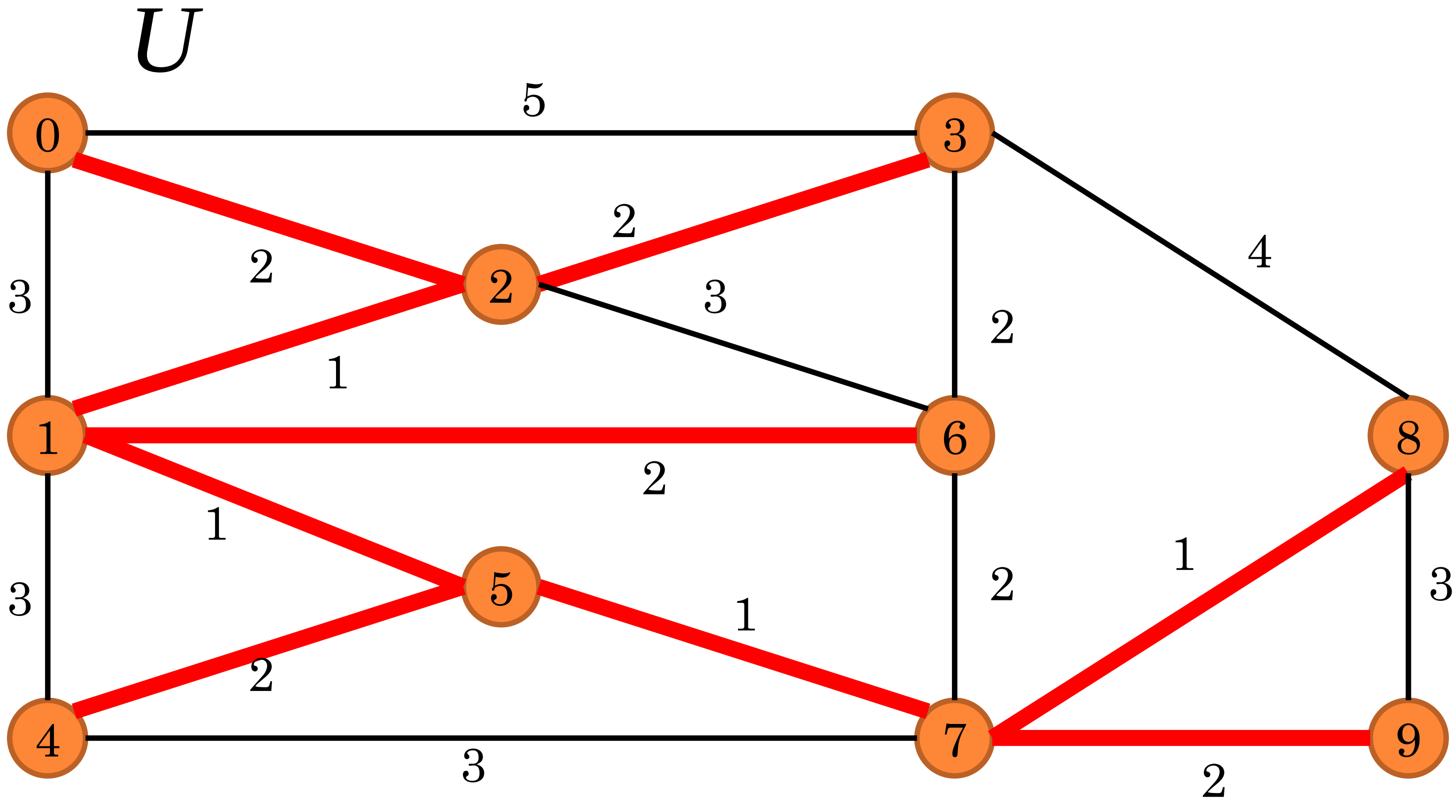
U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
5
3
2
2
1
3
2
4
2
1
1
3
2
1
2
3
3
2


U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
5
2
3
2
3
2
1
4
2
1
3
1
2
2
1
3
2
3
2


U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
5
2
3
2
1
3
2
4
2
1
1
3
2
2
1
3
3
2

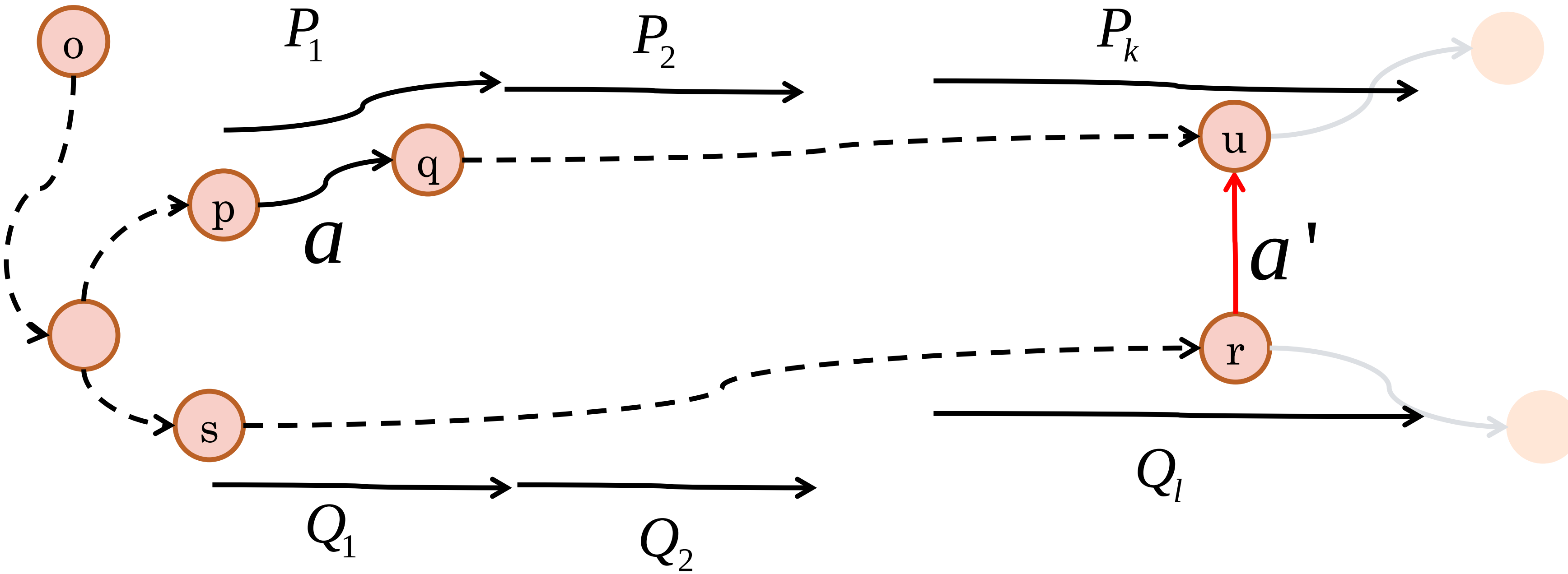


U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
5
3
2
2
3
1
2
4
2
1
1
3
2
2
1
1
3
3
2


U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
5
2
2
3
3
2
1
2
1
3
2
1
2
1
4
3
3
2
2

JARNÍK-PRIMアルゴリズムが正しいこと

- Jarník-Primアルゴリズム実行中の木T は、Uによって誘導されるGの部分グラフ$G(U)$における最小木になっている。
- 証明
  - T のある弧a をT に含まれない弧a‘ に置き換えることで、より小さい木ができる $(w(a') < w(a))$ ことを仮定して、矛盾を導く。



- oを根とする木Tにおいて、弧aの代わりに弧a'としたときに、重みが小さくなると仮定する。
- 上の枝で、弧aを先頭に連続して伸びた道をP_1とし、その後に下の枝で連続して伸びた道を Q_1 とする。その後、P_2、Q_2と交互に伸びるとする。他の道は無視する。
- 弧a'の両端の頂点は道P_kとQ_lに属しているとする。

- P_iを構成する弧$\{a_0^i, a_1^i, \cdots, a_{n(i)}^i\}$、$Q_i$を構成する弧$\{b_0^i, b_1^i, \cdots, b_{m(i)}^i\}$とする。
- P_iの後でQ_iが伸びることから

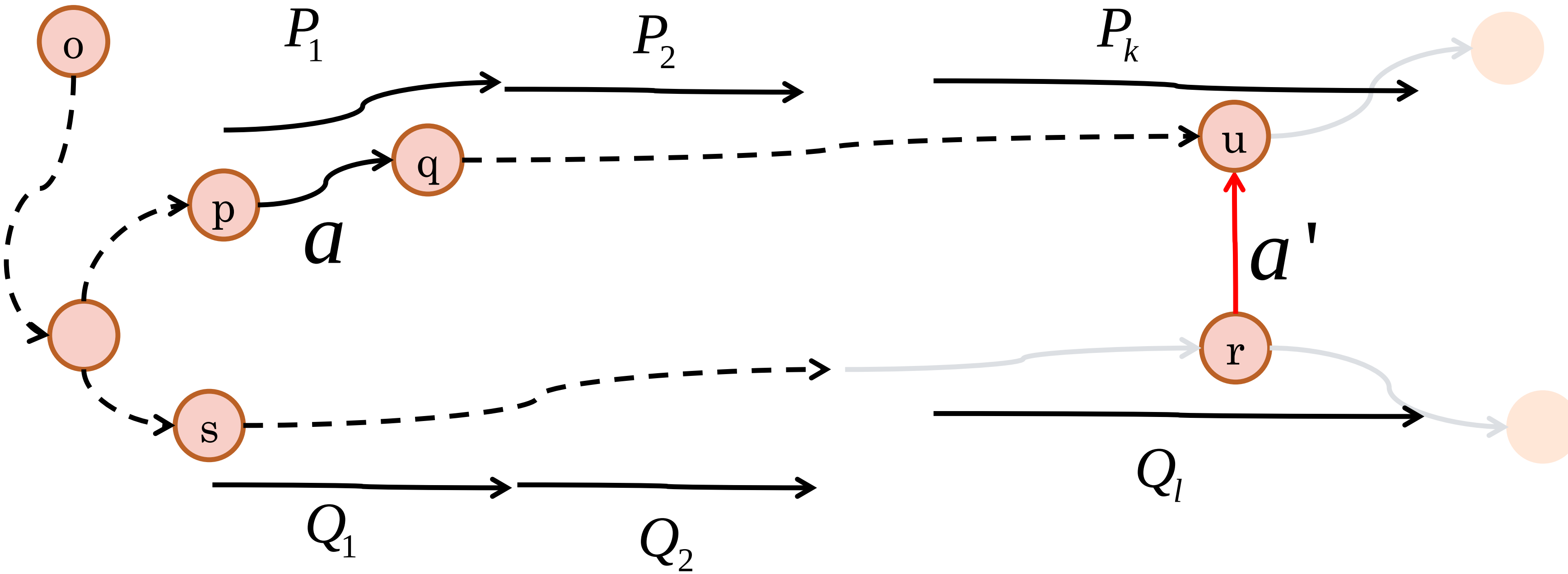
$$\forall i, \forall j, w\left(a_j^i\right) \le w\left(b_0^i\right), w\left(b_j^i\right) \le w\left(a_0^{i+1}\right)$$

- 先頭の弧に注目

$$\forall i, w\left(a_0^i\right) \le w\left(b_0^i\right) \le w\left({a^{i+1}}_0\right)$$

- つまり、各道の先頭の弧の重みは以下を満たす

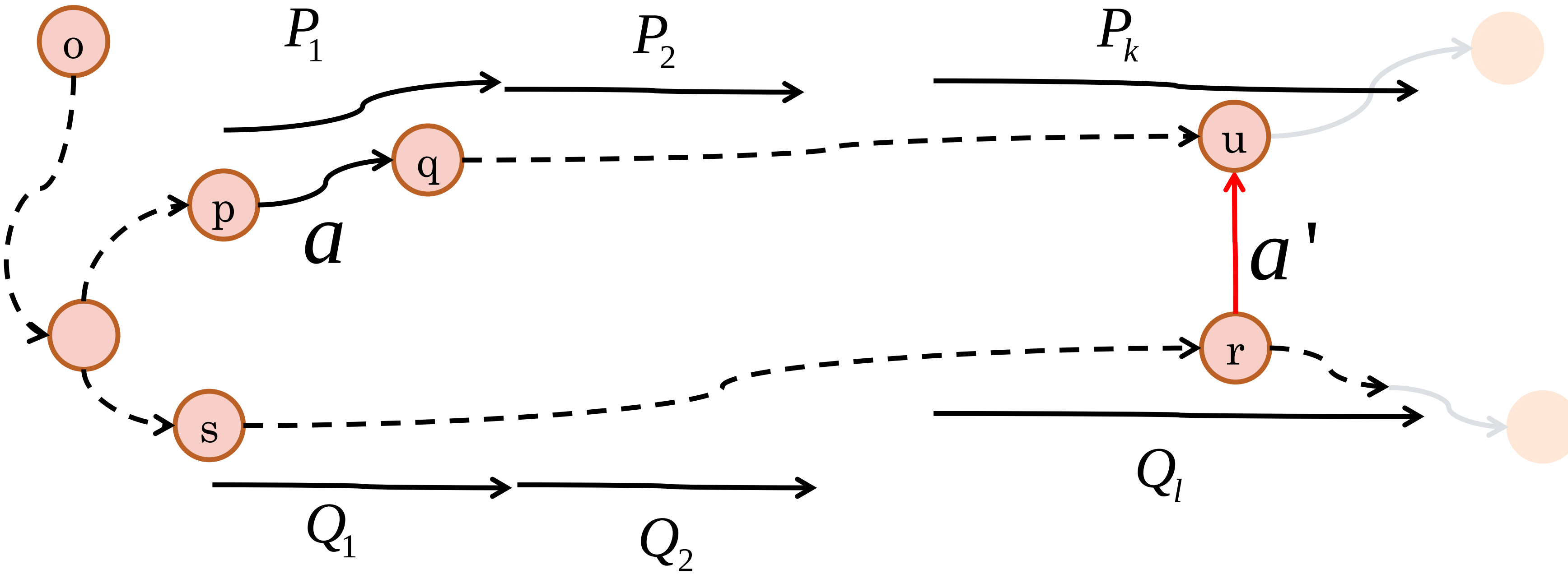
$$\forall i, w(a) \le w\left(a_0^i\right), w(a) \le w\left(b_0^i\right)$$



- $k \leq l$の場合：上の道が頂点uまで伸びたとき、下の道は頂点rまで伸びていない場合に相当
  - 上の道P_kが伸びるとき、弧a'が採用されなかったことから

$$w(a) \leq w\left(b_0^k\right) \leq w(a')$$

となり矛盾



- $k > l$の場合：上の道が頂点uまで伸びたとき、下の道は頂点rを過ぎて伸びていた場合に相当
  - 下の道Q_lが伸びるとき、弧a'が選ばれなったことから

$$w(a) \le w\left(a_0^k\right) \le w(a')$$

となり矛盾